Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1296-1304
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128142

Hans汉斯

离散小波系统的加权密度

杨　姗，江慎铭*

南昌航空大学数学与信息科学学院，江西 南昌

收稿日期：2022年7月6日；录用日期：2022年8月5日；发布日期：2022年8月15日

摘　要

引入了一类新的连续小波变换，该变换的缩放因子指数大于0，其弱收敛意义上的重构公式被给出。在此基础上，相应于此类连续小波变换的离散小波系统、过采样离散仿射小波系统及它们的仿射Beurling密度、加权仿射Beurling密度定义也被给出。验证了新给出的离散小波系统具有一致仿射Beurling密度，新给出的过采样离散仿射小波系统具有一致加权仿射Beurling密度，并且两者的值相等。

关键词

离散小波系统，过采样小波系统，加权密度

The Weighted Density of Discrete Wavelet Systems

Shan Yang, Shenming Jiang*

School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Jul. 6th, 2022; accepted: Aug. 5th, 2022; published: Aug. 15th, 2022

Abstract

A new class of continuous wavelet transform is introduced, whose scaling factor index is greater than 0, and its reconstruction formula in the sense of weak convergence is given. On this basis, the definitions of discrete wavelet systems; oversampled discrete affine wavelet systems and their affine Beurling density, and weighted affine Beurling density corresponding to this kind of continuous wavelet transform are also given. It is verified that the new discrete affine wavelet system has uniform affine Beurling density, and the new oversampled discrete affine wavelet system has uniformly weighted affine Beurling density, and the values of the two are equal.

*通讯作者。

文章引用: 杨姗, 江慎铭. 离散小波系统的加权密度[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1296-1304.
DOI: 10.12677/pm.2022.128142

Keywords

Discrete Wavelet Systems, Oversampled Wavelet Systems, Weighted Density

1. 引言

迄今为止，被广泛开发和研究的离散小波系统是经典的离散小波系统。定义如下：

$$W_{\varphi}(\Gamma)=\left\{a^{-\frac{j}{2}}\varphi\left(a^{-j}t-bt\right): j,k\in Z\right\}, \tag{1.1}$$

其中 $\Gamma=\left\{\left(a^{j},bk\right)\right\}_{j,k\in Z}$， $a>0,b>1$。

许多作者(Daubechie [1]，Heil and Walnut [2]，Chui and Shi [3]，Christensen [4]，Frazier 等[5])表明，对于某些 $\varphi\in L^2\left(R^2\right)$，对于任何 $a>0,b>1$，经典小波离散系统都可构成 $\varphi\in L^2\left(R^2\right)$ 的一个框架甚至是一个标准正交基。Heil 和 Kutyniok 在文献[6]中从密度的角度证明了经典离散小波系统作为一个非加权系统，具有一致仿射 Beurling 密度，即 $D^{+}(\Gamma)=D^{-}(\Gamma)=\dfrac{1}{b\ln a}$。

由许多作者(Chui 和 Shi [7]，Gressman 等[8]，Hermandez 等[9]和 Johnson [10])引入的过采样离散仿射小波系统定义如下：

$$W_{\varphi}(\Gamma,w)=\left\{r_j^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{j}{2}}\varphi\left(a^{-j}t-\frac{bt}{r_j}\right): j,k\in Z\right\}, w(j,k)=\frac{1}{r_j}, \tag{1.2}$$

其中对于任意 $j\in Z,r_j>0$，其相应的离散子集 $\Gamma=\left\{\left(a^{j},\frac{bk}{r_j}\right)\right\}_{j,k\in Z}$。Heil Kutyniok [6]表明，过采样离散仿射小波系统具有一致加权仿射 Beurling 密度， $D_w^{+}(\Gamma)=D_w^{-}(\Gamma)=\dfrac{1}{b\ln a}$，并且一致加权仿射 Beurling 密度的值和经典小波离散系统的一致仿射 Beurling 密度相等。

不过，上述经典离散小波系统及过采样离散仿射小波系统中缩放因子 a 的指数小于 0，因此当 a 越接近 0，数值积分的误差越大，这样会严重影响积分的精度。一些学者为此做了许多工作[11] [12]，这些文献中的小波变换中缩放因子 a 的指数大于 0，但这些研究结果都没有给出群结构，因此小波系统逆变换的逐点收敛性无法讨论。为了改善这一局限，本文以此作为动机，从群理论的角度引入一类新的连续小波变换，该变换的缩放因子指数大于 0，这种连续小波变换具有高频时，小移动；低频时，大移动的特点，并且很容易给出此类连续小波变换在弱收敛意义上的重构公式。在此基础上，我们给出了相应于此类连续小波变换的离散小波系统及过采样离散仿射小波系统，同时也给出了它们的仿射 Beurling 密度及加权仿射 Beurling 密度的定义。因此本文的主要目的是验证新给出的离散小波系统是否具有一致仿射 Beurling 密度，新给出的过采样离散仿射小波系统是否具有一致加权仿射 Beurling 密度，并且这两者的值是否相等？

本文组织如下：第二部分主要介绍相关的概念及主要结果；第三部分给出主要结果的证明。

2. 概念及主要结果

设 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{S}_1 = \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^n$ 群上的乘法运算定义为：

$$(a,t)\cdot(a',t') = (aa', t' + A_{a'}t),$$

其中

$$a\in\mathbb{R}^*, t\in\mathbb{R}^n, A_a = \begin{pmatrix} a & 0_{n-1}^{\mathrm{T}} \\ 0_{n-1} & \operatorname{sgn}(a)|a|^{\frac{1}{n}} I_{n-1} \end{pmatrix},$$

易证 $(\mathbb{S}_1,\cdot)$ 形成一个群。

受文献[13] [14]相关定义的启发，我们给出定义 1.1，1.2 及 1.3。

定义 1.1 集合 $\mathbb{S}_1 = \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^n$ 上赋予乘法运算

$$(a,t)\cdot(a',t') = (aa', t' + A_{a'}t),$$

则 $(\mathbb{S}_1,\cdot)$ 被称为小波群。

设 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$，定义 $\sigma:\mathbb{S}_1\to\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 为

$$\sigma(a,t)\varphi(x) = D_{A_a^{-1}}T_t\varphi(x) = |a|^{1-\frac{1}{2n}}\varphi(A_a x - t) =: \varphi_{a,t}(x).$$

定义 1.2 设 $\sigma:\mathbb{S}_1\to\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 是 $\mathbb{S}_1$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉表示。对给定的 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数族 $\{\sigma(a,t)\varphi:(a,t)\in\mathbb{S}_1\}$ 被称为小波族。对 $\forall f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，连续小波变换 $\mathcal{W}_\varphi:\mathbb{S}_1\to\mathbb{C}$ 定义为

$$\mathcal{W}_\varphi f(a,t) = \langle f, \sigma_1(a,t)\varphi\rangle = \left\langle f, D_{A_a^{-1}}T_t\varphi\right\rangle = \langle f, \varphi_{a,t}\rangle. \tag{1.3}$$

由式 $\sigma(a,b)\varphi(x) = |a|^{1-\frac{1}{2n}}\varphi(A_a x - b) = |a|^{1-\frac{1}{2n}}\varphi\left(A_a\left(x - A_a^{-1}b\right)\right)$ 可以得出 $A_a^{-1}b$ 是平移因子，当 $|a|$ 变大时，$|A_a^{-1}b|$ 变小，当 $|a|$ 变小时，$|A_a^{-1}b|$ 变大，这使得本文给出的多维连续小波变换具有高频时，小移动；低频时，大移动的特点。这表明无论对 a,b 进行何种剖分，采用何种数值积分方法，本文引入的多维连续小波变换具有高分辨特性，因此对其进行离散时，可采用的数值积分方法很多，选择的自由度非常大。

注 1.1. $\forall f\in L^2(\mathbb{S}_1)$，有

$$\int_{\mathbb{S}_1} f((a',t')\cdot(a,t))\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}}(a,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^*} f(a'a, t + A_a t')\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}_1}(a,t) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^*} f(a,t)\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}}(a,t),$$

即 $\mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}_1}(a,t) = \dfrac{\mathrm{d}a\mathrm{d}t}{|a|}$ 是左平移不变的。

为了给出命题 1.1，我们给出下面的定义 1.3。

定义 1.3 若

$$C_\varphi = \int_{\mathbb{R}^*}\left|\hat{\varphi}\left(A_a^{-1}\xi\right)\right|^2\frac{\mathrm{d}a}{|a|} < +\infty, a.e. \mathbb{R}^n,$$

则称 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 为可允许函数。

运用 Plancherel 定理，容易得到下面的命题 1.1。

命题 1.1 (连续小波变换的重构公式)设 σ 是 $\mathbb{S}_1$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉表示，且 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 是可允许的，则对所有 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，

$$f=\frac{1}{C_{\varphi}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{W}_{\varphi}f\left(a,t\right)\right)\sigma\left(a,t\right)\varphi\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}t}{|a|},\tag{1.4}$$

在弱收敛意义下成立。

命题 1.1 表明可运用小波变换弱积分的形式重建函数。在一般工程应用中，用级数或黎曼和比用弱积分更易处理。因此，找到$\mathbb{S}_1$的一个离散子集Λ，使得相关的函数族$\left\{\varphi_{a,t}\right\}_{(a,t)\in\Lambda}$构成级数或黎曼和逼近重构函数是关键，而要研究级数或黎曼和逼近重构函数，密度则是一个有效的工具。

设$h>0$，$\mathbb{S}_1$中单位元$e=\left(1,0_{1\times(n-1)}\right)$的邻域$Q_h$表示

$$Q_h=\tau\left[e^{-h/2},e^{h/2}\right)\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^{n},\ \tau=\{1,-1\},$$

对$(x,y)\in\mathbb{S}_1$，定义

$$Q_h\left(x,y\right)=\left(x,y\right)\cdot Q_h=\left\{\left(xa,t+A_a y\right):a\in\tau\left[e^{-h/2},e^{h/2}\right),t\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^{n}\right\}.$$

选择左不变 Haar 测度$\mu_{\mathbb{S}_1}=\frac{\mathrm{d}a}{|a|}\mathrm{d}t$定义$Q_h\left(x,y\right)$的体积：

$$\mu_{\mathbb{S}_1}\left(Q_h\left(x,y\right)\right)=\mu_{\mathbb{S}_1}\left(Q_h\right)=\int_{\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]^{n}}\int_{a\in\tau\left[e^{-h/2},e^{h/2}\right)}\frac{1}{|a|}\mathrm{d}a\mathrm{d}t=2h^{n+1}.$$

设Λ是$\mathbb{S}_1$的一个离散子集。对权函数$w:\Lambda\to R^{+}$，定Λ位于$\mathbb{S}_1$子集K中的加权元素数

$$\#_w\left(K\right)=\sum_{(a,t)\in K}w\left(a,t\right).$$

下面我们可以给出$\mathbb{S}_1$的一个离散子集Λ的上(下)加权仿射 Beurling 密度，它们类似于文献[15]中给出上(下)加权仿射 Beurling 密度。

定义 1.4 设Λ是$\mathbb{S}_1$的一个离散子集。则Λ的上加权密度为

$$D_w^{+}\left(\Lambda\right)=\limsup_{h\to\infty}\sup_{(x,y)\in\mathbb{S}_1}\frac{\#_w\left(\Lambda\cap Q_h\left(x,y\right)\right)}{2h^{n+1}}.$$

Λ的下加权密度是

$$D_w^{-}\left(\Lambda\right)=\liminf_{h\to\infty}\inf_{(x,y)\in\mathbb{S}_1}\frac{\#_w\left(\Lambda\cap Q_h\left(x,y\right)\right)}{2h^{n+1}}.$$

下面给出相应于新引入连续小波变换的离散小波系统、过采样离散仿射小波系统的定义，它们和(1.1)、(1.2)式给出的定义相类似。

定义 1.5 (离散小波系统)

设$\varphi\in L^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right),|a|>1$，和$b>0$通过对离散子集$\mathbb{S}_1$的$\Lambda_1$上的连续小波变换(1.2)进行采样

$$\Lambda_1:=\left\{\left(\mathrm{sgn}\left(a\right)|a|^{j},bm\right):j\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^{n}\right\},$$

得到了φ和Λ_1的诱导的系统形式

$$\mathcal{W}_{\varphi}\left(\Lambda_1\right)=\left\{D_{A_{a^j}^{-1}}T_{bm}\varphi=|a|^{\left(1-\frac{1}{2n}\right)j}\varphi\left(A_{a^j}\cdot-bm\right):j\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^{n}\right\}.\tag{1.5}$$

称(1.5)为离散小波系统。

过采样小波系统可以采用文献[15] [16]高维过采样仿射系统相类似的概念给出，即对离散小波系统 $\mathcal{W}_\varphi(\Lambda_1)=\left\{D_{A_{aj}^{-1}}T_{bm}\varphi: j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n\right\}$，$|a|>1$ 和 $b>0$，选择 $\{R_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\subset GL_2(\mathbb{R})$，即可定义相应的过采样小波系统如下：

定义 1.6 (过采样小波系统)

$$\mathcal{W}_\varphi^{R_j}(\Lambda)=\left\{\left|\det R_j\right|^{-1/2} D_{A_{a^j}^{-1}}T_{bR_j^{-1}m}\varphi: j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n\right\}. \tag{1.6}$$

在过采样系统中，可以选择适当的 $\{R_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$，使

$$\mathcal{W}_\varphi^{R_j}(\Lambda)=\left\{\left|\det R_j\right|^{-1/2} D_{A_{a^j}^{-1}}T_{bR_j^{-1}m}\varphi: j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n\right\}$$

位移不变，位移不变的过采样系统详见文献[17]。

注 1.2：过采样小波系统实际上是一个加权小波系统，其中

$$\Lambda=\left\{\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j, bR_j^{-1}m\right): j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n\right\}\text{ 和 } w\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j, bR_j^{-1}m\right)=\frac{1}{\left|\det R_j\right|}\text{。}$$

若选择矩阵 $R_j\,(j\in\mathbb{Z})$ 为任意的对角矩阵，可证得相应的过采样小波系统与经典小波系统具有一致加权仿射 Beurling 密度。

下面给出本文的主要结果。

定理 1.1 设 $\mathcal{W}_\varphi(\Lambda_1)=\left\{D_{A_{aj}^{-1}}T_{bm}\varphi=|a|^{\left(1-\frac{1}{2n}\right)j}\varphi\left(A_{a^j}\cdot-bm\right): j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n\right\}$ 是离散小波系统，其中 $|a|>1, b>0$，则

$$D^+(\Lambda_1)=D^-(\Lambda_1)=\frac{1}{2b^n\ln|a|}.$$

定理 1.2 若 $W_\varphi^{R_j}(\Lambda)$ 是过采样的离散小波系统，$\left\{R_j=diag\left(r_j^{11},\cdots,r_j^{nn}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是对角矩阵序列，则 Λ 具有均匀加权密度

$$D_w^+(\Lambda)=D_w^-(\Lambda)=\frac{1}{2b^n\ln|a|}.$$

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明：对 $\forall(x,y)\in\mathbb{S}_1$，$\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j, bm\right)\in Q_h(x,y)$，则

$$\left(\frac{1}{x}, -A_x^{-1}y\right)\cdot\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j, bm\right)=\left(\frac{\operatorname{sgn}(a)|a|^j}{x}, bm-A_{a^j}A_x^{-1}y\right)\in Q_h.$$

其中

$$Q_h=\tau\left[e^{-h/2}, e^{h/2}\right)\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^n.$$

因此

- 对 $\frac{\operatorname{sgn}(a)|a|^j}{x} \in \tau\left[e^{-h/2}, e^{h/2}\right)$，有

$$\log_{|a|}|x| - \frac{h}{2\ln|a|} \le j \le \log_{|a|}|x| + \frac{h}{2\ln|a|},$$

满足条件的 j 最多有 $\frac{h}{\ln|a|}+1$ 个，至少有 $\frac{h}{\ln|a|}-1$ 个。

- 当 $bm - A_{a^j}A_x^{-1}y = \gamma \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)^n$ 时，

$$m = \underbrace{\frac{1}{b}A_{a^j}A_x^{-1}y}_{=:(C_1,C_2,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}} - \frac{1}{b}\gamma.$$

即

$$C_i - \frac{h}{2b} \le m_1 \le C_i + \frac{h}{2b}, i = 1,\cdots,n.$$

即对给定的 j 值，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 最多有 $\frac{h}{b}+1$ 个，至少 $\frac{h}{b}-1$ 个值满足条件，即

$$\left[\frac{h}{\ln a}-1\right]\left[\frac{h}{b}-1\right]^n \le \#\left(\Lambda_1 \cap Q_h(x,y)\right) \le \left[\frac{h}{\ln a}+1\right]\left[\frac{h}{b}+1\right]^n.$$

于是

$$\begin{aligned} D^+(\Lambda_1) &= \limsup_{h\to\infty} \sup_{(x,y)\in\mathbb{S}_1} \frac{\#\left(\Lambda_1 \cap Q_h(x,y)\right)}{2h^{n+1}} \\ &= \limsup_{h\to\infty} \frac{h^{n+1}}{\left(b^n \ln|a|\right)2h^{n+1}}\left[1+\frac{\ln|a|}{h}\right]\left[1+\frac{b}{h}\right]^n \\ &= \lim_{h\to\infty} \frac{h^{n+1}}{\left(b^n \ln|a|\right)2h^{n+1}}\left[1+\frac{\ln|a|}{h}\right]\left[1+\frac{b}{h}\right]^n = \frac{1}{2b^n \ln|a|}. \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} D^-(\Lambda_1) &= \liminf_{h\to\infty} \inf_{(x,y)\in\mathbb{S}_1} \frac{\#\left(\Lambda_1 \cap Q_h(x,y)\right)}{2h^{n+1}} \\ &= \limsup_{h\to\infty} \frac{h^{n+1}}{\left(b^n \ln|a|\right)2h^{n+1}}\left[1-\frac{\ln a}{h}\right]\left[1-\frac{b}{h}\right]^n \\ &= \lim_{h\to\infty} \frac{h^{n+1}}{\left(b^n \ln|a|\right)2h^{n+1}}\left[1-\frac{\ln|a|}{h}\right]\left[1-\frac{b}{h}\right]^n = \frac{1}{2b^n \ln|a|}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2b^n \ln|a|} \le D^-(\Lambda_1) \le D^+(\Lambda_1) \le \frac{1}{2b^n \ln|a|}.$$

故

$$D^{+}(\Lambda_1)=D^{-}(\Lambda_1)=\frac{1}{2b^n\ln|a|}.$$

注 2.1：由定理 1.1 的证明过程中可知，对足够大的 h，有

$$\#\left(\Lambda\cap Q_h(x,y)\right)=\frac{h}{\ln|a|}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^n+\mathcal{O}\left(h^n\right).$$

即

$$\begin{aligned}D^{+}(\Lambda_1)&=\limsup_{h\to\infty}\frac{\frac{h}{\ln|a|}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^n+\mathcal{O}\left(h^n\right)}{2h^{n+1}}\\&=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{h}{\ln|a|}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^n+\mathcal{O}\left(h^n\right)}{2h^{n+1}}\\&=\liminf_{h\to\infty}\frac{\frac{h}{\ln|a|}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^n+\mathcal{O}\left(h^n\right)}{2h^{n+1}}\\&=\frac{1}{2b^n\ln|a|}=D^{-}(\Lambda_1)\end{aligned}$$

定理 1.2 的证明：对 $\forall(x,y)\in\mathbb{S}_1$。若 $\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j,bR_j^{-1}m\right)\in Q_h(x,y)$，则

$$\left(\frac{1}{x},-A_x^{-1}y\right)\cdot\left(\operatorname{sgn}(a)|a|^j,bR_j^{-1}m\right)=\left(\frac{\operatorname{sgn}(a)|a|^j}{x},bR_j^{-1}m-A_{a^j}A_x^{-1}y\right)\in Q_h.$$

这里

$$Q_h=\tau\left[e^{-h/2},e^{h/2}\right)\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^n.$$

因此

$$\log_{|a|}|x|-\frac{h}{2\ln|a|}\le j\le\log_{|a|}|x|+\frac{h}{2\ln|a|}.\tag{2.1}$$

和

$$bR_j^{-1}m-\underbrace{A_{a^j}A_x^{-1}y}_{=:(C_1,C_2,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}}=\gamma\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)^n,$$

即

$$C_i-\frac{h}{2b}\left|r_j^{ii}\right|\le m_i\le C_1+\frac{h}{2b}\left|r_j^{ii}\right|,i=1,\cdots,2.\tag{2.2}$$

对一个固定的 $(x,y)\in\mathbb{S}_1$，满足(2.1)的 j 大约有 $\frac{h}{\ln|a|}$ 个。对给定的 j,i，满足(2.2)的 m_i 大约有 $\frac{h}{b}\left|r_j^{ii}\right|$ 个，即用注 2.1 可得

$$\#_w\left(\Lambda \cap Q_h(x,y)\right) = \frac{1}{\left|\det R_j\right|}\frac{h}{\ln|a|}\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{h\left|r_j^{ii}\right|}{b} + \mathcal{O}\left(h^n\right).$$

因此

$$\begin{aligned} D_w^+(\Lambda) &= \limsup_{h\to\infty}\sup_{(x,y)\in\mathbb{S}_1}\frac{\#_w\left(\Lambda\cap Q_h(x,y)\right)}{2h^{n+1}} \\ &= \limsup_{h\to\infty}\left[\frac{h^{n+1}\left|\prod_{i=1}^{n} r_j^{ii}\right|}{2h^{n+1}b^n\ln|a|\left|\det R_j\right|} + \frac{1}{h^{n+1}}\mathcal{O}\left(h^n\right)\right] \\ &= \lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{2b^n\ln|a|} + \frac{1}{h^{n+1}}\mathcal{O}\left(h^n\right)\right] = \frac{1}{2b^n\ln a}. \end{aligned}$$

类似可证 $D_w^-(\Lambda) = \dfrac{1}{2b^n\ln|a|}$。

例 1： 令 $a=\tau e^h, b=he^{-h/2}$，显然利用定理 1.1 易知离散子集

$$X_1 = \left\{\left(\tau e^{jh}, he^{-h/2}m\right): j\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n, \tau\in\{-1,1\}\right\}$$

的密度满足

$$D^+(X_1) = D^-(X_1) = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{2h^2}.$$

同理利用定理 1.2 易知

$$D_w^+(X_1) = D_w^-(X_1) = \frac{e^{\frac{n}{2}}}{2h^2}.$$

基金项目

南昌航空大学博士启动基金(EA201807304)。

参考文献

[1] Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611970104

[2] Heil, C. and Walnut, D.F. (1989) Continuous and Discrete Wavelet Transforms. *SIAM Review*, **31**, 628-666. https://doi.org/10.1137/1031129

[3] Chui, C. and Shi, X. (2000) Orthonormal Wavelets and Tight Frames with Arbitrary Dilations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **9**, 243-264. https://doi.org/10.1006/acha.2000.0316

[4] Christensen, O. (2003) An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8224-8

[5] Frazier, M., Garrigos, G., Wang, K. and Weiss, G. (1998) A Characterization of Functions that Generate Wavelet and Related Expansions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **3**, 883-906. https://doi.org/10.1007/BF02656493

[6] Heil, C. and Kutyniok, G. (2003) Density of Weighted Wavelet Frames. *Journal of Geometric Analysis*, **13**, 479-493. https://doi.org/10.1007/BF02922055

[7] Chui, C. and Shi, X. (1994) n × Oversampling Preserves Any Tight Affine Frame for Odd n. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **121**, 511-517. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1182699-5

[8] Gressman, P., Labate, D., Weiss, G. and Wilson, E. (2003) Affine, Quasi-Affine and Co-Affine Wavelets. In: Welland,

G.W., Ed., *Beyond Wavelets*, Elsevier, Amsterdam, Studies in Computational Mathematics, Vol. 10, 215-224. https://doi.org/10.1016/S1570-579X(03)80036-8

[9] Hermandez, E., Labate, D., Weiss, G. and Wilson, E. (2004) Oversampling, Quasi-Affine Frames and Wave Packets. *Applied and Computational Harmonic Analysis* **16**, 111-147. https://doi.org/10.1016/j.acha.2003.12.002

[10] Johnson, B. (2003) On the Oversampling of Affine Wavelet Frames. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **35**, 623-638. https://doi.org/10.1137/S0036141002406758

[11] 杜红，崔明根. 一种新的连续小波变换[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2005, 22(6): 777-780.

[12] 刘军，李瑜. 连续小波变换的一种新形式[J]. 济宁学院学报, 2009, 30(6): 38-39.

[13] Heil, C. and Kutyniok, G. (2003) Density of Weighted Wavelet Frames. *The Journal of Geometric Analysis*, **13**, 479-493. https://doi.org/10.1007/BF02922055

[14] Kutyniok, G. (2007) Affine Density in Wavelet Analysis. Springer, Berlin.

[15] Frazier, M., Garrigós, G., Wang, K., *et al*. (1997) A Characterization of Functions that Generate Wavelet and Related Expansion. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **3**, 883-906. https://doi.org/10.1007/BF02656493

[16] Kutyniok, G. (2003) Computation of the Density of Weighted Wavelet Systems. *Wavelets*: *Applications in Signal and Image Processing X*, Vol. 5207, 393-404. https://doi.org/10.1117/12.503676

[17] Hernández, E., Labate, D., Weiss, G., *et al*. (2004) Oversampling, Quasi-Affine Frames, and Wave Packets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **16**, 111-147. https://doi.org/10.1016/j.acha.2003.12.002