Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 287-308
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122034

Hans汉斯

具有Choquard项的拟线性Schrodinger-Poisson系统的非平凡解

平 锐，廖 鹏，陈绍雄*

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年1月11日；录用日期：2022年2月15日；发布日期：2022年2月22日

摘 要

本文研究具有Choquard项的拟线性Schrodinger-Poisson 系统的非平凡解

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u - \Delta(u^2)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u, x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2 \qquad , x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $\alpha \in (0,3), 4+\alpha \le p < 6+\alpha$， $V \in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，并且 $I_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是里斯位势。在 $V(x)$ 的某些假设下，我们利用变分法与变量替换证明非平凡解的存在性。

关键词

拟线性薛定谔方程，变分法，非平凡解

Nontrivial Solutions of Quasilinear Schrodinger-Poisson Systems with Choquard Terms

Rui Ping, Peng Liao, Shaoxiong Chen*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

* 通讯作者。

文章引用: 平锐, 廖鹏, 陈绍雄. 具有Choquard项的拟线性Schrodinger-Poisson系统的非平凡解[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 287-308. DOI: 10.12677/pm.2022.122034

Received: Jan. 11^{th}, 2022; accepted: Feb. 15^{th}, 2022; published: Feb. 22^{nd}, 2022

Abstract

In this paper, we study the existence of nontrivial solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations of Choquard type:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u - \Delta(u^2)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u, x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $\alpha \in (0,3), 4+\alpha \le p < 6+2\alpha, V \in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ **and** $I_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **is the Riesz potential. Under some assumptions on** $V(x)$**, we establish the existence of nontrivial solutions. Under the above assumptions, we use variational argument and variable substitution to prove the existence of nontrivial solution.**

Keywords

Quaslinear Schrödinger Equation, Variational Argument, Nontrivial Solution

1. 引言

这篇文章考虑下列具有 Choquard项的拟线性 Schrodinger-Poisson 系统:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u - \Delta(u^2)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u, x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha \in (0,3), 4+\alpha \le p < 6+\alpha$, $V \in C(\mathbb{R}^3, R)$, 并且 $I_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是里斯位势, 定义为

$$I_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\frac{3-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\pi^{\frac{3}{2}}2^\alpha|x|^{3-\alpha}} := \frac{A_\alpha}{|x|^{3-\alpha}} \tag{2}$$

Γ 是 Gamma函数.

方程 (1) 的更一般形式是

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=-\Delta\psi+V(x)\psi+\phi\psi-k\Delta(h(|\psi|^2))h^{'}(|\psi|^2)\psi-g(x,\psi), \\ -\Delta\phi=\psi^2, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $V=V(x)(x\in\mathbb{R}^3)$ 是给出的势函数, k 是实数, h,g 是实函数并且 ϕ 表示波函数的非局部自相互作用的内部势.

当 $k=0,g(x,\varphi)=(I_\alpha*F(u))f(u)$, 方程 (1) 变为下列具有卷积项的拟线性 Schrodinger-Poisson 系统:

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\phi u=(I_\alpha*F(u))f(u),x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=u^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad ,x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $F(t)=\int_0^t f(s)ds$ 满足 $\lim_{|t|\to\infty}\frac{F(t)}{|t|^\sigma}=\infty$ $(\sigma=min\{2,\frac{6+\alpha}{4}\})$. 若没有 ϕu 项, 方程 (1.1) 变成下列具有 Choquard项的拟线性 Schrodinger-Poisson 方程

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta(u^2)u=(I_\alpha*|u|^{p-2})u,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^3), \tag{5}$$

方程 (5) 的正解在 [1]中已经证明.

在本文中我们利用变分法研究方程 (1) 非平凡解的存在性. 我们需要一些记号. 若 $x\in\mathbb{R}^3$ 和 $R>0$, 则以 x 为心半径为 R 的闭球记为 $B_R(x)$. 设 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 表示光滑且具有支集的函数的集合. 设

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^3):=\{u\in L^{2^*}(\mathbb{R}^3):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

范数为

$$\|u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2.$$

由 Sobolev 不等式, $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 连续嵌入到 $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$. 设

$$H^1(\mathbb{R}^3):=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

内积为

$$\langle u,v\rangle_{H^1}=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+uv)$$

范数为

$$\|u\|:=\|U\|_{H^1}=\langle u,u\rangle_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

用 $|\cdot|_q$ 表示 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 中的范数.

易知对任意 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 存在唯一的 $\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 使得 $-\Delta\phi=u^2$. 用 Lax-Milgram 定理和

$$\phi_u(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(y)}{|x-y|}dy=\frac{1}{|x|}*u^2$$

则方程 (1) 变为

$$-\Delta u+V(x)u+\phi_u(x)u-\Delta(u^2)u=(I_\alpha*|u|^p)|u|^{p-2}u, x\in\mathbb{R}^3$$

接下来我们总假设 $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 和 $inf_{\mathbb{R}^3}V(x)=V_0>0$. 我们考虑如下假设:
(V) $V(x)\le V_\infty:=lim_{|y|\to\infty}V(y)<\infty$ and $V_0<V_\infty$.
方程 (1) 的能量泛函为

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[(1+2u^2)|\nabla u|^2+V(x)u^2]+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u(x)u^2-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|u^+|^p)|u^+|^p,$$

其中 $u^+=max\{u,0\}$.

本文主要结论如下:
定理1.1. 假设 $4+\alpha\le p<6+2\alpha$ 和势函数 $V(x)$ 满足条件 (V) . 那么方程 (1) 有一个非平凡解 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$.

主要根据 [1]中的方法, 我们面临新的困难. 第一, (1) 的非线性项是非局部的. 在 [2–5]中对于局部项的方法不再适用. 第二, 由于 $\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2$ 的出现, $J(u)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上没有定义. 为克服这一难题, 我们用 [2, 6]中的方法. 从上述论文中的方法, 设 f 定义为

$$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}$$

并且 $f(0)=0$, 在 $(-\infty,0]$ 上有 $f(-t)=-f(t)$, f 有如下的性质(参见 [6]):
(f_1) f是光滑可微的;
(f_2) 函数 $f^2(t)$ 是严格凸的;
(f_3) 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 有 $0<f'(t)\le1$;
(f_4) 对所有 $t\in\mathbb{R}$ $|f(t)|\le|t|$;
(f_5) 当 $t\ge0$ 时 $\frac{1}{2}f(t)\le tf'(t)\le f(t)$; 当 $t\le0$ 时 $f(t)\le tf'(t)\le\frac{1}{2}f(t)$;
(f_6) 对所有 $t\in\mathbb{R}$ $|f(t)|\le2^{\frac{1}{4}}|t|^{\frac{1}{2}}$;
(f_7) $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1$;
(f_8) $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}=2^{\frac{1}{4}}$, $\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{\sqrt{|t|}}=-2^{\frac{1}{4}}$;
(f_9)存在一个正常数 C 使得

$$f(t)\ge\begin{cases}C|t|, & |t|\le1,\\ C|t|^{\frac{1}{2}}, & |t|\ge1.\end{cases}$$

(f_{10}) 对所有 $t\in\mathbb{R}$ $|f(t)f'(t)|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(f_{11}) 存在正常数 C_1 和 C_2 使得对所有 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$|t|\le C_1|f(t)|+C_2|f(t)|^2 \tag{6}$$

(f_{12}) 对每一个 $\xi > 0$, 存在$C(\xi) > 0$ 使得$f^2(\xi t) \le C(\xi) f^2(t)$.

利用变量替换 $u = f(v)$ 后, 方程 (1) 可写为

$$-\triangle v + V(x)f(v)f^{'}(v) + \phi f(v)f^{'}(v) = (I_\alpha * |f(v)|^p)|f(v)|^{p-2}f(v)f^{'}(v), x \in \mathbb{R}^3, \tag{7}$$

$J(u)$ 写为

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)^2 - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(v^+)|^p)|f(v^+)|^p \tag{8}$$

从 $(V), (f_4), (f_{10})$ 和 $Hardy - Littlewood - Sobolev$ 不等式, 我们推出 $\Phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3))$.

易知若 $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 Φ 的一个临界点, 则对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 有

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{'}(v), \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla v\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^3}V(x)f(v)f^{'}(v)\varphi + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(v^+)|^p)|f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)\varphi\end{aligned} \tag{9}$$

那么 v 是方程 (7) 的弱解, $u = f(v)$ 是方程 (1) 的弱解.

在本文中我们用 C 或 C_i 表示不同的正常数.

2. 相关引理

引理2.1 $Hardy - Littlewood - Sobolev$ 不等式

设 $1 < p < t, \frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \frac{\lambda}{N} = 2$ 并且 $0 < \lambda < N$. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^t(\mathbb{R}^N)$, 那么

$$|\int\int f(x)|x-y|^{-\lambda}g(y)| \le C_{p,\lambda,N}|f|_p|g|_t \tag{10}$$

证明. 参考文献 [7].

注2.1 由引理 2.9 和 (f_6) , 若 $v \in L_{\frac{pr}{2}}(\mathbb{R}^3)(r > 1)$ 且 $\frac{2}{r} - \frac{\alpha}{3} = 1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|f(v(x))|^p|f(v(y))|^p}{|x-y|^{3-\alpha}} \le C_1\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v(x)|^{\frac{p}{2}}|v(y)|^{\frac{p}{2}}}{|x-y|^{3-\alpha}} \le C|v|^p_{\frac{pr}{2}} \tag{11}$$

因为我们在空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上进行讨论, 又由 $Sobolev$ 嵌入定理, 则必须要求 $\frac{pr}{2} \in [2, 6)$.

引理2.2 $|f(t)| \le 2^{\frac{1}{4}}|t|^l$ for all $l \in [\frac{1}{2}, 1], t \in \mathbb{R}$.

证明. 由 $(f_4), (f_6)$, 当 $|t| \le 1$ 时,

$$|f(t)| \le |t| \le |t|^l \le 2^{\frac{1}{4}}|t|^l.$$

当 $|t|>1$ 时

$$|f(t)|\le 2^{\frac{1}{4}}|t|^{\frac{1}{2}}\le 2^{\frac{1}{4}}|t|^{l}.$$

3. 定理1.1的证明

在这一节我们证明定理 1.1 . 首先我们证明泛函 Φ 具有山路几何结构.

引理3.1 存在 $\rho_0,\alpha>$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v|^2+V(x)f^2(v))\ge C_1\|v\|^2. \tag{12}$$

证明. 由 [3]存在 $C_1>0,\rho_1>0$ 使得对任意的 $\|v\|\le\rho_1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v|^2+V(x)f^2(v))\ge C_1\|v\|^2 \tag{13}$$

我们知道在 (V) 的条件下, 上述不等式成立. 由于 $\alpha\in(0,3)$, 那么 $\frac{3p}{3+\alpha}\in(2,6)$. 根据 (f_6) , (10), (13) 和 $Sobolev$ 嵌入定理, 得到

$$\begin{aligned}\Phi(v)&\ge\frac{C_1}{2}\|v\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)^2-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v)^+|^p)|f(v)^+|^p\\&\ge\frac{C_1}{2}\|v\|^2-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v)^+|^p)|f(v)^+|^p\\&\ge\frac{C_1}{2}\|v\|^2-C_2\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|v|^{\frac{p}{2}})|v|^{\frac{p}{2}}\\&\ge\frac{C_1}{2}\|v\|^2-C_3(\int_{\mathbb{R}^3}(|v|^{\frac{3p}{3+\alpha}}))^{\frac{3+\alpha}{3}}\\&\ge\frac{C_1}{2}\|v\|^2-C_3\|v\|^p\\&\ge\|v\|^2(\frac{C_1}{2}-C_3\|v\|^{p-2})\end{aligned}$$

因此当 $\|v\|\le(\frac{C_2}{2C_3})^{\frac{1}{p-2}}:=\rho_2$ 时 $\Phi(v)>0$. 取 $\rho_0=min\{\rho_1,\rho_2\}$, 证明完成. 用 [5]中的方法, 我们有如下的引理:

引理3.2 存在 $v_0\in H^1(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\|v_0\|>\rho_0$ 和 $\Phi(v_0)<0$.

证明. 用 (f_5) , 得到当 $t>0$ 时, $\frac{f(t)}{t}$ 时减函数. 考虑 $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 使得 $0\le\psi(x)\le 1$ 且

$$\begin{cases}\psi(x)=1, & |x|\le 1\\ \psi(x)=0, & |x|\ge 2\end{cases} \tag{14}$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^3,t>0$, 有

$$f(t\psi(x))\ge f(t)\psi(x)$$

由 (f_4) , 得到

$$
\begin{aligned}
\Phi(t\psi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[|\nabla t\psi|^2 + V(x)f(t\psi)^2] + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(t\psi)}(x)f(t\psi)^2 - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(t\psi)|^p)|f(t\psi)|^p \\
&\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[t^2|\nabla\psi|^2 + t^2V(x)\psi^2] - \frac{1}{2p}f^{2p}(t)\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |\psi|^p)|\psi|^p f^{2p}(t) \\
&\le \frac{C^1}{2}\|\psi\|^2t^2 + C_2t^2 - C_3f^{2p}(t)
\end{aligned}
$$

再由 (f_9) 和 $p > 2$, 当 $|t| \ge 1$ 时, 有

$$
\Phi(t\psi) \le \frac{C_1}{2}\|\psi\|^2t^2 + C_2t^2 - C_4|t|^p
$$

当 $t \to +\infty$ 时, $\Phi(t\psi) \to -\infty$. 即当 t_0 足够大时, 推出 $\Phi(t_0\psi) < 0$ 和 $t_0\|\psi\| > \rho_0$. 设 $v_0 = t_0\psi$, 则 v_0 求出.

引理3.3 Φ 在水平 $c > 0$ 处的 *Cerami* 序列在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的.

证明. 设 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 是在水平 c 处的 *Cerami* 序列. 再设 $w_n := \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$. 由 (f_5) 可得

$$
\int_{\mathbb{R}^3}|w_n|^2 \le 4\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^2, \tag{15}
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}(1 + \frac{2f^2(v_n)}{1+2f^2(v_n)})^2|\nabla v_n|^2 \le 4\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2, \tag{16}
$$

和

$$
|\langle\Phi^{'}(v_n), w_n\rangle| \le C\|\Phi^{'}(v_n)\|(\|v_n\| + 1) \to 0, \quad as \ \ n \to \infty. \tag{17}
$$

得到 $w_n \subset H^1(\mathbb{R}^3)$. 因此

$$
\begin{aligned}
c+1 &\ge \Phi(v_n) - \frac{1}{2p}\langle\Phi^{'}(v_n), w_n\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n) - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) \\
&\ge \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2 - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n) \\
&\quad - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) \\
&\ge (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2p})\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) \\
&\ge (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)).
\end{aligned}
$$

由于 $4 + \alpha \le p < 6 + \alpha$, 因此序列 $\{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)\}$ 是有界的. 利用 *Sobolev* 嵌入定理

和 (f_9) , 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^2 &= \int_{\{|v|\le 1\}}|v_n|^2+\int_{\{|v|>1\}}|v_n|^2\\ &\le C_1\int_{\{|v|\le 1\}}|f(v_n)|^2+(\int_{\{|v|>1\}}|v_n|)^{2\theta}(\int_{\{|v|>1\}}|v_n|^{2^*})^{\frac{2(1-\theta)}{2^*}}\\ &\le C_1\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)|^2+C_2(\int_{\{|v|>1\}}|f^2(v_n)|)^{2\theta}(\int_{\{|v|>1\}}|v_n|^{2^*})^{\frac{2(1-\theta)}{2^*}}\\ &\le C_3\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)+C_4(\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n))^{2\theta}(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2)^{1-\theta}\\ &\le C_5\end{aligned}$$

其中 $\theta=\frac{2^*-2}{2(2^*)-1}=\frac{2}{5}$, 因为 $\{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)\}$ 是有界的, 则 $\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2$ 是有界的, 得到 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上是有界的.

接下来, 我们假设 $\{v_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 Φ 在水平 $c>0$ 处的 $Cerami$ 序列. 由前面的引理可知 $\{v_n\}$ 是有界的. 在子列意义下, 我们假设 $v_n\rightharpoonup v\in H^1(\mathbb{R}^3), v_n(x)\to v(x)$ 几乎处处于 $x\in\mathbb{R}^3$ 且当 $q\in[2,6)$ 时, 有 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$. 我们有以下引理.

引理3.4 当 $n\to\infty$ 时, 若 $\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)|^2\to\int_{\mathbb{R}^3}|f(v)|^2$, 则 $\|v_n-v\|\to 0$.

证明. 首先我们证明 $n\to\infty$ 时 $\int_{\mathbb{R}^3}V(x)|f(v_n-v)|^2\to 0$. 由 (f_4) , $\{f(v_n)\}$ 是有界的. 假设在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中有 $f(v_n)\rightharpoonup f(v)$, 由 $Brezis-Lieb$ 引理, 有 $\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)-f(v)|^2\to 0$. 由 (V) , 得到

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbb{R}^3}V(x)|f(v_n)|^2-\int_{\mathbb{R}^3}V(x)|f(v)|^2| &\le \int_{\mathbb{R}^3}V(x)||f(v_n)|^2-|f(v)|^2|\\ &\le V_\infty\int_{\mathbb{R}^3}||f(v_n)|^2-|f(v)|^2|\to 0\end{aligned}$$

由 (f_{12}) , 存在 $C>0$ 使得 $f^2(2t)\le Cf^2(t)$. 由因为 $f^2(t)$ 是凸的, 有

$$\begin{aligned}V(x)f^2(v_n-v) &\le V(x)f^2(\frac{1}{2}(2v_n-2v))\\ &\le \frac{1}{2}V(x)f^2(2v_n)+\frac{1}{2}V(x)f^2(-2v)\\ &\le \frac{1}{2}V(x)f^2(2v_n)+\frac{1}{2}V(x)f^2(2v)\\ &\le C(V(x)f^2(v_n)+V(x)f^2(v)).\end{aligned}$$

由引理3.4 [1] ,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n-v)=0.$$

接下来, 我们证明对任意 $q \in [2,6)$, 当 $n \to \infty$ 时有 $\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^q \to 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^2 &= \int_{\{|v|\le 1\}} |v_n - v|^2 + \int_{\{|v|>1\}} |v_n - v|^2 \\ &\le C_1 \int_{\{|v|\le 1\}} |f(v_n - v)|^2 + (\int_{\{|v|>1\}} |v_n - v|)^{2\theta} (\int_{\{|v|>1\}} |v_n - v|^{2^*})^{\frac{2(1-\theta)}{2^*}} \\ &\le C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n - v)|^2 + C_2 (\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n - v)|^2)^{2\theta} (\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(v_n - v)|^2)^{1-\theta} \\ &\le C_3 \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|f(v_n - v)|^2 + C_4 (\int_{\mathbb{R}^3} V(x)|f(v_n - v)|^2)^{2\theta} (\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(v_n - v)|^2)^{1-\theta}\end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{2^*-2}{2(2^*-1)} = \frac{2}{5}$. 因为 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 是有界的, 利用内插不等式, 取 $s = 2, t = 2^* = 6, \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{s} + \frac{(1-\lambda)}{t}$ 和 $q \in [2,6)$, 那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^q &\le (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^2)^{\frac{q\lambda}{2}} (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^{2^*})^{\frac{q(1-\lambda)}{2^*}} \\ &\le (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^2)^{\frac{q\lambda}{2}} \cdot C\|v_n - v\|^{q(1-\lambda)} \to 0\end{aligned}$$

最后, 我们证明当 $n \to \infty$ 时 $\|v_n - v\| \to 0$. 由 (2.3.1), (f_6), (f_{10}) 和 Hölder's 不等式, 有

$$\begin{aligned}&|\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^{p-2} f(v_n^+) f'(v_n^+)(v_n - v)| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^{p-2} |f(v_n^+) f'(v_n^+)||v_n - v| \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |v_n|^{\frac{p}{2}})|v_n|^{\frac{p}{2}-1}|v_n - v| \\ &\le C(\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{pr}{2}})^{\frac{1}{r}} (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{p-2}{2}r}|v_n - v|^r)^{\frac{1}{r}} \\ &\le C((\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{p-2}{2}r\cdot\frac{p}{p-2}})^{\frac{p-2}{p}} (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^{r\cdot\frac{2}{p}})^{\frac{2}{p}})^{\frac{1}{r}} \\ &\le C(\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^{r\cdot\frac{2}{p}})^{\frac{2}{pr}} \to 0,\end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{r} - \frac{\alpha}{3} = 1$. 接下来我们说明 $\{v_n(v_n - v)\} \subset L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$, 由 Hölder's 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{6}{5}}|v_n - v|^{\frac{6}{5}} &\le (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}} (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}} \\ &= (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^2)^{\frac{3}{5}} (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^3)^{\frac{2}{5}} \\ &\le C(\int_{\mathbb{R}^3} |v_n - v|^3)^{\frac{2}{5}} \to 0.\end{aligned}$$

因此 $\{v_n(v_n-v)\}\subset L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. 由 (10), (f_3), (f_4) 和 Hölder's 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f^{'}(v_n)(v_n-v)| &= |\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f^2(v_n(y))f(v_n(x))(v_n-v)}{|x-y|}dydx| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{v_n^2(y)|v_n(x)||v_n-v|}{|x-y|}dydx \\
&\le C_1(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n(y)|^{2\cdot\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}}(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n(v_n-v)|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} \\
&\le C_2(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^{\frac{6}{5}}|(v_n-v)|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} \\
&\le C_2[(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}\cdot(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n-v|^{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}]^{\frac{5}{6}} \\
&\le C_3(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n-v|^3)^{\frac{1}{3}}\to 0,
\end{aligned}
$$

因为 $\|\Phi^{'}(v_n)\|\to 0$ 和 $\{v_n-v\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上是有界的, 我们有

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi^{'}(v_n),v_n-v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n\nabla(v_n-v)+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f(v_n)f^{'}(v_n)(v_n-v) \\
&+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f^{'}(v_n)(v_n-v) \\
&-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^{p-2}f(v_n^+)f^{'}(v_n^+)(v_n-v)\to 0.
\end{aligned}
$$

另外

$$
\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f(v_n)f^{'}(v_n)(v_n-v)| &\le V_\infty\int_{\mathbb{R}^3}|v_n||v_n-v| \\
&\le V_\infty(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n-v|^2)^{\frac{1}{2}}\to 0.
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n\nabla(v_n-v)\to 0
$$

和

$$
\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(v_n-v)|^2=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v_n\nabla(v_n-v)-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla v\nabla(v_n-v)\to 0.
$$

我们得到当 $n\to\infty$ 时 $\|v_n-v\|\to 0$.

引理3.5 在子列意义下，$A:=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)|^2>0$.

证明. 利用反证法, 假设$A=0$. 利用引理 3.5 , 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \to 0$. 由 (2.3.1) 和 (f_6) , 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(v_n^+)|^p) &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|f(v_n^+)(y)|^p|f(v_n^+)(x)|^p}{|x-y|^{3-\alpha}}dydx \\
&\le C_1\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v_n(y)|^{\frac{p}{2}}|v_n(x)|^{\frac{p}{2}}}{|x-y|^{3-\alpha}}dydx \\
&\le C_2(\int_{\mathbb{R}^3}|v_{(n)}(y)|^{\frac{pr}{2}})^{\frac{1}{r}}(\int_{\mathbb{R}^3}|v_{(n)}(x)|^{\frac{pr}{2}})^{\frac{1}{r}} \\
&= C_2(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^{\frac{pr}{2}})^{\frac{2}{r}} \to 0.
\end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{r}-\frac{\alpha}{3}=1$, 用 (2.3.1) 和 $Sobolev$ 嵌入定理, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f'(v_n)\frac{f(v_n)}{f'(v_n)} &= \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f^2((v_n(y))f^2(v_n(x))}{|x-y|}dydx \\
&\le C|v_n|^5_{\frac{12}{5}} \\
&\le C_2\|v_n\|^4 \to 0.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\langle\Phi'(v_n),\frac{f(v_n)}{f'(v_n)}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}(1+\frac{2f^2(v_n)}{1+2f^2(v_n)})|\nabla v_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n) \\
&+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n)-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v_{n+})|^p)|f(v_{n+})|^p \to 0, \\
&\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)f^2(v_n)\to 0.
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
c+o_n(1)=\Phi'(v_n) &= \frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2+V(x)f^2(v_n))+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f^2(v_n) \\
&-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^p \to 0.
\end{aligned}$$

得到矛盾, 证明完成.

引理3.6 在子列意义下, 存在 $R,\beta>0$ 和 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^3$ 使得

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{B_R(x_n)}|v_n|^2\ge\beta.$$

证明. 利用引理 3.5 , 在子列意义下, 有 $A:=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)|^2>0$. 若引理 3.6 不成立, 则由引理1.21 [8], 在子列意义下,

$$v_n\to 0 \;\; in \;\; L^2(\mathbb{R}^3).$$

因此

$$0 < A = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|f(v_n)|^2 \le \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^2 = 0$$

得到矛盾, 证明结束.

引理3.7 对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 有 $\langle\Phi^{'}(v)\,,\varphi\rangle = 0$.

证明. 对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, φ 的支集在 $B_{R_0}(0)$ 上对某个 $R_0>0$. 因此

$$\begin{aligned}|\langle\Phi^{'}(v_n)-\Phi^{'}(v),\varphi\rangle| &= |\langle\Phi^{'}(v_n),\varphi\rangle-\langle\Phi^{'}(v),\varphi\rangle|\\ &\le |\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(v_n-v)\nabla\varphi| + |\int_{\mathbb{R}^3}V(x)(f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v))\varphi|\\ &\quad + |\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f^{'}(v_n)\varphi-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi|\\ &\quad + |\int_{\mathbb{R}^3}[(I_\alpha*|f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+)-(I_\alpha*|f(v^+)|^p)|f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)]\varphi|\\ &:= I_1+I_2+I_3+I_4\end{aligned}$$

令 $I_1 := |\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(v_n-v)\nabla\varphi|$, 因为在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上 $v_n\rightharpoonup v$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $I_1\to 0$. 令 $I_2 := |\int_{\mathbb{R}^3}V(x)(f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v))\varphi|$, 由(f_3)和(f_4), 有

$$|f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v)|^2 \le 2(|f(v_n)f^{'}(v_n)|^2+|f(v)f^{'}(v)|^2) \le 2|v_n|^2+2|v|^2.$$

由在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ 中有$v_n\to v$和引理3.4 [1], 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_{R_0}(0)}|(f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v))|^2 = 0.$$

用Hölder's不等式, 得到当$n\to\infty$时

$$\begin{aligned}I_2 &\le \int_{B_{R_0}(0)}V_\infty|(f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v))||\varphi|\\ &\le V_\infty(\int_{B_{R_0}(0)}|(f(v_n)f^{'}(v_n)-f(v)f^{'}(v))|^2)^{\frac12}(\int_{B_{R_0}(0)}|\varphi|^2)^{\frac12}\to 0.\end{aligned}$$

对于I_3, 我们有

$$\begin{aligned}I_3 &:= |\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f^{'}(v_n)\varphi-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi|\\ &\le |\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v_n)f^{'}(v_n)\varphi-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi|\\ &\quad + |\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v_n)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi|\\ &= K_1+K_2.\end{aligned}$$

说明$\{f(v_n)f^{'}(v_n)\varphi\}\subset L^{\frac65}(\mathbb{R}^3)$和$\{f^2(v_n)\}\subset L^{\frac65}(\mathbb{R}^3)$, 事实上, 对任意$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 由$(f_4)$, (f_{10}),

$Sobolev$ 嵌入定理和$\{v_n\}$在$H^1(\mathbb{R}^3)$是有界的, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n)f^{'}(v_n)\varphi|^{\frac{6}{5}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^{\frac{6}{5}} = C_1 \int_{B_{R_0}(0)} |\varphi|^{\frac{6}{5}} < \infty.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n)|^{2\cdot\frac{6}{5}} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{12}{5}} \leq C.$$

另外, 由(f_3)和(f_4), 有

$$|f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{12}{5}} \leq C(|f(v_n)f^{'}(v_n)|^{\frac{12}{5}} + |f(v)f^{'}(v)|^{\frac{12}{5}}) \leq C(|v_n|^{\frac{12}{5}} + |v|^{\frac{12}{5}})$$

设$g_n = |f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{12}{5}}$, $h_n = C(|v_n|^{\frac{12}{5}} + |v|^{\frac{12}{5}})$, $h = 2C|v|^{\frac{12}{5}}$, 那么

$$0 \leq g_n \leq h_n, \lim_{n\to\infty} g_n = 0, \lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_0}(0)} h_n = \int_{B_{R_0}(0)} h$$

由引理3.4 [1], 可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_0}(0)} g_n = 0,$$

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(v_n)}(x)|f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)||\varphi| \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{R^3} \frac{f^2(v_n(y))|f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)||\varphi|}{|x-y|} dydx \\
&\leq C_1 (\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n)|^{2\cdot\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} (\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{6}{5}} |\varphi|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} \\
&= C_1 (\int_{\mathbb{R}^3} |f(v_n)|^{2\cdot\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} (\int_{B_{R_0}(0)} |f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{6}{5}} |\varphi|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} \\
&\leq C_2 (\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{12}{5}})^{\frac{5}{6}} [(\int_{B_{R_0}(0)} |f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{12}{5}})^{\frac{1}{2}} (\int_{B_{R_0}(0)} |\varphi|^{\frac{12}{5}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{5}{6}} \\
&\leq C_3 (\int_{B_{R_0}(0)} |f(v_n)f^{'}(v_n) - f(v)f^{'}(v)|^{\frac{12}{5}})^{\frac{5}{12}} \to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &:= |\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(v_n)}(x) f(v)f^{'}(v)\varphi - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(v)}(x) f(v)f^{'}(v)\varphi| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{|x|} * f^2(v_n)) f(v)f^{'}(v)\varphi - \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{|x|} * f^2(v)) f(v)f^{'}(v)\varphi|
\end{aligned}$$

为了证明$K_2 \to 0$, 我们使用一个论点部分改自命题2.2 [4]的证明. 设线性泛函

$$T_1(u) := \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{|x|} * u) f(v)f^{'}(v)\varphi$$

然后用(2.3.1), $T_1 : L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ T_1是连续线性泛函, 即,

$$|T_1(u)| \leq C(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} (\int_{\mathbb{R}^3} |f(v)f^{'}(v)\varphi|^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{6}} < \infty.$$

因为$\{v_n\}$ 在$H^1(\mathbb{R}^3)$中是有界的, 序列$\{f^2(v_n)\}$在$L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$中是有界的, 在子列意义下, 我们假设$|f(v_n)|^2 \rightharpoonup |f(v)|^2$ in $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. 得到当$n \to \infty$时$T_1(|f(v_n)|^2) \to T_1(|f(v)|^2)$, 即,

$$K_2 := |\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(v_n)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(v)}(x)f(v)f^{'}(v)\varphi| \to 0.$$

因此当$n \to \infty$时$I_3 = K_1 + K_2 \to 0$. 另外,

$$\begin{aligned} I_4 &:= |\int_{\mathbb{R}^3} [(I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)|f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - (I_\alpha * |f(v^+)|^p)|f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)]\varphi| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)||\varphi| \\ &\quad + |\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)|f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)\varphi - \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v^+)|^p)|f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)\varphi| \\ &:= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

因为$r = \frac{6}{3+\alpha}$, 由(f_6)和(f_{10}),

$$\begin{aligned} &||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}} \\ &\leq C_1(||f(v_n^+)|^{p-2}f(v_n^+)f^{'}(v_n^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}} + ||f(v^+)|^{p-2}f(v^+)f^{'}(v^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}}) \\ &\leq C_2(||f^2(v_n^+)|^{\frac{p-2}{2}}|^{r\cdot\frac{p}{p-2}} + ||f^2(v^+)|^{\frac{p-2}{2}}|^{r\cdot\frac{p}{p-2}}) \\ &\leq C_3(|v_n|^{r\cdot\frac{p}{2}} + |v|^{r\cdot\frac{p}{2}}) \end{aligned}$$

因为 $4 + \alpha \leq p < 6 + 2\alpha$, $\frac{rp}{2} \in [2, 6)$. 用在 $L_{loc}^{\frac{rp}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 中有 $v_n \to v$ 和引理 3.4 in [1], 得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_0}(0)} ||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}} = 0.$$

因为 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的, 用Hölder's不等式和 (10) , 设 $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(v_n^+)|^p)||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)||\varphi| \\ &\leq C_1(\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{\frac{p}{2}r})^{\frac{1}{r}} (\int_{R^3} ||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^r|\varphi|^r)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_2(\int_{B_{R_0}(0)} ||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^r|\varphi|^r)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_3(\int_{B_{R_0}(0)} ||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}})^{\frac{p-2}{pr}} (\int_{B_{R_0}(0)} |\varphi|^{r\cdot\frac{p}{2}})^{\frac{2}{pr}} \\ &\leq C_4(\int_{B_{R_0}(0)} ||f(v_n^+)|^{p-1}f^{'}(v_n^+) - |f(v^+)|^{p-1}f^{'}(v^+)|^{r\cdot\frac{p}{p-2}})^{\frac{p-2}{pr}} \end{aligned}$$

其中 $r=\frac{6}{3+\alpha}$.

因为 $r=\frac{6}{3+\alpha}$, 用 $4+\alpha\le p<6+2\alpha, (f_{10})$ 和Hölder's不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}||f(v_\lambda)|^{p-1}f'(v\lambda)\varphi|^r &\le C\int_{\mathbb{R}^3}|f^2(v_\lambda)|^{\frac{p-2}{2}\cdot r}|\varphi|^r\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^3}|v_\lambda|^{\frac{p-2}{2}\cdot r}|\varphi|^r\\ &\le C(\int_{\mathbb{R}^3}|v_\lambda|^{\frac{p}{2}\cdot r})^{\frac{p-2}{p}}(\int_{R^3}|\varphi|^{r\cdot\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}}\\ &= C|v_\lambda|^{\frac{(p-2)r}{2}}_{\frac{pr}{2}}|\varphi|^r_{\frac{pr}{2}}.\end{aligned}$$

因为 $\frac{rp}{2}\in[2,6)$ 则 $|f(v_\lambda)|^{p-1}f'(v_\lambda)\varphi\in L^r(\mathbb{R}^3)$. 由上面的结论, 设 $T_2(u):=\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*u)|f(v_\lambda)|^{p-1}f'(v_\lambda)\varphi$ 和 $T_2:L^r(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$, 其中 $r=\frac{6}{3+\alpha}$. 有 $\{v_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的和 $|f(v_n)|^{pr}\le C|v_n|^{\frac{pr}{2}}$, 则 $\{|f(v_n)|^p\}$ 在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的. 在子列意义下, 我们假设在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中 $|f(v_n)|^p\rightharpoonup|f(v_\lambda)|^p$. 那么当 $n\to\infty$ 时 $T_2(|f(v_n)|^p)\to T_2(|f(v_\lambda)|^p)$, 即

$$J_2=|\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v_n)|^p)|f(v_\lambda)|^{p-1}f'(v_\lambda)\varphi-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v_\lambda)|^p)|f(v_\lambda)|^{p-1}f'(v_\lambda)\varphi|\to 0.$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时 $I_4=J_1+J_2\to 0$. 综上, 我们得到当 $n\to\infty$ 时 $\langle\Phi'_\lambda(v_n)-\Phi'_\lambda(v_\lambda),\varphi\rangle\to 0$. 又因为 $\langle\Phi'_\lambda(v_n),\varphi\rangle\to 0$, 有

$$\langle\Phi'_\lambda(v_\lambda),\varphi\rangle=0.$$

我们考虑下面两个极限泛函:

$$\Phi_\infty(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v|^2+V_\infty f^2(v))+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(v)}(x)f^2(v)-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(v^+)|^p)|f(v^+)|^p \tag{18}$$

$$J_\infty(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[(1+2u^2)|\nabla u|^2+V_\infty u^2]+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u(x)u^2-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|u^+|^p)|u^+|^p \tag{19}$$

其中$u=f(v)$. 定义

$$c_\infty=inf_{\gamma\in\Gamma}sup_{t\in[0,1]}\Phi_\infty(\gamma(t))>0, \tag{20}$$

其中

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^3)):\gamma(0)=0,\Phi_\infty(\gamma(1))<0\}.$$

现在我们假设$V(x)=V_\infty$, 用上面的引理, 存在$H^1(\mathbb{R}^3)$中的有界 $Cerami$ 序列v_n使得

$$\Phi_\infty(v_n)\to c_\infty\quad,\quad(1+\|v_n\|)(\Phi'_\infty(v_n))\to 0\quad as\quad n\to\infty.$$

因此, 在子列意义下, 有$v_n\rightharpoonup v\in H^1(\mathbb{R}^3)$, $v_n(x)\to v(x)$几乎处处于$x\in\mathbb{R}^3$, 并且对所有$q\in[2,6)$ 在$L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$上有$v_n\to v$. 因此, 由引理3.8, 对任意$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$有$\langle\Phi'_\infty(v),\varphi\rangle=0$, 即,$v$是一个弱解.

由引理3.6, 在子列意义下, 存在 $R, \beta > 0$和$\{x_n\} \subset \mathbb{R}^3$ 使得

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(x_n)} |v_n|^2 \geq \beta > 0.$$

设$w_n = v_n(x - x_n)$, 其中$\{x_n\}$是引理 3.6 给出的序列. 因为$\{v_n\}$是Φ_∞的$Cerami$序列, 则$\{w_n\}$也是. 此外$w_n(x) \to w(x)$几乎处处于$x \in \mathbb{R}^3$, 并且对任意$q \in [2, 6)$在$L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$中有$w_n \to w$.有

$$\int_{B_R(0)} |w|^2 = \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} |w_n|^2 \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(x_n)} |v_n|^2 \geq \beta > 0.$$

因此得到w是非平凡的.

引理3.8 设$v_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $v_0 \neq 0$, $u_0 = f(v_0)$使得

$$a := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty u_0^2 > 0,$$

$$b := \int_{\mathbb{R}^3} (4u_0^2|\nabla u_0|^2 + \phi_{u_0}(x)u_0^2) > 0,$$

$$c := \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |u_0^+|^p)|u_0^+|^p > 0.$$

那么存在$t_1 > t_0 > 0$使得

$$J_\infty(t_0u_0) > J_\infty(tu_0) \quad \forall t \in [0, +\infty)\backslash\{t_0\},$$

$$J_\infty(t_1u_0) < 0.$$

证明. 由$\Phi_\infty(v)$和$J_\infty(u)$的定义, 我们知道

$$\Phi_\infty(v_0) = J_\infty(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[(1 + 2u_0^2)|\nabla u_0|^2 + V_\infty u_0^2] + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_0}(x)u_0^2 - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |u_0^+|^p)|u_0^+|^p.$$

令

$$\begin{aligned} g(t) &= J_\infty(tu_0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[t^2(|\nabla u_0|^2 + V_\infty u_0^2)] + \int_{\mathbb{R}^3}[t^4(|\nabla u_0|^2u_0^2 + \frac{1}{4}\phi_{u_0}(x)u_0^2)] - \frac{t^{2p}}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |u_0^+|^p)|u_0^+|^p \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g(t)) &= t\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_0|^2 + V_\infty u_0^2) + t^3\int_{\mathbb{R}^3}(4u_0^2|\nabla u_0|^2 + \phi_{u_0}(x)u_0^2) - t^{2p-1}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |u_0^+|^p)|u_0^+|^p \\ &= t(a + bt^2 - ct^{2p-2}) \end{aligned}$$

由于 $p > 2$ 和引理3.10 [1]，存在唯一的 $t_0 > 0$ 使得 $g^{'}(t_0) = 0$，当 $0 < t < t_0$ 时 $g^{'}(t) > 0$ 和当$t > t_0$时$g^{'}(t) < 0$. 因此

$$J_\infty(t_0u_0) > J_\infty(tu_0) \quad \forall t \in [0, +\infty)\backslash\{t_0\}.$$

由于 $p > 2$，得到

$$J_\infty(tu_0) \to -\infty \quad as \quad t \to +\infty.$$

因此, 存在 $t_1 > t_0$ 使得

$$J_\infty(t_1u_0) < 0.$$

注3.1 设

$$\gamma_0(t) = f^{-1}(tt_1u_0), \quad t \in [0, 1]$$

则

$$\Phi_\infty(\gamma_0(t)) = J_\infty(tt_1u_0) \leq J_\infty(t_0u_0) = J_\infty(\frac{t_0}{t_1} \cdot t_1u_0) = \Phi_\infty(\gamma_0(\frac{t_0}{t_1}))$$

得到

$$\begin{aligned} c_\infty &= inf_{\gamma\in\Gamma} sup_{t\in[0,1]}\Phi_\infty(\gamma(t)) \leq sup_{t\in[0,1]}\Phi_\infty(\gamma_0(t)) \\ &= \Phi_\infty(\gamma_0(\frac{t}{t_1})) = J_\infty(t_0u_0). \end{aligned}$$

引理3.9 $c_\infty \leq \Phi_\infty(w)$, 存在某个 $\gamma_0(t) \in \Gamma$，使得对某个 t_0 有 $\gamma_0(t_0) = w$.

证明. 由引理3.10 [1]，存在$t_1 > t_0 > 0$, 使得$J_\infty(t_0u_0) > J_\infty(tu_0)$, $\forall t \in [0, +\infty) \setminus \{t_0\}$, 并且$J_\infty(t_1u_0) < 0$, $u_0 = f(w)$, 由引理3.10 [1], 有$h(t) = a + bt^2 - ct^{2p-2}, \forall t \geq 0$, 和$a = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_0|^2 + V_\infty u_0^2 > 0$, $b = \int_{\mathbb{R}^3}(4u_0^2|\nabla u_0|^2 + \phi_u(x)u_0^2) > 0$, $c = \int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |u_0^+|^p)|u_0^+|^p > 0$. w 是当 $V(x) = V_\infty$ 时方程 (1.5) 的弱解, 因此 u_0 是当 $V(x) = V_\infty$ 时方程 (1.1) 的弱解, 我们有

$$a + b - c = \langle J'_\infty(u_0), u_0\rangle = 0$$

再一次用引理 3.8，存在唯一一个 $t_0 > 0$，使得 $h(t_0) = a + bt_0^2 - ct_0^{2p-2}$，我们得到 $t_0 = 1$，由注 3.1，设$\gamma_0(t) = f^{-1}(tt_1u_0), \forall t \in [0, 1]$, 那么

$$\Phi_\infty(\gamma_0(t)) = J_\infty(tt_1u_0) \leq J_\infty(u_0) = J_\infty(\frac{1}{t_1} \cdot t_1u_0) = \Phi_\infty(\gamma_0(\frac{1}{t_1})), \forall t \in [0, 1]$$

因此

$$c_\infty = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \Phi_\infty(\gamma(t)) \leq \sup_{t\in[0,1]} \Phi_\infty(\gamma(t)) = \Phi_\infty(\gamma_0(\frac{1}{t_1})) = \Phi_\infty(w)$$

引理3.10 $c_\infty = \Phi_\infty(w)$

证明. 由之前的引理, $w \neq 0$，并且 $\Phi_\infty(w_n) \to c_\infty$， $(1 + \|w_n\|)\|\Phi^{'}_\infty(w_n)\| \to 0, (n \to \infty)$，在

$L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ($q \in [2,6)$)中, 有 $w_n \rightharpoonup w$, 并且 $w_n(x) \to w(x)$ 几乎处处于 $x \in \mathbb{R}^3$, 我们有

$$
\begin{aligned}
c_\infty \le & \Phi_\infty(w) - \frac{1}{p}\langle \Phi'_\infty(w), w\rangle \\
= & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla w|^2 + V_\infty f^2(w)) + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(w)}(x)f^2(w) - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(w^+)|^p)|f(w^+)|^p \\
& - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty f(w)f'(w)w - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(w)}(x)f(w)f'(w)w \\
& + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(w^+)|^p)|f(w^+)|^{p-1}f'(w^+)w^+ \\
= & (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}V_\infty f(w)(\frac{1}{2}f(w) - \frac{1}{p}f'(w)w) \\
& + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(w^+)|^p)|f(w^+)|^{p-1}(f'(w^+)w^+ - \frac{1}{2}|f(w^+|) \\
& + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{f(w)}(x)f(w)(\frac{1}{4}f(w) - \frac{1}{p}f'(w)w)
\end{aligned}
$$

设 $I_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w_n|^2$, 那么 $I_1 \ge 0$, $I_2 = V_\infty f(w_n)(\frac{1}{2}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n)$, $I_3 = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^{p-1}(f'(w_n^+)w_n^+ - \frac{1}{2}|f(w_n^+|)$, $I_4 = \phi_{f(w_n)}(x)f(w_n)(\frac{1}{4}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n)$,
当 $w_n \ge 0$, $f(w_n) \ge 0$ 是, 由 (f_5) , 有

$$
\frac{1}{2}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n \ge 0
$$

当 $w_n < 0$ 时, $f(w_n) < 0$,由 (f_5) , 我们有

$$
\frac{1}{2}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n \le 0,
$$

因此得到 $I_2 \ge 0$. 由 (f_5)

$$
f'(w_n^+)w_n^+ - \frac{1}{2}|f(w_n^+)| \ge 0
$$

因此 $I_3 \ge 0$. 当 $w_n \ge 0$ 时, $f(w_n) \ge 0$, 有 (f_5)

$$
\frac{1}{4}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n \ge 0
$$

当 $w_n < 0$ 时, $f(w_n) < 0$, 由(f_5),

$$
\frac{1}{4}f(w_n) - \frac{1}{p}f'(w_n)w_n \le 0
$$

我们得到 $I_4 \ge 0$. 由 $Fatou's$ 引理, 有

$$
c_\infty \le \liminf_{n\to\infty}(\Phi_\infty(w_n) - \frac{1}{p}\langle \Phi'_\infty(w_n), w_n\rangle) = c_\infty
$$

又 w_n 是有界的 $Cerami$ 序列, 因此 $\Phi_\infty(w) = c_\infty$. 由引理 3.9 , 有

$$\gamma_0(\frac{1}{t_1}) = f^{-1}(\frac{1}{t_1} \cdot t_1 u_0) = f^{-1}(u) = w.$$

即 w 是山路点.

引理3.11

$$c_0 < c_\infty$$

证明. 由引理 3.8 和引理 3.9 , 有 $\Phi_\infty(w) = c_\infty$ 和 w 是山路点, 并且 $V(x) \le V_\infty$ 和 $V(x) \neq V_\infty$. 设 $\Phi(\gamma_0(t_1)) = \max_{0 \le t \le 1} \Phi(\gamma_0(t))$, 那么

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \le \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma_0(t)) = \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma_0(t)) \\ &= \Phi(\gamma_0(t_1)) < \Phi_\infty(\gamma_0(t_1)) \le \sup_{t \in [0,1]} \Phi_\infty(\gamma_0(t)) = \Phi_\infty(\gamma_0(t_0)) = \Phi_\infty(w) = c_\infty. \end{aligned}$$

因此, 由引理6.3 [9] , 当 $V(x) \neq V_\infty$ 时我们假设 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中水平 c_0 处的 $Cerami$ 序列 $\{w_n\}$, 即

$$\Phi(w_n) \to c_0 \quad and \quad (1 + \|w_n\|)\|\Phi^{'}(w_n)\| \to 0, \quad as \quad n \to \infty.$$

利用引理 3.3 , 序列 $\{w_n\}$ 是有界的. 因此, 在子列意义下, 有 $w_n \rightharpoonup w \in H^1(\mathbb{R}^3), w_n(x) \to w(x)$ 几乎处处于 $x \in \mathbb{R}^3$ 并且在 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ($q \in [2,6)$)中有 $w_n \to w$. 因此, 由引理 3.7 , 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 有 $\langle \Phi^{'}(w), \varphi \rangle = 0$, 即 w 是方程 (1.5) 的弱解. 我们必须证明 w 是非平凡的. (V) 成立, 利用反证法, 我们假设 $w \equiv 0$. 为了完成定理 1.1 的证明, 我们分成以下几个引理.

引理3.12 $\Phi_\infty(w_n) \to c_0$ 并且当 $n \to \infty$ 时 $(1 + \|w_n\|)\|\Phi^{'}_\infty(w_n)\| \to 0$.

证明. 我们知道 $\{w_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的, 存在 $M_1 > 0$ 使得 $M_1 > 2V_\infty$ 和 $M_1 > \int_{\mathbb{R}^3} f^2(w_n)$. 因为在 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ($q \in [2,6)$)中 $v_n \to v = 0$ 并且 $V(x) \le V_\infty := \lim_{|y| \to \infty} V(y) < \infty$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^3$. 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $M > 0$ 使得, 对 n 足够大, 有

$$0 \le V_\infty - V(x) < \frac{\epsilon}{2M_1}, \quad \forall |x| \ge M,$$

和

$$\int_{B_M(0)} |w_n|^2 < \frac{\epsilon}{4V_\infty}$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty f^2(w_n) - \int_{\mathbb{R}^3} V(x) f^2(w_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_M(0)} (V_\infty - V(x)) f^2(w_n) + \int_{B_M(0)} (V_\infty - V(x)) f^2(w_n) \\ &< M_1 \cdot \frac{\epsilon}{2M_1} + 2V_\infty \cdot \frac{\epsilon}{4V_\infty} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

并且

$$|\Phi_\infty(w_n) - \Phi(w_n)| = \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty f^2(w_n) - \int_{\mathbb{R}^3} V(x) f^2(w_n) \to 0.$$

当 $n \to \infty$. 同理,

$$\begin{aligned} \|\Phi'_\infty(w_n) - \Phi'(w_n)\| &= \sup_{\|\psi\|=1} |\langle \Phi'_\infty(w_n) - \Phi'(w_n), \psi\rangle| \\ &= \sup_{\|\psi\|=1} |\int_{\mathbb{R}^3} (V_\infty - V(x)) f(w_n) f'(w_n)\psi| \to 0 \end{aligned}$$

当 $n \to +\infty$.

得到 $\{w_n\}$ 也是 Φ_∞ 在水平 c_0 处的 $Cerami$ 序列.

引理3.13 $c_\infty \le c_0$.

证明. 由引理 3.5 有$A := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |f(w_n)|^2 > 0$. 并且

$$\langle \Phi'_\infty(w_n), \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\rangle = o_n(1).$$

在子列意义下, 当 n 足够大时, 得到

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} V_\infty A \\ &\le V_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |f(w_n)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |f(w_n)|^2 \\ &\le \langle \Phi'(w_n), \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\rangle + \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^p \\ &= o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^p \end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^p \ge \frac{1}{3} V_\infty A > 0$$

当 n 足够大. 利用 $\langle \Phi'_\infty(w_n), \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\rangle = o_n(1)$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \Phi'_\infty(w_n), \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)})|\nabla w_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty f^2(w_n) + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{f(w_n)}(x) f^2(w_n) \\ - \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^p = o_n(1). \end{aligned}$$

设 $u_n := f(w_n)$. 得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}(1+4u_n^2)|\nabla u_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u_n^2+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}(x)u_n^2-\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|u_n^+|^p)|u_n^+|^p=o_n(1)$$

设 $a_n := \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u_n^2$, $b_n := \int_{\mathbb{R}^3}(4u_n^2|\nabla u_n|^2+\phi_{u_n}(x)u_n^2)$, $c_n := \int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|u_n^+|^p)|u_n^+|^p$. 那么

$$a_n+b_n-c_n=o_n(1).$$

此外, 因为 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是有界的. 因此, 在子列意义下, 我们假设存在 $a,b,c\in[0,+\infty)$ 使得当 $n\to+\infty$ 时 $a_n\to a, b_n\to b, c_n\to c$ 并且 $a+b-c=0$. 另外, 对 n 足够大, 我们有

$$c_n=\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|u_n^+|^p)|u_n^+|^p=\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha*|f(w_n^+)|^p)|f(w_n^+)|^p\geq\frac{1}{3}V_\infty A>0.$$

$$a_n=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2+\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u_n^2\geq\int_{\mathbb{R}^3}V_\infty u_n^2\geq\frac{1}{2}V_\infty A>0.$$

得到 $a>0, c>0$. 由引理3.10 [1] 存在唯一一个序列 $\{t_n\}\subset(0,+\infty)$ 使得 $a_n+b_nt_n^2-c_nt_n^{2p-2}=0$. 因为 $c>0$, $\{t_n\}$ 是有界的. 我们假设存在 $t\geq0$ 使得 $t_n\to t$. 那么 $a+bt^2-ct^{2p-2}=0$. 因为 $a+b-c=0$, 由引理3.11 [1] , 得到 $t=1$. 由引理 3.8 ,

$$J_\infty(t_nu_n)>J_\infty(tu_n),\quad\forall\, t\in[0,+\infty)\backslash\{t_n\}$$

由注 3.1 , 有 $c_\infty\leq J_\infty(t_nu_n)$. 另外,

$$\begin{aligned}J_\infty(t_nu_n)-\Phi_\infty(v_n)&=J_\infty(t_nu_n)-J_\infty(u_n)\\&=\frac{1}{2}a_n(t_n^2-1)+\frac{1}{4}b_n(t_n^4-1)-\frac{1}{2p}c_n(t_n^{2p}-1)=o_n(1).\end{aligned}$$

因此

$$c_\infty\leq J_\infty(t_nu_n)=\Phi_\infty(w_n)+o_n(1).$$

所以

$$c_\infty\leq c_0.$$

由引理 3.11 和引理 3.13 , 我们得到矛盾. 说明 w 是非平凡的, 因此 w 是方程 (7) 的一个非平凡解. 证毕.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11961081)。

参考文献

[1] Chen, S.X. and Wu, X. (2019) Existence of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations of Choquard Type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **475**, 1754-1777. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.03.051

[2] Colin, M. and Jeanjean, L. (2004) Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equations: A Dual Approach. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **56**, 213-226. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.008

[3] Fang, X. and Szulkin, A. (2013) Multiple Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **254**, 2015-2032. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.11.017

[4] Zhong, C., Fan, X. and Chen, W. (1998) Introduction of Non-Linear Functional Analysis. Lanzhou University Publishing House, Lanzhou.

[5] Bezerrado Ó, J.M., Miyagaki, O.H. and Soares, S.H.M. (2010) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations with Critical Growth. *Journal of Differential Equations*, **248**, 722-744. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.11.030

[6] Chen, Y. and Wu, X. (2013) Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations via the Dual-Perturbation. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 256324. https://doi.org/10.1155/2013/256324

[7] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2013) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 153-184. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.04.007

[8] Chen, S. and Tang, X. (2019) Ground State Solutions of Schrödinger-Poisson Systems with Variable Potential and Convolution Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **473**, 87-111. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.037

[9] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2015) Existence of Groundstates for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6557-6579. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06289-2