Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1333-1340
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128146

一类分数阶中立型发展方程Mild解的存在性

张 永[1,2]，胡芳芳[1,2*]，辛 珍[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年7月13日；录用日期：2022年8月12日；发布日期：2022年8月22日

摘 要

本文讨论了带有积分边界条件的非局部分数阶中立型发展方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}\left[x(t)-h(t,x)\right]=Ax(t)+f\left(t,x(t)\right),\ t\in[0,a], \\ x(0)=\int_0^a g\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

并通过非紧性测度估计方法，利用Sadovskii不动点定理，获得了mild解存在性的充分性条件。

关键词

分数阶中立型发展方程，非紧性测度条件，积分边界条件，Sadovskii不动点定理，存在性

Existence of Mild Solutions for a Class of Fractional Neutral Evolution Equations

Yong Zhang[1,2], Fangfang Hu[1,2*], Zhen Xin[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Jul. 13th, 2022; accepted: Aug. 12th, 2022; published: Aug. 22nd, 2022

Abstract

In this paper, we talk the nonlocal partial order neutral type evolution equation with integral boundary conditions, and obtain the adequacy conditions for the existence of mild solutions by non-compact measure estimation methods, using the Sadovskii fixed point theorem.

*通讯作者。

文章引用: 张永, 胡芳芳, 辛珍. 一类分数阶中立型发展方程 Mild 解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1333-1340.
DOI: 10.12677/pm.2022.128146

Keywords

Fractional Neutral Evolution Equations, Noncompactness Measure Condition, Integral Boundary Condition, Sadovskii Fixed Point, Existence

1. 引言

由于分数阶微分方程具有记忆效果，在某些问题中比整数阶微分方程能够更好地反映生活中的现象。除了在数学方面的应用外，它还在流体力学，分数控制系统与分数控制器，各种电子回路，电分析化学，生物系统的电传导等方面有广泛的应用[1]。因此，近年来分数阶微分方程问题引起了许多学者的关注，而分数阶中立型微分方程作为一类广泛应用的微分方程，对它的研究已经屡见不鲜了[2]-[8]。

周勇教授[8]运用 Krasnoselskii 不动点定理以及紧半群的理论，研究了下列分数阶中立型非局部问题

$$\begin{cases} D^q\left[x(t)-h(t,x_t)\right]+Ax(t)=f(t,x_t),\ t\in(0,a], \\ x_0(\vartheta)+\left(g\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)\right)(\vartheta)=\varphi(\vartheta),\ \vartheta\in[-r,0], \end{cases}$$

mild 解的存在性。其中

$$x_0(\vartheta)+\left(g\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)\right)(\vartheta)=\varphi(\vartheta),\quad \vartheta\in[-r,0],$$

是非局部条件，函数 $\left(g\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)\right)$，形如

$$\left(g\left(x_{t_1},\cdots,x_{t_n}\right)\right)(\vartheta)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_{t_i}(\vartheta),$$

$c_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为常数。文中作者，假设 $-A$ 生成紧半群，非线性项 $f(t,x_t)$ 一致有界，中立项满足 Lipschitz 条件。

2017 年，带积分边界条件的微分方程引起许多学者的注意[9] [10] [11]。在文献[12]中作者运用逐次逼近的方法，获得了下列带积分条件的分数阶发展方程

$$\begin{cases} D^q u(t)=Au(t)+f(t,u(t)),\ t\in J:=[0,a], \\ u(0)=H(u), \end{cases}$$

在实 Banach 空间中 mild 解存在的充分条件，其中非局部函数 $H:[0,a]\times \mathrm{X}\to \mathrm{X}$ 定义如下：

$$H(u)=\int_0^a g(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

其中 X 是实 Banach 空间， $g:[0,a]\times \mathrm{X}\to \mathrm{X}$ 是一个给定的函数，满足某些假设条件。

受以上工作的启发，在本文中，研究了实 Banach 空间中如下带非局部积分边界条件的分数阶中立型发展方程

$$\begin{cases} {}^C D^q\left[x(t)-h(t,x)\right]=Ax(t)+f(t,x(t)),\ t\in[0,a], \\ x(0)=\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{I}$$

mild 解存在性。${}^{C}D^{q}$ 是 $q(0<q\le 1)$ 阶 Caputo 型分数阶导数；$A:D(A)\subset \mathrm{X}\to \mathrm{X}$ 是 X 中一致有界的等度连续半群 $\{T(t);t\ge 0\}$ 的无穷小生成元，即 $\exists M\ge 1$，使得对 $t\ge 0$，有 $\|T(t)\|\le M$，$g,f:I\times \mathrm{X}\to \mathrm{X}$ 是给定的函数，需要满足下面给出的假设条件。

对于非局部问题的讨论一般要求 $-A$ 生成紧半群或解析半群，非线性函数 f,g 一致有界且满足 Lipschitz 条件。但是，在 $t=0$ 处，半群 $T(t)$ 的紧性只有在有限维空间成。因此，本文运用非紧性测度估计技术，只假设非线性函数 f,g 满足线性增长条件和非紧性测度条件，以非紧性测度条件代替紧半群条件，中立项函数满足 Lipschitz 条件，线性增长条件及非紧性测度条件。通过证明解算子是凝聚算子，运用 Sadovskii 不动点定理，获得了带有积分条件的非局部分数阶中立型发展方程 mild 解的存在性，推广了已有文献中的结论。在第二部分作者给出了一些为了证明主要结果所需的定义和引理，在第三部分给出了主要结果及其证明。

2. 预备知识

设 $I:=[0,a]$，又设空间 X 按范数 $\|\cdot\|$ 构成实 Banach 空间，$C(I,\mathrm{X})$ 为定义于 I 取值于 X 的连续函数之集，按范数

$$\|x\|_C=\sup_{t\in I}\|x(t)\|$$

构成 Banach 空间。本文记 N 为正整数集。

下面介绍分数阶微积分的概念：

定义 2.1 [1]区间 I 上的函数 f 的 $q>0$ 阶分数阶积分定义为

$$I^{q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{q-1}}\mathrm{d}s,\quad t>0,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数。

定义 2.2 [1]区间 I 上的函数 f 的 $q\in[n-1,n]$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义为

$${}^{L}D^{q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\mathrm{d}s,\quad t>0,$$

其中 $n=[q]$ 表示大于或者等于 q 的最小整数。

定义 2.3 [1]区间 I 上的函数 f 的 $q\in[n-1,n]$ 阶 Caputo 型分数阶导数定义为

$${}^{C}D^{q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\mathrm{d}s=I_t^{n-q}f^{(n)}(t),\quad t>0,$$

其中 $n=[q]$。

注 2.1：1) Riemann-Liouville 型分数阶导数和 Caputo 型分数阶导数有下列关系：

$${}^{C}D^{q}f(t)={}^{L}D^{q}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right).$$

2) 常数的 Caputo 型导数为 0。

3) 如果 f 是 X 中的抽象函数，则定义 2.1，2.2，2.3 中的积分为 Bochner 意义下的积分。

根据文献[8]引理 3.1 中的证明方法可得下列引理：

引理 2.1 [4]如果函数 $x\in C(I,\mathrm{X})$ 满足下列积分方程

$$x(t)=S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s+h(t,x(t))+\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I,$$

则称 x 是问题(I)的 mild 解，其中

$$S_q(t)=\int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta;$$

$$T_q(t)=q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)\mathrm{d}\theta;\quad \xi_q(\theta)=\frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\varpi_q\left(\theta^{-\frac{1}{q}}\right)\geq 0;$$

$$\varpi_q(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q),\quad \theta\in(0,\infty),$$

这里 ξ_q 是定义在 $(0,\infty)$ 上的单边概率密度函数，且 $\int_0^\infty \xi_q(\theta)\mathrm{d}\theta=1$，$\theta\in(0,\infty)$。

定义算子 $F_q:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$，如下：

$$F_q(x(t))=S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s+h(t,x(t))+\int_0^t(t-s)^{q-1}T_q(t-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

则问题(I)的 mild 解就等价于算子 F_q 的不动点。

引理 2.2 [11]对任意给定的 $t\geq 0$，$S_q(t)$，$T_q(t)$ 为有界线性算子，即对 $\forall x\in\mathrm{X}$，有

$$\left\|S_q(t)x\right\|\leq M\|x\|,\quad \left\|T_q(t)x\right\|\leq\frac{qM}{\Gamma(1+q)}\|x\|,$$

其中 $\|T(t)\|\leq M$，$\forall t\geq 0$。

引理 2.3 [8]算子簇 $\{S_q(t)\}_{t\geq 0}$，$\{T_q(t)\}_{t\geq 0}$ 强连续，即对 $\forall x\in\mathrm{X}$ 且 $0\leq t'<t''\leq a$，当 $t'\to t''$ 时，有

$$\left\|S_q(t'')x-S_q(t')x\right\|\to 0,\quad \left\|T_q(t'')x-T_q(t')x\right\|\to 0.$$

下面我们给出一些关于非紧性测度的概念和结论，这些结论将在后续证明中用到。设 X 是 Banach 空间，$D\subset\mathrm{X}$ 是非空有界集。令

$$\beta(D)=\inf\left\{\mu>0\,\middle|\,D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i,d(D_i)\leq\mu\right\},$$

其中 $d(D_i)$ 表示 D_i 的直径。则称 $\beta(D)$ 为 X 中 D 的 Kuratowski 非紧性测度。显然，

$$0\leq\beta(D)<+\infty,$$

$\beta_C(D)$ 表示 $C(I,\mathrm{X})$ 中 D 的 Kuratowski 非紧性测度。

引理 2.4 [13]设 X 为 Banach 空间，$D_1,D_2\subset\mathrm{X}$，则有

(i) $\beta(D_1)=0$ 当且仅当 D_1 是相对紧集；

(ii) 若 $D_1\subset D_2$，则 $\beta(D_1)\leq\beta(D_2)$；

(iii) $\beta(D_1+D_2)\leq\beta(D_1)+\beta(D_2)$。

更多关于 Kuratowski 非紧性测度估计的知识，可参见文献[13]。

引理 2.5 [13]设 X 为 Banach 空间，若 $D\subset C(I,\mathrm{X})$ 为有界且等度连续集，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上连续，且

$$\beta_C(D)=\max_{t\in I}\beta(D(t))=\beta(D(I)).$$

引理 2.6 [14]设 X 为 Banach 空间，$D=\{x_n\}\subset C(I,\mathrm{X})$ 为可列集，若存在 $\phi\in L^1(I)$，使得 $\left\|x_n(t)\right\|\leq\phi(t)$，$a.e.$，$t\in I$，$n=1,2,\cdots$，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上 Lebesgue 可积，且

$$\beta\left(\left\{\int_I x_n(t)\mathrm{d}t\,\middle|\,n\in N\right\}\right)\leq 2\int_I\beta(D(t))\mathrm{d}t.$$

引理 2.7 [15]设 X 是 Banach 空间，$D\subset\mathrm{X}$ 有界，则存在可列集 $D_0\subset D$，使得

$$\beta(D) \le 2\beta(D_0)。$$

定义 2.4 [16]设 X 是 Banach 空间，$A: D(A) \subset X \to X$ 连续，如果对任意 $S \subset X$ 有界集，满足下列不等式

$$\beta(A(S)) < \beta(S),$$

则称 F 是凝聚映射。

引理 2.8 [17] (Sadovskii 定理)设 X 为 Banach 空间，$D \subset X$ 为有界凸闭集，$A: D \to D$ 为凝聚映射，则 A 在 D 中至少有一个不动点。

下面我们应用 Sadovskii 不动点定理证明算子 F_q 存在不动点，为了证明主要结论，我们给出下列假设：

(P_1) 函数 $g: I \times X \to X$ 是连续函数，且对 $\forall t \in I$，$x \in X$，存在非负连续函数 $n \in C(I, X)$，使得

$$\|g(t,x)\| \le n(t)\|x\|。$$

(P_2) 函数 $f: I \times X \to X$ 是连续函数，且对 $\forall t \in I$，$x \in X$，存在非负连续函数 $m \in C(I, X)$，使得

$$\|f(t,x)\| \le m(t)\|x\|。$$

(P_3) 函数 $h: I \times X \to X$ 是连续函数，满足 Lipschitz 条件，即对 $\forall t_1, t_2 \in I$，$x, y \in X$，存在常数 $L > 0$，使得

$$\|h(t_1,x) - h(t_2,y)\| \le L(|t_1 - t_2| + \|x - y\|),$$

且存在非负连续函数 $p \in C(I, X)$，满足

$$\|h(t,x)\| \le p(t)\|x\|。$$

注 2.2：由文献[13]可知，中立项函数如果满足 Lipschitz 条件，则有下列成立

$$\beta(h(t,D)) \le L\beta(D)。$$

问题(2)中的给定函数 f，h，g，除了要满足上面的线性增长条件以外，还满足下列非紧性测度条件：

(P_4)对 $\forall t \in I$，$D \subset X$ 为有界集，存在常数 $L_1 > 0$，$L_2 > 0$，满足

$$2\left(2aML_2 + L + \frac{2ML_1 a^q}{\Gamma(1+q)}\right) < 1, \tag{2.1}$$

使得

$$\beta(f(t,D)) \le L_1\beta(D),$$

$$\beta(g(t,D)) \le L_2\beta(D)。$$

3. 主要结果及其证明

设 R 是一个充分大的常数，在空间 $C(I, X)$ 中，取

$$K_R = \left\{x \in C(I,X) \,\middle|\, \|x\|_C \le R\right\}。$$

定理 3.1 如果条件(P_1)-(P_4)成立，且下列条件满足

$$aM\|n\|_C + \|p\|_C + \frac{Ma^q\|m\|_C}{\Gamma(1+q)} < 1, \tag{3.1}$$

则问题(I)在 K_R 上至少有一个 mild 解。

证明：对 $\forall x \in K_R$，由假设条件(P_1)-(P_3)及引理 2.1，2.2，有

$$\begin{aligned}
\left\|\left(F_q x\right)(t)\right\| &= \left\|S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s + h(t,x(t)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \left\|S_q(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| + \left\|h(t,x(t))\right\| + \left\|\int_0^t (t-s)^{q-1} T_q(t-s) f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\le aM\|n\|_C\|x\|_C + \|p\|_C\|x\|_C + \frac{Ma^q}{\Gamma(1+q)}\|m\|_C\|x\|_C \\
&= \left(aM\|n\|_C + \|p\|_C + \frac{Ma^q\|m\|_C}{\Gamma(1+q)}\right)\|x\|_C
\end{aligned}$$

由(3.1)式可知，$\left\|\left(F_q x\right)(t)\right\| \le R$。故 F_q 映 K_R 到自身。

接下来证明 $F_q(K_R)$ 在 $C(I)$ 中是等度连续集。由上面 K_R 的定义可知，$K_R \subset C(I)$ 是有界集。对 $\forall t_1,t_2 \in I$，$t_1 < t_2$，$x \in K_R$，有

$$\begin{aligned}
&\left\|F_q(x(t_1)) - F_q(x(t_2))\right\| \\
&\le \left\|\left[S_q(t_1)-S_q(t_2)\right]\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| + \left\|h(t_1,x(t_1)) - h(t_2,x(t_2))\right\| \\
&\quad + \left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}T_q(t_1-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s - \int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \left\|\left[S_q(t_1)-S_q(t_2)\right]\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| + \left\|h(t_1,x(t_1)) - h(t_2,x(t_2))\right\| \\
&\quad + \left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_1-s)-T_q(t_2-s)\right]f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\quad + \left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\quad + \left\|\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right]T_q(t_2-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&= S_1 + S_2 + S_3 + S_4
\end{aligned}$$

其中

$$S_1 = \left\|\left[S_q(t_1)-S_q(t_2)\right]\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| + \left\|h(t_1,x(t_1)) - h(t_2,x(t_2))\right\|,$$

$$S_2 = \left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_1-s)-T_q(t_2-s)\right]f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|,$$

$$S_3 = \left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}T_q(t_2-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|,$$

$$S_4 = \left\|\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right]T_q(t_2-s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|。$$

因为

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\|\left[S_q(t_1)-S_q(t_2)\right]\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| + \left\|h(t_1,x(t_1)) - h(t_2,x(t_2))\right\| \\
&\le \left\|\left[S_q(t_1)-S_q(t_2)\right]\right\| a\|n\|_C\|x\|_C + L\left(|t_1-t_2| + \|x(t_1)-x(t_2)\|\right)
\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left[T_q(t_1-s)-T_q(t_2-s)\right]f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\le \left\|\int_0^{t_1}s^{q-1}\left[T_q(s)-T_q(t_2-t_1+s)\right]f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|
\end{aligned},$$

$$S_4=\left\|\int_0^{t_1}\left[\left(t_1-s\right)^{q-1}-\left(t_2-s\right)^{q-1}\right]T_q\left(t_2-s\right)f\left(s,x\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right\|\le\frac{M\left\|m\right\|_C\left\|x\right\|_C}{\Gamma\left(1+q\right)}\left(t_1^q-t_2^q\right)。$$

对 $t_1=0$，$0\le t_1<t_2\le a$，$t_2-t_1\to 0$ 时，由引理 2.3 及假设条件可知，$S_1,S_2,S_3,S_4\to 0$。故 $F_q\left(\mathrm{K}_R\right)$ 在 $C\left(I\right)$ 中等度连续。

最后证明 $F_q:\mathrm{K}_R\to\mathrm{K}_R$ 凝聚。由上面的证明可知，$\mathrm{K}_R\subset C\left(I\right)$ 是等度连续集。对 $\forall x\in\mathrm{K}_R$，由引理 2.6，2.7，存在 $\mathrm{K}_R'=\left\{x_n\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\subset\mathrm{K}_R$，使得

$$\beta\left(\mathrm{K}_R\right)\le 2\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)。$$

进而，由条件(P_4)有

$$\begin{aligned}
&0\le\beta\left(F_q\left(\mathrm{K}_R'\right)\right)\\
&=\beta\left(\left\{S_q\left(t\right)\int_0^a g\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s+h\left(t,x_n\left(t\right)\right)+\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}T_q\left(t-s\right)f\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&=\beta\left(\left\{S_q\left(t\right)\int_0^a g\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)+\beta\left(\left\{h\left(t,x_n\left(t\right)\right)\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&\quad+\beta\left(\left\{\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}T_q\left(t-s\right)f\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&\le M\beta\left(\left\{\int_0^a g\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)+\beta\left(\left\{h\left(t,x_n\left(t\right)\right)\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&\quad+\frac{qM}{\Gamma\left(1+q\right)}\beta\left(\left\{\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}f\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&\le 2M\int_0^a\beta\left(g\left(s,\mathrm{K}_R'\right)\right)\mathrm{d}s+\beta\left(h\left(t,\mathrm{K}_R'\right)\right)+\frac{2qM}{\Gamma\left(1+q\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}\beta\left(f\left(s,\mathrm{K}_R'\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\le 2ML_2\int_0^a\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)\mathrm{d}s+L\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)+\frac{2qML_1}{\Gamma\left(1+q\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)\mathrm{d}s\\
&\le 2aML_2\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)+L\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)+\frac{2qML_1a^q}{\Gamma\left(1+q\right)}\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)\\
&\quad+\frac{qM}{\Gamma\left(1+q\right)}\beta\left(\left\{\int_0^t\left(t-s\right)^{q-1}f\left(s,x_n\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathrm{N}\right\}\right)\\
&\le\left(2aML_2+L+\frac{2ML_1a^q}{\Gamma\left(1+q\right)}\right)\beta\left(\mathrm{K}_R'\right)
\end{aligned}$$

所以，由引理 2.5 可知，

$$\begin{aligned}
\beta_C\left(F_q\left(\mathrm{K}_R\right)\right)&=\max_{t\in I}\beta\left(F_q\left(\mathrm{K}_R\left(t\right)\right)\right)\\
&\le 2\max_{t\in I}\beta\left(F_q\left(\mathrm{K}_R'\left(t\right)\right)\right)\\
&\le 2\left(2aML_2+L+\frac{2ML_1a^q}{\Gamma\left(1+q\right)}\right)\beta\left(\mathrm{K}_R\right)
\end{aligned}$$

因此，由(2.1)式可知，$\beta_C\left(F_q\left(\mathrm{K}_R\right)\right)<\beta_C\left(\mathrm{K}_R\right)$。由定义 2.4 知，算子 F_q 是凝聚映射。故由引理 2.8 可知，算子 F_q 在 K_R 上存在不动点，该不动点是问题(I)的 mild 解。

基金项目

伊犁师范大学校级资助项目(2021YSYB078)。

参考文献

[1] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Application of Fractional Differential Equation. Elsevier Science BV, Amsterdam.

[2] Agarwal, R.P., Zhou, Y. and He, Y.Y. (2010) Existence of Fractional Neutral Functional Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 1095-1100. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.05.010

[3] 程烨，寇春海．分数阶中立型泛函微分方程解的存在性与唯一性[J]．东华大学学报(自然科学版)，2013，39(6): 836-840.

[4] 王琳，熊成基．具有时滞的中立型分数阶微分方程解的存在性[J]．南华大学学报(自然科学版)，2014，28(1): 84-87.

[5] Chadha, A. and Pandey, D.N. (2015) Existence and Approximation of Solution to Neutral Fractional Differential Equation with Nonlocal Conditions. *Computers and Mathematics with Applications*, **69**, 893-908. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.02.003

[6] Zhou, X.F., Yang, F.L. and Jiang, W. (2015) Analytic Study on Linear Neutral Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 295-307. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.056

[7] Ganga, R.G. and Jaydev, D. (2015) Mild Solutions for Class of Neutral Fractional Functional Differential Equations with Not Instantaneous Impulses. *Applied Mathematics and Computation*, **259**, 480-489. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.069

[8] Zhou, Y. and Jiao, F. (2010) Existence of Mild Solutions for Fractional Neutral Evolution Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 1063-1077. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.026

[9] Wang, Y. and Yang, Y. (2013) Positive Solutions for a High-Order Semipositone Fractional Differential Equation with Integral Boundary Conditions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **45**, 99-109. https://doi.org/10.1007/s12190-013-0713-x

[10] Li, H.D., Liu, L.S. and Wu, Y.H. (2015) Positive Solutions for Singular Nonlinear Fractional Differential Equation with Integral Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, No. 232, 1-15. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0493-3

[11] Vidushi, G. and Jaydev, D. (2016) Functional Impulsive Differential Equation of Order $\alpha \in (1, 2)$ with Nonlocal Initial and Integral Boundary Conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 2409-2420. https://doi.org/10.1002/mma.4147

[12] Chen, P.Y., Zhang, X.P. and Li, Y.X. (2017) Approximation Technique for Fractional Evolution Equations with Nonlocal Integral Conditions. *Mediterrannean Journal of Mathematics*, **14**, 226. https://doi.org/10.1007/s00009-017-1029-0

[13] Banas, J. and Goebel, K. (1980) Measures of Noncompactness in Banach Spaces. Marcel Dekker, New York.

[14] Heinz, H.P. (1983) On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-Valued Functions. *Nonlinear Analysis*, **7**, 1351-1371. https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90006-8

[15] Chen, P.Y. and Li, Y.X. (2013) Monotone Iterative Technique for a Class of Semilinear Evolution Equations with Nonlocal Conditions. *Results in Mathematics*, **63**, 731-744. https://doi.org/10.1007/s00025-012-0230-5

[16] 李永祥．抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]．数学学报, 2005, 48(6): 1089-1094.

[17] Sadovskii, B.N. (1967) A Fixed-Point Principle. *Functional Analysis Application*, **1**, 151-153. https://doi.org/10.1007/BF01076087