Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1370-1380
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128150

Hans汉斯

一类带非线性边界条件的二阶半正问题正解的存在性

石轩荣

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年7月19日；录用日期：2022年8月19日；发布日期：2022年8月30日

摘 要

本文研究了二阶半正问题

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t) f(u(t)),\ t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad c(u(1))u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{P})$$

正解的存在性，其中 λ 为正参数，$\alpha,\ \delta > 0 \beta \geq 0$ 为常数，$c \in C([0,\infty),[0,\infty))$，$h \in C([0,1],[0,\infty))$，$f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ 且 $f > -M\ (M > 0)$，$f_\infty := \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$。通过运用 **Krasnoselskii** 不动点定理证明了存在常数 $\lambda_0 > 0$，当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时，问题 **(P)** 存在一个正解。

关键词

正解，半正问题，非线性边界条件，**Krasnoselskii** 不动点定理

Existence of Positive Solutions for a Class of Second Order Semi-Positone Problems with Nonlinear Boundary Conditions

Xuanrong Shi

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 石轩荣. 一类带非线性边界条件的二阶半正问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 12(8): 1370-1380.
DOI: 10.12677/pm.2022.128150

Received: Jul. 19^{th}, 2022; accepted: Aug. 19^{th}, 2022; published: Aug. 30^{th}, 2022

Abstract

We are concerned with existence of positive solutions for the second order semi-positone problem

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t) f(u(t)),\ t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad c(u(1))u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

where λ **is a positive parameter,** $\alpha,\ \delta > 0,\ \beta \geq 0$**,** $c \in C([0,\infty),[0,\infty))$**,** $h \in C([0,1],[0,\infty))$**,** $f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ **and** $f > -M\ (M > 0),\ f_\infty := \lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$**. By using fixed point theorem of Krasnoselskii, we prove that there exists** $\lambda_0 > 0$ **such that (P) has a positive solution for** $0 < \lambda < \lambda_0$**.**

Keywords

Positive Solutions, Semi-Positone Problem, Nonlinear Boundary Condition, Krasnoselskii Fixed Point Theorem

1. 引言

二阶微分方程 Sturm-Liouville 边值问题是一类重要的问题, 引起了许多学者的广泛关注, 并已经获得了一些存在性结果 [1–14]比如, Wang 和 Erbe [13] 研究了如下二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)g(u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \geq 0$ 且 $\gamma\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $g \in C([0,\infty),\ [0,\infty))$. $a \in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 $[0,1]$ 的任意子区间上不恒为零. Wang 和 Erbe 运用锥上的不动点定理, 建立了如下结果:

定理 A ([13], 定理 1) 若 g 满足下列条件：

$$\lim_{u\to 0}\max_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=0,\quad \lim_{u\to\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=+\infty$$

或

$$\lim_{u\to 0}\min_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=+\infty,\quad \lim_{u\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u)}{u}=0,$$

则问题 (1.1) 至少存在一个正解.

在允许 f 为负值的情形下, 对于半正的情形, Anuradha 等 [14]运用锥上的不动点定理研究了二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)=\lambda f(t,u(t)), \quad t\in(r,R), \\ au(r)-bu'(r)=0,\ cu'(R)+du'(R)=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 λ 为正参数, 并且:

(A1) $a,b,c,d\geq 0$ 且 $ac+ad+bc>0$;

(A2) $f:[r,R]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且 $f(t,u)>-M\ (M>0)$, $t\in[r,R]$;

(A3) $f_\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

他们建立了如下结果:

定理 B ([14], 定理 2.1) 若 (A1)–(A3) 成立, 当 $\lambda>0$ 且充分小时, 问题 (1.2) 至少存在一个正解. 值得注意的是, 文献 [13]所研究问题中非线性项 f 非负, 文献 [14]虽然研究了半正问题但依旧是线性边界条件. 自然要问: 当非线性项 f 为半正情形且边界条件为非线性时问题 (P) 是否存在正解? 因此, 本文考虑

$$\begin{cases} -u''(t)=\lambda h(t)f(u(t)), \quad t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \quad c(u(1))u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的存在性. 我们总假定：(H1) $\lambda>0$ 为正参数, α, $\delta>0$, $\beta\geq 0$ 为常数; (H2) $c:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续, $h:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续, 且在 $[0,1]$ 的任意子区间不恒为零; (H3) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且 f 满足 $f(s)>-M\ (M>0)$; 本文的主要结果如下: **定理 1.1** 假设 (H1)–(H3) 且 (A3) 成立, 则存在常数 $\lambda_0>0$ 使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时, 问题 (1.3) 至少存在一个正解 u_λ, 且当 $\lambda\to 0^+$ 时, $u_\lambda\to\infty$.

2. 预备知识

令空间 $X:=C[0,1]$, 其在范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间, $L^1(0,1)$ 在范数 $\|y\|_1=\int_0^1|y(t)|dt$ 下构成 Banach 空间.

引理 2.1 [15] 令 E 为 Banach 空间, P 为 E 中的锥, $T:P\to P$ 为全连续算子. 假设 $h\in E$, $h\neq 0$

且存在正数 $r,\ R,\ r \neq R$ 使得

(a) 若 $y \in P$ 满足 $y = \theta Ty,\ \theta \in [0,1]$, 则 $\|y\|_\infty \neq r$;

(b) 若 $y \in P$ 满足 $y = Ty + \xi h,\ \xi \geq 0$, 则 $\|y\|_\infty \neq R$.

则 T 存在不动点 y, 且 $\min\{r, R\} < \|y\|_\infty < \max\{r, R\}$. **引理 2.2** 令 ω 满足

$$\begin{cases} -\omega''(t) = m(t), \quad t \in (0,1), \\ \alpha\omega(0) - \beta\omega'(0) = 0, \quad \gamma\omega(1) + \delta\omega'(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $\gamma > 0$ 为常数, $m \in L^1[0,1],\ m(t) \geq 0,\ t \in (0,1)$, 且 $\rho := \gamma\beta + \gamma\alpha + \alpha\delta > 0$. 则

$$\omega(t) \geq \|\omega\|_\infty \sigma, \qquad t \in [0,1],$$

其中

$$\sigma = \min\{\frac{\delta}{\delta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\}.$$

证明 容易证明

$$\omega(t) = \int_0^1 G(t,s)\omega(s)ds := L\omega(t),$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)}{\rho}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{\rho}, \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

显然, $G(t,s) \geq 0,\ t \in [0,1]$. 令 $\|\omega\|_\infty = \omega(\tau),\ \tau \in [0,1]$. 事实上

$$\frac{G(t,s)}{G(\tau,s)} \geq \frac{G(t,s)}{G(s,s)} \geq \begin{cases} \frac{\delta}{\delta+\gamma}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

因此

$$\omega(t) = \int_0^1 \frac{G(t,s)}{G(\tau,s)} G(\tau,s)\omega(s)ds \geq \|\omega\|_\infty \sigma.$$

引理 2.3 令 $k \in L^1(0,1)$, 且 $k \geq 0$, 令 $u \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$ 满足

$$\begin{cases} -u''(t) \geq -k, \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) \geq 0, \quad \gamma u(1) + \delta u'(1) \geq 0. \end{cases}$$

令 $\varphi := \frac{\beta+\alpha}{\alpha}$, 假设 $\|u\|_\infty > 2\varphi(1+\frac{1}{\sigma})\|k\|_1$, 则 $u(t) \geq 0$ 且

$$u(t) \geq \frac{\sigma}{2}\|u\|_\infty, \qquad t \in [0,1].$$

证明 令 $\nu_0(t)$ 为问题

$$\begin{cases} -\nu''(t) = -k, \quad t \in (0,1), \\ \alpha\nu(0) - \beta\nu'(0) = 0, \quad \gamma\nu(1) + \delta\nu'(1) = 0 \end{cases}$$

的唯一解, 则

$$\begin{aligned} -\nu_0(t) &= \int_0^1 G(t,s)k(s)ds \\ &= \int_0^t \frac{(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)}{\rho}k(s)ds + \int_t^1 \frac{(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{\rho}k(s)ds \\ &\le \int_0^1 \frac{(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha t)}{\rho}ds\|k\|_1 \\ &\le \frac{(\gamma+\delta)(\beta+\alpha)}{\gamma\beta+\gamma\alpha+\alpha\delta}\|k\|_1 \\ &\le \frac{(\beta+\alpha)}{\alpha}\|k\|_1. \end{aligned}$$

因此

$$-\nu_0(t) \le \varphi\|k\|_1.$$

令 $y(t) = u(t) - \nu_0(t)$, 有

$$\begin{cases} -y''(t) \ge 0, & t \in (0,1), \\ \alpha y(0) - \beta y'(0) \ge 0, & \gamma y(1) + \delta y'(1) \ge 0. \end{cases}$$

由引理 2.2 可知

$$y(t) \ge \|y\|_\infty \sigma, \quad t \in [0,1],$$

所以

$$\begin{aligned} u(t) &= y(t) + \nu_0(t) \\ &\ge \|y\|_\infty\sigma - \varphi\|k\|_1 \\ &= \|u-\nu_0\|_\infty\sigma - \varphi\|k\|_1 \\ &\ge (\|u\|_\infty - \|-\nu_0\|_\infty)\sigma - \varphi\|k\|_1 \\ &\ge (\|u\|_\infty - \varphi(1+\frac{1}{\sigma})\|k\|_1)\sigma \\ &\ge \frac{\sigma}{2}\|u\|_\infty, \qquad t \in (0,1). \end{aligned}$$

3. 主要结果的证明

定理 1.1的证明 令 $\lambda > 0$, 对 $v \in X$ 有 $L_\lambda v = u$, 其中 u 为

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t) f(\tilde{v}(t)), \quad t \in (0,1), \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad \gamma_v u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases}$$

的解. 且令 $\gamma_v = c(|v(1)|)$, $\sigma(t) = \min\{\frac{\delta}{\delta+\gamma_v} \frac{\beta}{\alpha+\beta}\}$

$$\tilde{v}(t) = \max\{v(t), \sigma(t)\}.$$

由引理 2.2 可知

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G_v(t,s) h(s) f(\tilde{v}(s)) ds,$$

其中

$$G_v(t,s) = \begin{cases} \frac{(\gamma_v+\delta-\gamma_v t)(\beta+\alpha s)}{\alpha\delta+\gamma_v\beta+\gamma_v\alpha}, \quad 0 \le s \le t \le 1, \\ \frac{(\beta+\alpha t)(\gamma_v+\delta-\gamma_v s)}{\alpha\delta+\gamma_v\beta+\gamma_v\alpha}, \quad 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

定义 X 中的锥

$$P = \{u \in X \mid u(t) \ge \frac{\sigma}{2} ||u||_\infty,\ t \in [0,1]\}.$$

若 $u \in P$, 结合引理 2.3 可知

$$\begin{aligned} L_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s) h(s) f(\tilde{v}(s)) ds \\ &\ge \lambda \int_0^1 \frac{G(t,s)}{G(s,s)} G(s,s) h(s) f(\tilde{v}(s)) ds \\ &\ge \sigma ||L_\lambda u||_\infty \\ &\ge \frac{\sigma}{2} ||L_\lambda u||_\infty, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

因此 $L_\lambda(P) \subset P$. 下证 L_λ 连续.

首先, 设 $S \subset C[0,1]$ 为有界集, 则存在正数 B, 使得对任意的 $v \in S$ 有 $||v||_\infty \le B$. 由 f 的连续性知, 存在 $D > 0$, 有

$$f(v) \le D, \quad v \in S.$$

令 $v_n \in S$ 且 $v_n \to v$, 则

$$u_n = L_\lambda v_n, \quad u = L_\lambda v.$$

由拉格朗日中值定理可知, 存在常数 $N > 0$, 有

$$|G_{v_n}(t,s) - G_v(t,s)| \le N|\gamma_{v_n} - \gamma_v|.$$

因为

$$|f(\tilde{v}_n(s)) - f(\tilde{v}(s))| \to 0, \quad n \to \infty, \quad s \in [0,1],$$

$$\begin{aligned}|L_\lambda v_n - L_\lambda v| &= |\lambda \int_0^1 G_{v_n}(t,s)h(s)f(\tilde{v}_n(s))ds - \lambda \int_0^1 G_v(t,s)h(s)f(\tilde{v}(s))ds| \\ &\leq \lambda(\int_0^1 |G_{v_n}(t,s) - G_v(t,s)|h(s)|f(\tilde{v}_n(s))|ds + \int_0^1 G_v(t,s)h(s)|f(\tilde{v}_n(s)) - f(\tilde{v}(s))|ds) \\ &< \lambda(\int_0^1 N|\gamma_{v_n} - \gamma_v|h(s)|f(\tilde{v}_n(s))|ds + \int_0^1 G_v(t,s)h(s)|f(\tilde{v}_n(s)) - f(\tilde{v}(s))|ds),\end{aligned}$$

所以

$$|L_\lambda v_n - L_\lambda v| \to 0, \quad n \to \infty,$$

故 $L_\lambda v_n \to L_\lambda v$. 所以 L_λ 的连续性得证. 下证 L_λ 是紧算子.

对于 $v \in S$ 有

$$||L_\lambda v|| \leq D \int_0^1 G_v(s,s)h(s)ds,$$

因此, $L_\lambda : C[0,1] \to C[0,1]$ 一致有界. 对任意 $t_1, t_2 \in [0,1]$ $(t_1 < t_2)$ 有

$$\begin{aligned}|L_\lambda v(t_1) - L_\lambda v(t_2)| &= |\lambda \int_0^1 G_v(t_1,s)h(s)f(\tilde{v}(s))ds - \lambda \int_0^1 G_v(t_2,s)h(s)f(\tilde{v}(s))ds| \\ &\leq \lambda D \int_0^1 |G_v(t_1,s) - G_v(t_2,s)|h(s)ds.\end{aligned}$$

由 $G(t,s)$ 连续性可知, L_λ 等度连续. 由 Arzèla-Ascoli 定理知, $L_\lambda : C[0,1] \to C[0,1]$ 为全连续算子.

令 $a > 1$ 有

$$f(z) > 0, \quad z \geq a.$$

由 f 的连续性可知

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in (0,a). \tag{3.1}$$

因此

$$|f(z)| \leq (M + \hat{f}(\max\{z,a\}), \quad z > 0, \tag{3.2}$$

其中

$$\hat{f}(x) = \sup_{a \leq z \leq x} f(z), \quad x \geq a.$$

假设 $\lambda < \frac{a}{2(c_1 + c_2 f(a))}$, 其中

$$c_1 = \frac{(\alpha+\beta)M}{\alpha} \int_0^1 h(s)ds, \quad c_2 = \frac{(\alpha+\beta)}{\alpha} \int_0^1 h(s)ds.$$

下证引理 2.2 的假设对 L_λ 成立.

(a) 存在 $r_\lambda > 0$, 若 $u \in P$ 满足

$$u = \theta L_\lambda u, \quad \theta \in [0,1],$$

则 $||u||_\infty \neq r_\lambda$. 事实上, 令 $u \in P$ 满足 $u = \theta L_\lambda u$, $\theta \in [0,1]$, 则

$$u(t) = \theta\lambda \int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))ds, \quad t \in [0,1].$$

因为 $a > 1, \sigma < 1$, 由 (3.2) 可知

$$|f(u)| \leq M + \hat{f}(\max\{u,a\}),$$

且 $G_u(t,s) \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, $t \in (0,1)$. 因此

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \lambda\frac{\alpha+\beta}{\alpha}(M + \hat{f}(\max\{u,a\}) \int_0^1 h(s)ds \\ &\leq \lambda(c_1 + c_2\hat{f}(\max\{||u||_\infty, a\})), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

即

$$\frac{||u||_\infty}{c_1 + c_2\hat{f}(\max\{||u||_\infty, a\}} \leq \lambda. \tag{3.3}$$

因为

$$\frac{a}{(c_1 + c_2 f(a))} > 2\lambda,$$

结合 (A4), 则存在 $r_\lambda > a$ 使得

$$\frac{r_\lambda}{c_1 + c_2\hat{f}(r_\lambda)} = 2\lambda. \tag{3.4}$$

由 (3.3), (3.4) 得 $||u||_\infty \neq r_\lambda$ 且

$$r_\lambda \to \infty, \quad \lambda \to 0.$$

(b) 存在 $R_\lambda > 0$, 对于 $u \in P$ 有

$$u = L_\lambda u + \xi, \quad \xi \geq 0.$$

则 $||u||_\infty \neq R_\lambda$. 事实上, 令 $u \in P$ 满足 $u = L_\lambda u + \xi$, $\xi \geq 0$, 则

$$u(t) - \xi = \lambda \int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))ds.$$

因为 $u(t) - \xi$ 满足

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t)f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) - \beta u'(0) = \xi \geq 0, \quad \gamma_v u(1) + \delta u'(1) = \gamma_v \xi \geq 0. \end{cases}$$

令 $k(t) = Mh(t)$, $t \in [0,1]$. 由 (3.1) 可知

$$h(t)f(\tilde{u}(t)) \geq -Mh(t) = -k(t), \quad t \in [0,1].$$

由引理 2.3 可知

$$u(t) \geq (||u||_\infty - \varphi(1+\frac{1}{\sigma})||k||_1)\sigma, \quad t \in [0,1].$$

假设 $||u||_\infty > \max\{2\varphi(1+\frac{1}{\sigma}),\ \frac{2}{\sigma}\}$, 则

$$\begin{aligned} u(t) &\geq (||u||_\infty - \frac{||u||_\infty}{2})\sigma \\ &= \frac{\sigma||u||_\infty}{2}, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

当 $s \in \Lambda = [\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}]$ 有

$$G_u(t,s) \geq \frac{(\delta+\frac{1}{4}\gamma)(\frac{1}{4}\alpha+\beta)}{(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)} \geq \frac{(4+\gamma)(1+4\beta)}{16(1+\gamma)(1+\beta)} \geq \frac{1}{16}.$$

因此

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda\int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))ds \\ &\geq \lambda\int_\Lambda G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))ds + \lambda\int_{\Lambda^c} G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))ds \\ &\geq \lambda(\frac{1}{16}\check{f}(\frac{||u||_\infty}{2}\sigma)\int_\Lambda h(s)ds - \frac{(\alpha+\beta)}{\alpha}M||k||_1), \end{aligned}$$

其中 $\check{f}(x) = \inf\limits_{z\geq x} f(z)$. 事实上

$$\frac{\frac{1}{16}\check{f}(\frac{||u||_\infty}{2}\sigma)\int_\Lambda h(s)ds - \frac{(\alpha+\beta)}{\alpha}K||k||_1}{||u||_\infty} \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.5}$$

结合 (A3), (3.5) 可知, 存在 $R_\lambda > 1$ 且 $||u||_\infty < R_\lambda$, 因此 (b) 成立.

因此, 由引理 2.1 可知, 问题 (1.3) 存在一个正解 $u_\lambda(t)$, 当 $\lambda \to 0$ 时

$$u_\lambda(t) \to \infty, \quad t \in [0,1].$$

4. 应用

例 考虑问题

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda t^2(u^2(t)-1), & t \in (0,1), \\ u(0)-u'(0) = 0, \quad u^3(1)+u'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

解的存在性, 其中 $\lambda > 0$.

解 这里取 $f(u) = u^2(t) - 1,\ \alpha = \beta = \delta = 1,\ h(t) = t^2,\ c(u(1)) = u^2(1)$.

对于问题 (4.1)而言, (H1), (H2) 显然成立, 因为 $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = \infty$ 且 $f(u) > -1,\ u \in [0, \infty)$, 则 f 满足 (H3), (A3).

根据定理 1.1, 存在常数 $\lambda^* > 0$, 使得当 $0 < \lambda^* < \lambda_0$ 时, 问题 (4.1) 存在一个正解 u_λ, 当 $\lambda \to 0^+$ 时, $u_\lambda \to \infty$.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064).

参考文献

[1] Castro, A. and Shivaji, R. (1988) Nonnegative Solutions for a Class of Nonpositone Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **108**, 291-302. https://doi.org/10.1017/S0308210500014670

[2] Rabinowitz, P.H. (1970) Nonlinear Sturm-Liouville Problems for Second Order Ordinary Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **23**, 939-961. https://doi.org/10.1002/cpa.3160230606

[3] Jiang, J.Q., Liu, L.S. and Wu, Y.H. (2009) Second-Order Nonlinear Singular Sturm-Liouville Problems with Integral Boundary Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 1573-1582. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.07.024

[4] Ge, W.G. and Ren, J.L. (2004) New Existence Theorems of Positive Solutions for Sturm-Liouville Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **148**, 631-644. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00921-9

[5] Tian, Y. and Ge, W.G. (2007) Multiple Solutions for a Second-Order Sturm-Liouville Boundary Value Problem. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **11**, 975-988. https://doi.org/10.11650/twjm/1500404796

[6] Rynne, B.P. (2012) Linear Second-Order Problems with Sturm-Liouville-Type Multi-Point Boundary Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, **146**, 1-21.

[7] Lv, H.Y. and Shi, Y.M. (2009) Error Estimate of Eigenvalues of Perturbed Second-Order Discrete Sturm-Liouville Problems. *Linear Algebra and its Applications*, **430**, 2389-2415. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.12.016

[8] Du, Z.J. and Yin, J. (2014) A Second Order Differential Equation with Generalized Sturm-Liouville Integral Boundary Conditions at Resonance. *Filomat*, **28**, 1437-1444. https://doi.org/10.2298/FIL1407437D

[9] Liu, Y.J. (2008) On Sturm-Liouville Boundary Value Problems for Second-Order Nonlinear Functional Finite Difference Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **216**, 523-533. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.06.003

[10] Xie, S.L. (2001) Sturm-Liouville Boundary Value Problems for Nonlinear Second Order Impulsive Differential Equations. *Mathematica Applicata (Wuhan)*, **14**, 93-98.

[11] Yang, J.B. and Wei, Z.L. (2010) Existence of Positive Solutions of Sturm-Liouville Boundary Value Problems for a Nonlinear Singular Second Order Differential System with a Parameter. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **34**, 129-145. https://doi.org/10.1007/s12190-009-0312-z

[12] Drame, A.K. and Costa, D.G. (2012) On Positive Solutions of One-dimensional Semipositone Equations with Nonlinear Boundary Conditions. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 2411-2416. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.07.015

[13] Erbe, L.H. and Wang, H.Y. (1994) On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **120**, 743-748. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1204373-9

[14] Anuradha, V., Hai, D.D. and Shivaji, R. (1996) Existence Results for Superlinear Semipositone BVP's. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**, 757-763. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-96-03256-X

[15] Castro, A. and Shivaji, R. (1988) Non-Negative Solutions for a Class of Non-Positone Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*, **108**, 291-302. https://doi.org/10.1017/S0308210500014670