Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 252-256
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122029

Hans汉斯

极大算子在加权λ-中心Morrey空间上的加权估计

杨雨荷[1,2*]，李巧霞[1,2]，辛　珍[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年1月3日；录用日期：2022年2月3日；发布日期：2022年2月10日

摘　要

利用权不等式及实变方法，得到了带粗糙核极大算子在加权λ-中心Morrey空间上的有界性。

关键词

加权λ-中心Morrey空间，极大算子，粗糙核

Weighted Estimates of Maximal Operator on Weighted λ-Central Morrey Spaces

Yuhe Yang[1,2*], Qiaoxia Li[1,2], Zhen Xin[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Jan. 3rd, 2022; accepted: Feb. 3rd, 2022; published: Feb. 10th, 2022

Abstract

By applying the weighted inequalities and the real variable methods, the boundedness of the maximal operator with rough kernel is obtained in the weighted λ-central Morrey spaces.

Keywords

Weighted λ-Central Morrey Space, Maximal Operator, Rough Kernel

*通讯作者。

文章引用：杨雨荷，李巧霞，辛珍．极大算子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计[J]．理论数学，2022，12(2): 252-256. DOI: 10.12677/pm.2022.122029

1. 引言及主要结果

作为经典的 Morrey 空间，它在调和分析和偏微分方程等领域有着广泛的应用，同时也可作为 Lebesgue 空间的一种自然推广[1]。文献[2]在研究中心 BMO 空间和 Morrey 空间的关系时，引入了 λ-中心 Morrey 空间。一些经典算子在 λ-中心 Morrey 空间有界性结果的研究可参见[3] [4] [5] [6]。随后，文献[7]中引入了加权 λ-中心 Morrey 空间并得到了分数次积分算子的有界性。文献[8]中研究了奇异积分及其交换子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。文献[9]中得到了 Marcinkiewicz 积分及其交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计。

受上面研究的启发，本文将研究带粗糙核的极大算子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计。在叙述本文主要结果之前，需要引入下面的概念和记号。

设 $0 \le \partial < n$， $f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$，带粗糙核的极大算子的定义为

$$M_\Omega(f)(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\Omega(x-y)\right|\left|f(y)\right| \mathrm{d}y \tag{1}$$

记 $Q(x,r)$ 为 R^n 中以 x 为中心，边长为 r，且边与坐标轴平行的方体。这里上确界取遍所有边平行坐标轴的方体 $Q \subset R^n$， $|Q|$ 表示 Q 的 Lebesgue 测度。

本文将证明粗糙核极大算子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。

设 $1 < p,q < \infty$， R^n 上的非负局部可积函数 $\omega(x)$ 称为 $A(p,q)$ 权，如果存在常数 $C > 0$，使得下式成立

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-p'} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \le C, \tag{2}$$

上式中的最小常数 C 用 $[\omega]_{A(p,q)}$ 表示。

定义 [7] [8]设 $\lambda \in R$， $1 < q < \infty$， ω_1 和 ω_2 为局部可积的非负可测函数，加权 λ-中心 Morrey 空间定义为

$$\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}\left(R^n\right) = \left\{ f : \|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}} = \sup_{r>0}\left(\frac{1}{\omega_1\left(B(0,r)\right)^{1+\lambda q}}\int_{B(0,r)} \left|f(x)\right|^q \omega_2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}, \tag{3}$$

其中，$B(0,r)$ 表示 R^n 中以原点为中心，r 为半径的球，并且当 $\omega_1 = \omega_2 := \omega$ 时，简记 $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}\left(R^n\right) = \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(R^n\right)$。

本文的主要定理如下。

定理设 $1 < t < \infty$， $\Omega \in L^t\left(S^{n-1}\right)$， M_Ω 由(1)式所定义，那么当 $\omega(x) \in A_{\frac{p}{t'}}$， $p > t'$ 时，存在一个与 f 无关的常数 C，使得

$$\left\|M_\Omega(f)\right\|_{\dot{B}^{p,\lambda}_{\omega}} \le C\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}_{\omega}},$$

全文中， p' 表示 p 的对偶指标，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$。$C$ 是不依赖于主要函数或者参量的常数，在不同行

中甚至在同一行中可以不同。用 $\omega \in \Delta_2$ 表示满足双倍条件的权函数 ω 构成的集合，即存在常数 $C > 0$，使得对任意方体 $Q \subset R^n$，成立 $\omega(2Q) \le C\omega(Q)$。

2. 定理的证明

在证明定理之前，先给出下面的引理。

引理 1 [8]如果 $\omega \in A_q(1 \le q < \infty)$，则对任意的 $k \in Z^+, l < 0$，以及方体 $B \subset R^n$，有

$$\omega(2^k B)^l \le D_1^{kl} \omega(B)^l,$$

其中，$1 < D_1 < 2$。

引理 2 [10]假设给定一个零阶齐次函数 $\Omega(x')$ 在单位球面上的均值为零，$\Omega \in L^s(S^{n-1})(1 < s < \infty)$。如果 $\omega(x) \in A_{\frac{p}{s'}}, s' \le p < \infty$。那么 M_Ω 在 $L^p(R^n)$ 空间上是有界的。

引理 3 [11]如果 $\omega \in A_p, 1 \le p < \infty$，则 $\omega \in \Delta_2$。对所有的 $\partial > 1$，均有

$$\omega(\partial Q) \le \partial^{nq} [\omega]_{A_p} \omega(Q)。$$

定理的证明 设 $f \in \dot{B}_\omega^{p,\lambda}$，给定任意球 $B = B(0, r)$，$r = \sqrt{n} l(Q)$，分解 f 为 $f = f_1 + f_2$，其中 $f_1 = f_{\chi 2B}$，则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \int_B |M_\Omega(f)(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \int_B |M_\Omega(f_1)(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \int_B |M_\Omega(f_2)(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \\ &:= I + II \end{aligned}$$

对 I，由引理 2，有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \int_B |M_\Omega(f_1)(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \\ &\le \frac{C}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \int_{2B} |f(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x \\ &\le C \|f\|_{\dot{B}_\omega^{p,\lambda}}^p \frac{\omega(2B)^{1+\lambda p}}{\omega(B)^{1+\lambda p}} \end{aligned}$$

当 $1 + \lambda p \ge 0$ 时，由引理 3 可得

$$I \le C \|f\|_{\dot{B}_\omega^{p,\lambda}}^p。 \tag{4}$$

当 $1 + \lambda p < 0$ 时，由引理 1 可得(4)成立。

下面估计 II，当 $x \in B, y \in 2^{j+1} B$ 和 $j \in Z^+$ 时，有

$$\begin{aligned} M_\Omega(f_2) &\le \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap B^c_{(0,2r)}} |\Omega(x-y)| |f(y)| \mathrm{d}y \\ &\le C \frac{1}{|B|} \int_{2^j r < |y| \le 2^{j+1} r} |\Omega(x-y)| |f(y)| \mathrm{d}y \\ &\le C \frac{1}{|B|} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j+1} B} |\Omega(x-y)| |f(y)| \mathrm{d}y \end{aligned}$$

当 $x \in B, y \in 2^{j+1} B \setminus 2^j B (j \ge 1)$ 时，得到 $2^{j-1} r_B \le |y - x| < 2^{j+1} r_B$。

因此，

$$\left(\int_{2^{j+1}B}\left|\Omega(x-y)\right|^t \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{t}} \le C\left|2^{j+1}B\right|^{\frac{1}{t}} \tag{5}$$

设 $\frac{1}{s}=\frac{1}{t'}-\frac{1}{p}$，由 Hölder 不等式和 $\omega \in A_{\frac{p}{r'}}, t' \le p < \infty$，有

$$\begin{aligned}
M_\Omega(f_2) &\le C\frac{1}{|B|}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B}\left|\Omega(x-y)\right|\left|f(y)\right|\mathrm{d}y \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left|2^{j+1}B\right|}\left(\int_{2^{j+1}B}\left|f(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{2^{j+1}B}\left|\Omega(x-y)\right|^t \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{s}{p}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}B}\left(\int_{2^{j+1}B}\left|f(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left|2^{j+1}B\right|^{\frac{1}{t}}\left(\frac{\left|2^{j+1}B\right|^{\frac{p}{t'}}}{\omega\left(2^{j+1}B\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega\left(2^{j+1}B\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{2^{j+1}B}\frac{1}{\omega\left(2^{j+1}B\right)^{1+\lambda p}}\left|f(y)\right|^p \omega(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\times\omega\left(2^{j+1}B\right)^{(1+\lambda p)\frac{1}{p}} \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\|f\|_{\dot{B}_{\omega}^{p,\lambda}}\omega\left(2^{j+1}B\right)^{\lambda}
\end{aligned}$$

由于 $\lambda<0$ 和引理 1，有

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{\omega(B)^{1+\lambda p}}\int_B\left|M_\Omega\left(f_2(x)\right)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x \\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega\left(2^{j+1}B\right)^{\lambda p}}{\omega(B)^{\lambda p}}\|f\|_{\dot{B}_{\omega}^{p,\lambda}}^p \\
&\le C\|f\|_{\dot{B}_{\omega}^{p,\lambda}}^p
\end{aligned} \tag{6}$$

结合(4)和(6)式的估计，定理证毕。

基金项目

伊犁师范大学校级项目(2021YSYB073)。

参考文献

[1] Morrey, C. (1938) On Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[2] Alvarez, J., Guzman-Partida, M. and Lakey, J. (2000) Spaces of Bounded λ-Central Mean Oscillation. Morrey Spaces, and λ-Central Carleson Measuers. *Collectanea Mathematica*, **51**, 1-48.

[3] Vakhtang, K. and Alexander, M. (2007) Weighted Criteria for Generalized Fractional Maximal Functions and Potentials in Lebesgue Spaces with Variable Exponent. *Integral Transforms and Special Functions*, **18**, 609-628. https://doi.org/10.1080/10652460701445344

[4] Tao, X.X. and Shi, Y.L. (2011) Multilinear Commutators of Calderon-Zygmumd Operator on λ-Central Morrey Spaces. *Advances in Mathematics*, **40**, 47-59.

[5] Yu, X. and Tao, X.X. (2013) Boundedness for a Class of Generalized Commutators on λ-Central Morrey Spaces. *Acta Mathematica Sinica English Series*, **29**, 1917-1926. https://doi.org/10.1007/s10114-013-2174-4

[6] 陶双平，高荣. 多线性分数次积分和极大算子在 Morrey 空间上的加权估计[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 30-37.

[7] 赵凯，董鹏娟，邵帅. 分数次积分算子交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(12): 88-92.

[8] Yu, X., Zhang, H.H. and Zhao, G.P. (2016) Weighted Boundedness of Some Integral Operators on Weighted λ-Central Morrey Spaces. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **31**, 331-342. https://doi.org/10.1007/s11766-016-3348-5

[9] 陶双平，陈转转. Marcinkiewicz 积分及其交换子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的加权有界性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(4): 1-8.

[10] Duoandikoetxea, J. (1993) Weighted Norm Inequalities for Homogeneous Singular Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **336**, 869-880. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1089418-5

[11] Grafakos, L. (2008) Classical and Modern Fourier Analysis. Prentice Hall, New York, 279-291. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09432-8_3