Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1223-1230
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127134

带乘性噪声的时滞随机Kuramoto-Sivashinsky方程吸引子的存在

徐智恒[1]，刁玉存[2]

[1]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊犁
[2]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊犁

收稿日期：2022年6月18日；录用日期：2022年7月20日；发布日期：2022年7月27日

摘 要

本文研究了带有乘性噪声的非自治随机时滞Kuramoto-Sivashinsky方程解的长时间行为。通过对解的一致估计，结合随机吸引子的存在性定理，证明了由该方程$C\left(\left[-\rho,0\right],L^2\left(I\right)\right)$所生成的随机动力系统吸引子的存在性。

关键词

时滞随机Kuramoto-Sivashinsky方程，随机吸引子，渐近紧性，乘性噪声

Pullback Attractors for Delay Non-Autonomous Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Equation with Multiplicative Noise

Zhiheng Xu[1], Yucun Diao[2]

[1]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yili Xinjiang
[2]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili Xinjiang

Received: Jun. 18th, 2022; accepted: Jul. 20th, 2022; published: Jul. 27th, 2022

Abstract

In this paper, we study the long time behavior of delay non-autonomous stochastic Kuramoto-

文章引用：徐智恒，刁玉存．带乘性噪声的时滞随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程吸引子的存在[J]．理论数学，2022, 12(7): 1223-1230. DOI: 10.12677/pm.2022.127134

Sivashinsky equation with multiplicative noise. We prove the existence of pullback attractors in the space $C\left(\left[-\rho,0\right],L^2\left(I\right)\right)$ for the dynamical system generated by the equation above, by some uniform estimation, together with the existence theorem of pullback attractors.

Keywords

Delay Non-Autonomous Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Equation, Pullback Attractors, Asymptotic Compactness, Multiplicative Noise

1. 引言

D-拉回随机吸引子最早是由[1] [2]提出。其中[1]探讨了时滞随机抛物方程的拉回吸引子的存在性及其上半连续性，并为拉回吸引子的存在性提供了充分条件。[2]提供了充要条件。本文则是在文献[3] [4] [5]的基础上，讨论了带乘法噪声的时滞非自治随机 Kuramoto-Sivanshinsky 方程的拉回吸引子。

考虑如下带有时滞的非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程(1)的初边值问题：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}u+\left(\alpha D^4u+D^2u+uDu\right)\mathrm{d}t=\left(f\left(t,x\right)+g\left(u\left(t-\rho\right),x\right)\right)\mathrm{d}t+u\mathrm{d}W,t>\tau,x\in I\\
&u\left(\tau+\sigma,x\right)=u_\tau\left(\sigma,x\right)=\varphi\left(\sigma,x\right)\\
&D^iu\left(t,\frac{-l}{2}\right)=D^iu\left(t,\frac{l}{2}\right),i=0,1,2,3\\
&\int_I u\left(t,x\right)\mathrm{d}x=0,\forall t\in R
\end{aligned}$$

其中 f 是非线性项，g 是时滞项，W 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的双边实值 Wiener 过程。$\rho>0$ 是系统的时滞，常数 α 满足

$$\alpha>\frac{l^2}{4\pi^2}$$

2. 连续随机动力系统

本节讨论了由方程(1)时滞随机 Kuramoto-Sivanshinsky 方程所生成的连续随机动力系统。

首先做一些书写符号上的约定。用 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 分别表示 $L^2(I)$ 空间上的范数和内积，$\|\cdot\|_{H_\rho}$ 表示空间 H_ρ 上的范数。

对外力项 f 与时滞项 g 做如下假设：

H1. $\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\beta(r-\tau)}\left|f\left(r\right)\right|\mathrm{d}r,\forall\beta>0,\tau\in R$

H2. $g\left(0,x\right)=0,\forall x\in I;\left|g\left(s_1,x\right)-g\left(s_2,x\right)\right|\le L_g\left|s_1-s_2\right|,\forall x\in I$

令 $v\left(t,\tau,\omega,\phi\right)=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}u\left(t,\tau,\omega,\varphi\right)$

则 $u\left(t,\tau,\omega,\phi\right)=\mathrm{e}^{z(\theta_t\omega)}v\left(t,\tau,\omega,\varphi\right)$

其中 $z\left(\theta_t\omega\right)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{r}\theta_t\omega\left(r\right)\mathrm{d}r$

由于 $\frac{1}{2}u^2\mathrm{d}t+u\mathrm{d}W=u\circ W$，这里“$\circ$”表示 Strotnnovitch 积分，则代入可得(2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha D^4 v+D^2 v+e^{z(\theta_t\omega)}vDv=e^{-z(\theta_t\omega)}f(t,x)+e^{-z(\theta_t\omega)}g\left(e^{z(\theta_{t-\rho}\omega)}v(t-\rho),x\right)+z(\theta_t\omega)v\\
&v(\tau+\sigma,x)=\phi(\sigma,x),\sigma\in[-\rho,0]\\
&D^i v\left(t,\frac{-l}{2}\right)=D^i v\left(t,\frac{l}{2}\right),i=0,1,2,3\\
&\int_I v(t,x)\mathrm{d}x=0,\forall t\in R
\end{aligned}
$$

由 Galerkin 逼近法(见参考文献[6])，通过假设 H_1，H_2 可得对任意 $\tau\in R,\omega\in\Omega,\phi\in C\left([-\rho,0],L^2(I)\right)$，方程(2)存在唯一解 $v(\cdot,\tau,\omega,\phi)$。因此可以定义一连续随机动力系统[1]。

$$
\Phi(t,\tau,\omega,\phi)(\cdot)=u_{t+\tau}(\cdot,\tau,\theta_{-\tau}\omega,\phi)
$$

且存在正常数 η 使得

$$
\alpha\left\|D^2 v\right\|^2-\|Dv\|^2\geq\eta\left(\left\|D^2 v\right\|^2+\|v\|^2\right),\forall v\in H_{per}^2(I)
$$

定义随机变量

$$
\gamma(\omega)=\eta-2|z(\omega)|-e^{\frac{1}{2}\eta\rho}L_g\left(e^{2z(\omega)}+e^{-2z(\omega)}\right)
$$

$$
\gamma^*(\omega)=\eta-2E(|z|)-e^{\frac{1}{2}\eta\rho}L_g\left[E\left(e^{2z}\right)+E\left(e^{-2z}\right)\right]
$$

则由遍历定理可得

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\gamma(\theta_r\omega)=E(r)=\gamma^*
$$

存在 Ω 的不变子集使得

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{z(\theta_t\omega)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_r\omega)=0
$$

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t|z(\theta_r\omega)|\mathrm{d}r=E(|z|)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}
$$

若集合 D 满足

$$
\lim_{t\to+\infty}e^{-rt}\sup_{s\leq\tau}\left\|\mathcal{D}(s-t,\theta_{-\tau}\omega)\right\|^2=0,\forall r,\tau\in R,\omega\in\Omega
$$

则称 D 为后项缓增集。

3. 一致估计

为得到随机动力系统拉回吸收集的存在性，首先在空间 $C\left([-\rho,0],L^2(I)\right)$ 上进行估计。有如下引理

引理 1 若假设 H_1，H_2 成立，则存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得当 $t>T$ 时，有

$$
\left\|v(\tau+\sigma,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\phi)\right\|^2\leq R(\tau,\omega)+c\int_{-\infty}^0 e^{\int_0^r r(\theta_l\omega)\mathrm{d}l}e^{-2z(\theta_r\omega)}\left\|f(r+\tau)\right\|^2\mathrm{d}r
$$

$$
\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|D^2 v(r)\right\|^2\mathrm{d}r\leq C(\omega)\left(R(\tau,\omega)+M(\tau)\right)
$$

其中 $R(\tau,\omega)$ 与 $M(\tau)$ 由如下(3)式定义

$$
R(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^0 e^{\int_0^r r(\theta_l\omega)\mathrm{d}l}e^{-2z(\theta_r\omega)}\left\|f(r+\tau)\right\|^2\mathrm{d}r
$$

$$
M(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{\eta(r-\tau)}\left\|f(r)\right\|^2\mathrm{d}r
$$

证明：将(2)与 $v(r,\tau-t,\theta-\tau\omega,\phi)$ 在空间 $L^2(I)$ 上做内积，并注意到 $(vDv,v)=0$，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v(r)\|^2+\alpha\|D^2v(r)\|^2-\|Dv(r)\|^2$$
$$=\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}(f(r),v)+\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}v(r-\rho)\right),v\right)+z(\theta_{r-\tau}\omega)\|v(r)\|^2$$

由 Young 不等式

$$\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}(f(r),v)\le\frac{\eta}{2}\|v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2$$

代入并整理，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v(r)\|^2+2\eta\|D^2v(r)\|^2+\eta\|v(r)\|^2\le2\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}$$
$$\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}v(r-\rho)\right),v\right)+2z(\theta_{r-\tau}\omega)\|v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2$$

不等式左右两端同乘 $\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}>0$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\|v(r)\|^2\le2\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}v(r-\rho)\right),v\right)$$
$$+\left(2z(\theta_{r-\tau}\omega)\|v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2\right)\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}$$

在区间 $[\tau-t,\tau+\sigma],\sigma\in[-2\rho-2,0]$ 上积分，可得

$$\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\|v(\tau+\sigma)\|^2$$
$$\le2\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}v(r-\rho)\right),v\right)\mathrm{d}r$$
$$+\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\left(2z(\theta_{r-\tau}\omega)\|v(r)\|^2\mathrm{d}r+c\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2\right)+\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{d}r+\|\phi\|_{H_\rho}^2$$

其中

$$2\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(v(r-\rho)\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\right),v\right)\mathrm{d}r$$
$$\le\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}\rho}L_g\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$+\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}\rho}\frac{1}{L_g}\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\left\|g(v(r-\rho))\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\right\|^2\mathrm{d}r$$
$$\le\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}\rho}L_g\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$+L_g\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}\rho}\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r-\rho}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{\int_{r-\rho}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}\|v(r-\rho)\|^2\mathrm{d}r$$
$$\le\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}\rho}L_g\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$+L_g\mathrm{e}^{\frac{n}{2}\rho}\int_{\tau-t-\rho}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\rho}\omega)}\|v(r-\rho)\|^2\mathrm{d}r$$
$$\le\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}\rho}L_g\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$+L_g\mathrm{e}^{\frac{n}{2}\rho}\int_{\tau-t-\rho}^{\tau+\sigma}\mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{r}r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\rho}\omega)}\|\phi\|_{H_\rho}^2\mathrm{d}r$$

由 $\gamma(\omega)$ 的定义，可知

$$2z(\theta_{r-\tau}\omega)-\eta+r(\theta_{l-\tau}\omega)+L_g e^{\frac{n}{2}\rho}\left(e^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}+e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\right)\le 0$$

上述不等式左右两端同时除以 $e^{\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}>0$，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|v(\tau+\sigma,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\phi)\right\|^2\\
&\le c\left(\int_{\tau-t-\rho}^{\tau-t} e^{\int_{\tau+\sigma}^{r} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l} e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{d}r+e^{-\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\right)\|\phi\|_{H_\rho}^2\\
&\quad+c\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} e^{\int_{\tau+\sigma}^{r} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l} e^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|f(r)\right\|^2\mathrm{d}r\\
&= c\left(\int_{\tau-t-\rho}^{\tau-t} e^{\int_{\sigma}^{r-\tau} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l} e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{d}r+e^{-\int_{-t}^{\sigma} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l}\right)\|\phi\|_{H_\rho}^2\\
&\quad+c\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} e^{\int_{\sigma}^{r-\tau} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l} e^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|f(r)\right\|^2\mathrm{d}r\\
&\le c\left(\int_{-t-\rho}^{-t} e^{\int_{0}^{r} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l} e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{d}r+e^{-\int_{-t}^{0} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l}\right)\|\phi\|_{H_\rho}^2\\
&\quad+c\int_{-\infty}^{0} e^{\int_{0}^{r} r(\theta_{l}\omega)\mathrm{d}l} e^{-2z(\theta_{r}\omega)}\left\|f(r+\tau)\right\|^2\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

当 $t\to\infty$ 时

$$c\left(\int_{\tau-t-\rho}^{\tau-t} e^{\int_{\tau+\sigma}^{r} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l} e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{d}r+e^{-\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\right)\|\phi\|_{H_\rho}^2\to 0$$

故存在 $T>0$，使得当 $t>T$ 时，成立

$$c\left(\int_{\tau-t-\rho}^{\tau-t} e^{\int_{\tau+\sigma}^{r} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l} e^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{d}r+e^{-\int_{\tau-t}^{\tau+\sigma} r(\theta_{l-\tau}\omega)\mathrm{d}l}\right)\|\phi\|_{H_\rho}^2\le R(\tau,\omega)$$

从而

$$\sup_{\sigma\in[-2\rho-2,0]}\left\|v(\tau+\sigma,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\phi)\right\|^2\le R(\tau,\omega)$$

又由

$$\begin{aligned}
\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|D^2v(r)\right\|^2\mathrm{d}r\le c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left(g\left(v(r-\rho)e^{z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\right),v\right)\mathrm{d}r+c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|f(r)\right\|^2\mathrm{d}r\\
+c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|v(r)\right\|^2\mathrm{d}r+\left\|v(\tau-\rho-2)\right\|^2
\end{aligned}$$

对不等式右端第一项进行放缩

$$\begin{aligned}
&c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left(g\left(v(r-\rho)e^{z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\right),v\right)\mathrm{d}r\\
&\le\frac{1}{2}\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}L_g^2e^{2z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\left\|v(r-\rho)\right\|^2\mathrm{d}r+\frac{1}{2}\int_{\tau-\rho-r}^{\tau}\left\|v(r)\right\|^2\mathrm{d}r\\
&\le c(\omega)\sup_{\sigma\in[-2\rho-2,0]}\left\|v(\tau+\sigma)\right\|^2(\rho+2)+\frac{1}{2}(\rho+2)\sup_{\sigma\in[-\rho-2,0]}\left\|v(r)\right\|^2\\
&\le cR(\tau,\omega)
\end{aligned}$$

对不等式右端第二项进行放缩

$$c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\|f(r)\|^2\mathrm{d}r\le \mathrm{e}^{\eta(\rho+2)}\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\mathrm{e}^{\eta(r-\tau)}\|f(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$\le \mathrm{e}^{\eta(\rho+2)}\int_{-\infty}^{\tau}\|f(r)\|^2\mathrm{d}r$$
$$=\mathrm{e}^{\eta(\rho+2)}M(\tau)$$

同理对不等式右端第二项进行放缩

$$\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\|v(r)\|^2\mathrm{d}r+\|v(\tau-\rho-2)\|^2$$
$$\le(\rho+2)\sup_{\sigma\in[-\rho-2,0]}\|v(\tau+\sigma)\|^2+\|v(\tau-\rho-2)\|^2\le cR(\tau,\omega)$$

于是

$$\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\|D^2v(r)\|^2\mathrm{d}r\le c(\omega)\big(R(\tau,\omega)+M(\tau)\big)$$

此即为所证。

下将在空间 $H_0^1(I)$ 进行估计，再由 $H_0^1(I)$ 紧嵌入 $L^2(I)$，得到随机动力系统在空间 $L^2(I)$ 上的渐近紧性(见参考文献[7])。

引理 2 若假设 H_1，H_2 成立，则存在 $T>0$，使得当 $t>T$ 时，有

$$\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\|D^2v(r)\|^2\mathrm{d}r\le C(\omega)\big(1+R(\tau,\omega)\big)\big(R(\tau,\omega)+M(\tau)\big)$$

其中 $R(\tau,\omega)$ 与 $M(\tau)$ 由(3)定义。

证明：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|D^2v(r)\|^2+\alpha\|D^4v(r)\|^2+\left(D^2v,D^4\right)+\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(vDv,D^4v\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(f(r),D^4v\right)+\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(v(r-\rho)\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}\right),D^4v\right)+z(\theta_{r-\tau}\omega)\|D^2v(r)\|^2$$

由 Young 不等式，可得

$$-\left(D^2v,D^4\right)+\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(f(r),D^4v\right)\le\frac{\alpha}{6}\|D^4v(r)\|^2+c\|D^2v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2$$

由 Agmon 不等式，可得

$$\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(vDv,D^4v\right)\le\frac{\alpha}{6}\|D^4v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v\|^2\|D^2v(r)\|^2$$

由假设 H_2 可得

$$\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(g\left(v(r-\rho)\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}\right),D^4v\right)\le\frac{\alpha}{6}\|D^4v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\|v(r-\rho)\|^2$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|D^2v(r)\|^2+\gamma\|D^2v(r)\|^2\le c\|D^2v(r)\|^2+c\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v\|^2\|D^2v\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|f(r)\|^2$$
$$+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}c\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\|v(r-\rho)\|^2+cz(\theta_{r-\tau}\omega)\|D^2v(r)\|^2$$

将上式在 $r\in[s,\tau+\sigma],\sigma\in[-\rho-1,0],s\in[\tau+\sigma-1,\tau+\sigma]$ 上积分，

再在 $s\in[\tau+\sigma-1,\tau+\sigma]$ 上积分，可得

$$\left\|D^2v(\tau+\sigma)\right\|^2 \le c(\omega)\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left(\left\|D^2v(r)\right\|^2+\left\|v(r)\right\|^2\left\|D^2v(r)\right\|^2+\left\|f(r)\right\|^2+\left\|v(r-\rho)\right\|^2\right)\mathrm{d}r$$

注意到上述不等式右端第二项

$$\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|v(r)\right\|^2\left\|D^2v(r)\right\|^2\mathrm{d}r \le \sup_{\sigma\in[-\rho-2,0]}\left\|v(\sigma)\right\|^2\int_{\tau-\rho-2}^{\tau}\left\|D^2v(r)\right\|^2\mathrm{d}r$$

于是

$$\sup_{\sigma\in[-\rho-1,0]}\left\|D^2(\tau+\sigma)\right\|^2 \le C(\omega)\left(1+R(\tau,\omega)\right)\left(R(\tau,\omega)+M(\tau)\right)$$

在$[\tau-\rho-1,\tau]$上积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\left\|D^4v(r)\right\|^2\mathrm{d}r\\ &\le\left\|D^2(\tau-\rho-1)\right\|^2+c(\omega)\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\left(\left\|D^2v(r)\right\|^2+\left\|v(r)\right\|^2\left\|D^2v(r)\right\|^2+\left\|f(r)\right\|^2+\left\|v(r-\rho)\right\|^2\right)\mathrm{d}r\\ &\le C(\omega)\left(1+R(\tau,\omega)\right)\left(R(\tau,\omega)+M(\tau)\right)\end{aligned}$$

证毕。

引理 3 若假设 H_1，H_2 成立，则有

$$\begin{aligned}\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2\mathrm{d}r &\le C(\omega)\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left(\left\|D^4v(r)\right\|^2+\left\|D^2v(r)\right\|^2+\left\|f(r)\right\|^2+c\left\|v(r)\right\|^2+\left\|v\right\|^2\left\|Dv\right\|^2+\left\|v(r-\rho)\right\|^2\right)\mathrm{d}r\\ &\le c(\omega)\left(1+R(\tau,\omega)\right)\left(R(\tau,\omega)+M(\tau)\right)\end{aligned}$$

其中$R(\tau,\omega)$与$M(\tau)$由(3)定义。

证明：将(2)式与$\frac{\partial}{\partial r}v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\phi)$在空间$L^2(I)$上作内积，有

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2+\alpha\left(D^4v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\left(D^2v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(vDv,\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\left(f(r),\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{t-\rho}\omega)}v(t-\rho)\right),\frac{\partial v}{\partial r}\right)+z(\theta_t\omega)\left(v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

由 Young 不等式

$$\begin{aligned}&-\gamma\left(D^4v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\left(D^2v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\mathrm{e}^{-z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(f(r),\frac{\partial v}{\partial r}\right)+z(\theta_t\omega)\left(v,\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &\le\frac{1}{6}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2+c\left\|D^4v(r)\right\|^2+c\left\|D^2v(r)\right\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|f(r)\right\|^2+c\left\|z(\theta_{r-\tau}\omega)v(r)\right\|^2\end{aligned}$$

由 Agmon 不等式

$$\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left(vDv,\frac{\partial v}{\partial r}\right)\le\frac{1}{6}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2+c\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|v\right\|^2\left\|D^2v\right\|^2$$

由假设 H_2

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\left(g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{t-\rho}\omega)}v(t-\rho)\right),\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &\le\frac{1}{6}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|g\left(\mathrm{e}^{z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}v(r-\rho)\right)\right\|^2\\ &\le\frac{1}{6}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}\left\|v(r-\rho)\right\|^2\end{aligned}$$

从而

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2 \le c\Big(\left\|D^4 v(r)\right\|^2+\left\|D^2 v(r)\right\|^2+\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\left\|f(r)\right\|^2+c\left\|z(\theta_{r-\tau}\omega)v(r)\right\|^2$$
$$+c\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v\|^2\|Dv\|^2+c\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)}\mathrm{e}^{2z(\theta_{r-\rho-\tau}\omega)}\left\|v(r-\rho)\right\|^2\Big)$$

积分

$$\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^2\mathrm{d}r \le C(\omega)\int_{\tau-\rho}^{\tau}\Big(\left\|D^4 v(r)\right\|^2+\left\|D^2 v(r)\right\|^2+\left\|f(r)\right\|^2+c\left\|v(r)\right\|^2+\|v\|^2\|Dv\|^2+\left\|v(r-\rho)\right\|^2\Big)\mathrm{d}r$$
$$\le C(\omega)\big(1+R(\tau,\omega)\big)\big(R(\tau,\omega)+M(\tau)\big)$$

证毕。

4. 随机吸引子

定理 1 假设 H_1，H_2 成立，则由(1)所生成的连续非自治随机动力系统 Φ 在空间 $C\left([-\rho,0],L^2(I)\right)$ 上存在拉回吸引子。

证明　由引理(1)，引理(2) (3)分别得出了在空间 $C\left([-\rho,0],L^2(I)\right)$ 上拉回吸收集的存在性，以及该随机动力系统的拉回渐近紧性，故该随机动力系统存在空间 $C\left([-\rho,0],L^2(I)\right)$ 上的拉回吸引子([1]，引理(2))。

参考文献

[1] Wang, X.H., Lu, K.N. and Wang, B.X. (2015) Random Attractors for Delay Parabolic Equations with Additive Noise and Deterministic Non-Autonomous Forcing. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **14**, 1018-1047. https://doi.org/10.1137/140991819

[2] Wang, B.X. (2012) Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems. *Journal of Differential Equations*, **253**, 1544-1583. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.05.015

[3] Tan, J. and Li, Y.R. (2011) Random Attractors of Kuramoto-Sivanshinsky with Multiplicative White Noise. *Journal of Southwest University*: *Natural Science Edition*, **33**, 121-125.

[4] 范红瑞, 王仁海, 李扬荣, 佘连兵. 非自治的的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的拉回吸引子的后项紧性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(3): 95-100.

[5] 吴柯楠, 王凤玲, 李扬荣. 非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程的 Wong-Zakai 逼近[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 35(4): 27-32.

[6] Temam, R. (1997) Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3

[7] Simon, J. (1986) Compact Sets in the Space L p (0,T;B). *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360