**Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 316-321**
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122036

# Cauchy-Schwarz不等式的证明与推广

**刘　鑫**

贵州师范大学，贵州　贵阳

收稿日期：2022年1月15日；录用日期：2022年2月17日；发布日期：2022年2月24日

## 摘　要

**Cauchy-Schwarz不等式在数学领域中是一类重要的不等式。本文归纳了Cauchy-Schwarz不等式几种典型证明方法，并给出了其推广形式。**

## 关键词

**Cauchy-Schwarz不等式，积分不等式，判别式，矩阵**

# Proof and Generalization of Cauchy-Schwarz Inequality

**Xin Liu**

Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Jan. 15th, 2022; accepted: Feb. 17th, 2022; published: Feb. 24th, 2022

## Abstract

**Cauchy-schwarz inequality is an important inequality in mathematics. In this paper, several typical proof methods of Cauchy-Schwarz inequality are summarized and their generalized forms are given.**

## Keywords

**Cauchy-Schwarz Inequality, Integral Inequality, Discriminant, Matrix**



文章引用：刘鑫. Cauchy-Schwarz 不等式的证明与推广[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 316-321.
DOI: 10.12677/pm.2022.122036

## 1. 引言

柯西不等式是一类著名不等式[1] [2]，在实数域或复数域上的内积空间 $Y$ ，$\exists x,y\in Y$ ，$|(x,y)|^2\le\|x\|^2\|y\|^2$ 为 Cauchy-Schwarz 不等式最基本形式。此不等式在数学领域中有着广泛的应用，是区别于均值不等式的另一类重要不等式。通过变形可以推广出很多形式，从而应用在不同领域中。本文主要介绍了 Cauchy-Schwarz 不等式的离散形式与积分形式，并给出了几种具有代表性的证明方法，以便于对柯西不等式更好的理解。

## 2. Cauchy 不等式的定理证明

### 2.1. 柯西不等式的离散形式

定理 1 [3]：对 $\forall a_i,b_i\in R\ (i=1,2,\cdots,n)$，有 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$。等号成立的充要是，$\exists$实数$k\in R$，st $a_i=kb_i$，即当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

引理 1 [2] [4]设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \cdots & & \cdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}_{ij}$，$\boldsymbol{C}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ji}$，则 $|\boldsymbol{C}|$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 中所需要的 $m$ 阶子式与 $\boldsymbol{B}$ 中对应同阶子式乘积和。

证法 1 令矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ \cdots & \cdots\\ a_n & b_n\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AA}'=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_ib_i\\ \sum_{i=1}^n a_ib_i & \sum_{i=1}^n b_i^2\end{pmatrix}$。

故 $|\boldsymbol{C}|=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$，由引理 $|\boldsymbol{C}|=\sum\begin{vmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2\ge 0$。

故 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$。

证法 2 [5]构造二次函数

令

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\left(a_1x+b_1\right)^2+\left(a_2x+b_2\right)^2+\cdots+\left(a_nx+b_n\right)^2\\
&=\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)x^2+2\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)
\end{aligned}
$$

其中 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge 0$。

又 $\because\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\quad\therefore f(x)\ge 0$

$\therefore\Delta=4\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2-4\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\le 0$ 恒成立

即 $\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)$，当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

引理 2 在规定的欧式空间中，对 $\forall$ 两个向量，回顾两个性质：

1) 令 $\alpha=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，$\beta=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)$，有 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$。

2) 在一个欧式空间里，对 $\forall$ 向量 $\alpha,\beta$ 有不等式 $(\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$，等号成立当且仅当 $\alpha,\beta$ 线性相关。

证法 3 通过欧式空间，取 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 则 $(\alpha,\beta)^2=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$，$(\alpha,\alpha)^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$(\beta,\beta)^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$，根据引理 $(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$ 可得 $(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\le(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$ 等号成立当且仅当 $\alpha,\beta$ 线性相关。

## 2.2. 柯西不等式的积分形式

定理 2 [6] [7] (Cauchy-Schwarz 不等式)设在 $[af(x)和g(x),b]$ 上的实可积函数，则

$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^2$ (当且仅当 $f(x),g(x)$ 线性相关时等号成立)。

证法 1 $\because f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，利用积分定义将 $[a,b]$ 区间 $n$ 等分

令 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，由定积分的性质 $f^2$，$f\cdot g$，在 $[a,b]$ 上均可积

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)^2\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g(x_i)^2\frac{b-a}{n}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式离散形式 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$

得 $\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^n g(x_i)^2\right)$ 并由极限的保号性证明成立即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^2。$$

证法 2(判别式法)

对 $\forall$ 实数 $m$，有 $\int_a^b (mf(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\ge0$

即

$$m^2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2+2m\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^2\ge0$$

$$\therefore\Delta=\left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le0$$

即 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^2$ 证明成立。

证法 3 利用定积分的性质

令 $A\ge0$，即 $A^2=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

$B=\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}>0$ 即 $B^2=\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$ 其中 $f(x)\cdot g(x)\ne0$

$\left(\frac{|f(x)|}{A}-\frac{|g(x)|}{B}\right)\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2^2}=\frac{f^2(x)}{A^2}+\frac{g^2(x)}{B^2}-\frac{2}{AB}|f(x)g(x)|$ 取积分

$$\int_a^b\left(\frac{|f(x)|}{A}-\frac{|g(x)|}{B}\right)^2\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f^2(x)}{A^2}\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{g^2(x)}{B^2}\mathrm{d}x-\frac{2}{AB}\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{A^2}+\frac{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}{B^2}-\frac{2}{AB}\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$
$$=2-\frac{2}{AB}\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\ge 0$$

化简得$\frac{\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x}{AB}\le 1$因此$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le AB$

由 $A=\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$，$B=\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$

代入得 $\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$

因此$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$。

## 3. Cauchy-Schwarz 不等式其他推广及应用

定理 3 [8]将不等式$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$改写成行列式的形式

$\begin{vmatrix}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}>0$，再设另一函数$u(x)$，st $f(x),g(x),u(x)$在$[a,b]$上可积，那么

$$\begin{vmatrix}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u(x)f(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u(x)g(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g(x)u(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}\ge 0。$$

证明 对$\forall$实数$m_1,m_2,m_3$，有

$$\int_a^b\left(m_1f(x)+m_2g(x)+m_3u(x)\right)^2\mathrm{d}x$$
$$=m_1^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+m_2^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x+m_3^2\int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x+2m_1m_2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$+2m_1m_3\int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x+2m_2m_3\int_a^b g(x)u(x)\mathrm{d}x\ge 0$$

可以看到$m_1,m_2,m_3$的二次型为半正定二次型，从而系数矩阵行列式为

$$\begin{vmatrix}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u(x)f(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u(x)g(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g(x)u(x)\mathrm{d}x & \int_a^b u^2(x)\mathrm{d}x\end{vmatrix}\ge 0。$$

引理 3 [9] [10] $\forall\alpha,\beta\ge 0$。$\alpha,\beta\in R$。有$\alpha\beta\le\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$，$(p,q>1)$，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

定理 4

1) 在欧式空间 $R^n$，若 $\xi$，$\eta \in \mathrm{R}^n$，则 $(\xi,\eta)^2 \le (\xi,\xi)(\eta,\eta)$，当且仅当线性相关时等号成立。

2) 设概率空间 $P$ 中，$\forall$ 随机变量 $\xi$，$\eta \in P$。有 $|E\xi\eta|^2 \le |E\xi|^2 |E\eta|^2$，当且仅当 $\eta = C\xi$ 时，等号成立，$C$ 为任意常数。

证明 1) 设 $\eta \ne 0$。令 $m$ 是一个实数，作向量 $\gamma = \xi + m\eta$，不论 $m$ 取何值一定有

$$(\gamma,\gamma) = (\xi + m\eta, \xi + m\eta) \ge 0$$

即 $(\xi,\xi) + 2(\xi,\eta)m + (\eta,\eta)m^2 \ge 0$

取 $m = -\dfrac{(\xi,\eta)}{(\eta,\eta)}$ 代入(1)式得

$$(\xi,\xi) - \frac{(\xi,\eta)^2}{(\eta,\eta)} \ge 0$$

$$(\xi,\eta)^2 \le (\xi,\xi)(\eta,\eta)$$

证明成立。

2) 当 $E(\xi^2) = 0$ 时，$\xi = 0$，故 $E(\xi\eta) = 0$，不等式成立；当 $E(\xi^2) > 0$ 时，令 $f(t) = E\left[(t\xi - \eta)^2\right] = t^2 E(\xi^2) - 2tE(\xi,\eta) + E(\eta^2) \ge 0$，其中 $f(t)$ 恒大于等于 0，于是 $\Delta = 4(E\xi\eta)^2 - 4E(\xi^2)E(\eta^2) \le 0$，即 $(E\xi\eta)^2 \le E(\xi^2)E(\eta^2)$，证明成立。

定理 5 [11] 对 $\forall \xi_k$，$\eta_k \in C$ $(k = 1,2,\cdots,n)$，有 $\sum_{i=1}^{n} |\xi_k||\eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/q}$，$\left(p > 1,\ q > 1 且 \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$。

证明 当 $\xi = \eta = 0$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 时，结论成立。设 $\xi$ 不全为 0，$\eta$ 也不全为零，由引理 3，得

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n} |\xi||\eta|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta|^q\right)^{1/q}} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{|\xi|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi|^p\right)^{1/p}}\right]\left[\frac{|\eta|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta|^q\right)^{1/q}}\right] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{|\xi|^p}{p\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi|^p\right)} + \frac{|\eta|^q}{q\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta|^q\right)}\right] \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

因此结论成立。

## 参考文献


[1] 付向红. 2-赋范空间 Cauchy-Schwarz 不等式的推广[J]. 赣南师范学院学报, 2008(6): 11-13.

[2] 俱鹏岳, 张骞. 柯西不等式的三种证明[J]. 陇东学院学报: 自然科学版, 2005, 15(1): 1-2.

[3] 苏招兄. 柯西不等式的证明推广及应用[J]. 知识经济, 2015(4): 2.

[4] 丘维声. 高等代数[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[5] 蔡洪新. 柯西不等式的推广与应用[J]. 保山学院学报, 2013, 32(5): 5.

[6] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[7] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[8] 张盈. Cauchy-Schwarz 不式的证明, 推广及应用[J]. 高师理科学刊, 2014, 34(3): 34-37.

[9] 胡晓明. Cauchy-Schwarz 不等式的证明和应用[J]. 教师, 2010(4): 85-86.
[10] 孙春涛. Cauchy-Schwarz 不等式的应用[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(2): 155-156.
[11] 林越. Cauchy-Schwarz 不等式的应用及推广[J]. 琼州学院学报, 2012, 19(5): 7-9.