Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(9), 1441-1456
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.129157

分数次极大算子及其交换子在 Lie 群作用下的广义 Orlicz-Morrey 空间上的估计

芮 俪，逯光辉*，李雪梅

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年8月7日；录用日期：2022年9月6日；发布日期：2022年9月13日

摘 要

本文首先给出分层李群 $\mathbb{G}$ 作用下的广义 **Orlicz-Morrey** 空间 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 的定义，其次利用 **Hölder** 不等式以及函数分解方法，得到了分数次极大算子 M_α 在此空间上的有界性估计，最后证明了分数次极大算子 M_α 与 BMO 函数生成的交换子 $M_{b,\alpha}$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ 上的有界性。

关键词

分数次极大算子，交换子，广义 **Orlicz-Morrey** 空间，$\mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ 空间，**Lie** 群

Fractional Maximal Operator and Its Commutator on Generalized Orlicz-Morrey Spaces over Lie Groups

Li Rui, Guanghui Lu*, Xuemei Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Aug. 7^{th}, 2022; accepted: Sep. 6^{th}, 2022; published: Sep. 13^{th}, 2022

* 通讯作者。

文章引用: 芮俪, 逯光辉, 李雪梅. 分数次极大算子及其交换子在 Lie 群作用下的广义 Orlicz-Morrey 空间上的估计[J]. 理论数学, 2022, 12(9): 1441-1456. DOI: 10.12677/pm.2022.129157

Abstract

This article first gives the definition of generalized Orlicz-Morrey $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ on stratified Lie group $\mathbb{G}$; second proves that the fractional maximal operator M_α is bounded from spaces $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ into spaces $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ by means of Hölder inequality and the method of function decomposition. Furthermore, the boundedness of the commutator $M_{b,\alpha}$ generated by $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ from spaces $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ into spaces $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ is also obtained.

Keywords

Fractional Maximal Operator, Commutator, Generalized Orlicz-Morrey Space, Space $\mathrm{BMO}(\mathbb{G})$, Lie Group

1. 引言及主要结果

众所周知, Orlicz 空间的定义可以建立在 [1,2] 经典 Lebesgue 空间的扩展之上, 它在调和分析和偏微分方程中起着关键作用 (参见 [3–7]). 自此, 许多文章都集中讨论 Orlicz 空间的性质以及在这些空间上的积分算子的有界性. 例如, 在 2012 年, Kawasumi 和 Nakai 在文献 [8] 中得到了 Orlicz 空间上卷积算子的傅立叶变换的一些性质, 更多关于 Orlicz 空间的研究可见文献 [9–12].

紧接着, 在 2004 年, Nakai 首次获得了 Orlicz-Morrey 空间的定义 (见文献 [13]). 此后, Orlicz-Morrey 空间上的积分算子的有界性受到广泛关注. 例如, 在文献 [14] 中作者研究了 Orlicz 极大算子, Orlicz 分数次极大算子和分数次积分算子在 Morrey 空间和 Orlicz-Morrey 空间上的有界性. 最近, Yamaguchi 和 Nakai 在文献 [15] 中得到了 Orlicz-Morrey 空间上交换子 $[b,T]$ 和 $[b,I_\rho]$ 紧性的充要条件. 在文献 [16]中, Sawano 等人估计了在 Orlicz-Morrey 空间上的广义分数积分算子和广义分数极大算子的有界性. 此外, Hasanov 在文献 [17] 中首次提出了广义 Orlicz-Morrey 空间的定义, 并得到了这些空间上 Φ 可允许的次线性奇异算子的有界性. 关于积分算子在广义 Orlicz-Morrey 空间上的各种性质可参见文献 ([18–24]).

受上述结果和文献 [25] 的启发, 在本文中, 作者主要考虑了分数极大算子及其交换子在任意分层李群上的广义 Orlicz-Morrey 空间上的有界性.

我们首先回顾一些关于分层 Lie 群的初步研究 (参加文献 [17,26–28]). 假设 $\mathbb{G}$ 是与 $\mathcal{G}$ 相关的 Lie 群, 其中 $\mathcal{G}$ 是有限维, 幂指数为零的分层 Lie 代数, 则这个指数映射是从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathbb{G}$ 的全局微分同胚映射. 因此, $x=(x_{ij})\in\mathbb{R}^N$, $1\le i\le K_j$, $1\le j\le m$, $N=\sum\limits_{j=1}K_j$, 对任意的 $g\in\mathbb{G}$, 有 $g=\exp(\sum x_{ij}X_{ij})$. $\mathbb{G}$ 上的齐次范数函数 $|\cdot|$ 通过 $|g|=(\sum|x_{ij}|^{2\cdot m!/j})$ 和 $\mathcal{Q}=\sum\limits_{j=1}jk_j$ 来定义, 称作 $\mathbb{G}$ 的齐次维. $\mathbb{G}$ 上的扩张 $\xi_r(r>0)$ 可定义为:

$$\xi_r(g)=\exp(\sum r^j x_{ij}X_{ij}),\ \ g=\exp(\sum x_{ij}X_{ij}).$$

其中 $\mathrm{d}(\xi_r x)=r^{\mathcal{Q}}\mathrm{d}x$.

2022 年, 文献 [25] 中首次讨论了分数极大算子及其交换子在任意分层 Lie 群上的 Orlicz-Morrey 空间上的性质. 同时, 也产生了很多关于分层 Lie 群上的广义 Orlicz-Morrey 空间上的相关性质研究.

$\mathbb{G}$ 上的齐次范数是从 $\mathbb{G}$ 到 $[0,\infty)$ 定义在 $\mathbb{G}\setminus\{0\}$ 上的 C^∞ 连续函数, 存在 $x\to\rho(x)$, 使得满足下列条件:

(1) $\rho(x^{-1})=\rho(x)$,

(2) 对任意的 $r>0$, 有 $\rho(\xi_r x)=r\rho(x)$,

(3) 对任意的 $x,y\in\mathbb{G}$, 有 $\rho(xy)\le c_0(\rho(x)+\rho(y))$.

根据上述范数, 我们通过 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{G}:\rho(y^{-1}x)<r\}$ 定义以 x 为中心, r 为半径的球, 用 $B(x,r)^{\mathrm{c}}=\mathbb{G}\backslash B(x,r)$ 表示 $B(x,r)$ 的补集, 其中 $c=c(\mathbb{G})$,

$$|B(x,r)|=cr^{\mathcal{Q}},x\in\mathbb{G},r>0.$$

分数次极大算子有界性理论在变指标函数空间上已经进行了广泛的研究, 可参见文献([29–32]). 分数次极大算子可 (见 [25]) 定义为:

$$M_\alpha f(x)=\sup_{x>0,r>0}|B(x,r)|^{-1+\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy, \tag{1.1}$$

其中 $|B(x,r)|$ 表示 $B(x,r)$ 上的 Haar 测度.

下面我们回忆一下关于 Young 函数的一些记号.

定义1.1 [25] 如果函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是凸的, 连续的, 即 $\lim\limits_{r\to+0}\Phi(r)=\Phi(0)=0$ 且 $\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r)=\infty$, 那么称 Φ 为 Young 函数.

由 Young 函数的凸性和 $\Phi(0)=0$ 可以看出: 任意的 Young 函数都为增函数. 如果存在 $s\in(0,\infty)$ 使得 $\Phi(r)=\infty$, 有 $r\ge s$.

令 Γ 为所有 Young 函数 Φ 的集合, 使得

$$0<\Phi(r)<\infty,\ \ 0<r<\infty.$$

如果 $\Phi\in\Gamma$, 则 Φ 在 $[0,\infty)$ 中的每个闭区间上绝对连续, 并且从 $[0,\infty)$ 到其自身为双射.

一个 Young 函数 Φ 如果满足 $\Phi(2r)\le c\Phi(r)$, $r>0$. 其中 $C>1$, 那么称 Φ 满足 $\triangle_2$-条件, 记作 $\Phi\in\triangle_2$. 如果 $\Phi\in\triangle_2$, 那么 $\Phi\in\Gamma$. 一个 Young 函数 Φ 若满足 $\Phi(2r)\le\frac{1}{2c}\Phi(cr)$, $r\ge 0$, 其中 $c>1$, 则称 Φ 满足 ∇_2-条件, 记作 $\Phi\in\nabla_2$.

对于一个 Young 函数 Φ 且 $0\le s\le\infty$, 当 $\Phi\in\Gamma$ 时, 称 Φ^{-1} 为 Φ 的逆函数. 且有

$$\Phi(\Phi^{-1}(r))\le r\le\Phi^{-1}(\Phi(r)),\ 0\le r<\infty,$$

其中 Φ^{-1} 可定义为:

$$\Phi^{-1}(s)=\inf\{r\ge 0:\Phi(r)>s\}\ \ (\inf\emptyset=\infty).$$

显然有

$$r\le\Phi^{-1}(r)\tilde{\Phi}^{-1}(r)\le 2r\quad,r\ge 0,$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 的定义为:

$$\tilde{\Phi}=\begin{cases}\sup\{rs-\Phi(s):s\in[0,\infty)\}, & r\in[0,\infty),\\ \infty, & r=\infty.\end{cases}$$

下面给出分层 Lie 群上的有界平均振荡空间 (= BMO) 的定义:

定义1.2 [32]　BMO($\mathbb{G}$) 空间可定义为:

$$BMO(\mathbb{G})=\{b\in L^1_{\text{loc}}:\|b\|_{\text{BMO}(\mathbb{G})}<\infty\}$$

$$\|b\|_{\text{BMO}(\mathbb{G})}:=\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_B|\mathrm{d}x<\infty,\tag{1.2}$$

其中对所有的 $B\subset\mathbb{G}$ 取上确界, 且 b_B 为 b 在 B 上的平均值.

给定一个函数 $b\in\text{BMO}(\mathbb{G})$, 交换子 $M_{\alpha,b}$ 和 $[b,M_\alpha]$ 可分别定义为:

$$M_{\alpha,b}(f)(x)=\sup_B|B|^{-1+\frac{\alpha}{Q}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y,\tag{1.3}$$

$$[b,M_\alpha](f)(x)=\sup_B|B|^{-1+\frac{\alpha}{Q}}\int_B(b(x)-b(y))|f(y)|\mathrm{d}y.\tag{1.4}$$

许多学者研究了 $M_{b,\alpha}$ 和 $[b,M_\alpha]$ 的映射特性,即 $[b,M_\alpha]$ 可由 $M_{b,\alpha}$ 控制, 参考文献 [33–36], 故本文只需要对交换子 $M_{b,\alpha}$ 进行性质估计.

下面给出 Lie 群作用下的 Orlicz 空间的定义.

定义1.3 [25]　对于一个 Young 函数 Φ, Orlicz 空间可定义为:

$$L^\Phi(\mathbb{G})=\left\{f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G}):\int_{\mathbb{G}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}x<\infty\ \text{ for some }\lambda>0\right\},$$

其中 $L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ 是对任意的球 $B\subset\mathbb{G}$ 都有 $f\chi_B\in L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 函数 f 的集合.
$L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 是一个 Banach 空间, 其空间范数为:

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{G}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}x\le 1\right\}. \tag{1.5}$$

根据 Orlicz 空间的定义, 我们有

$$\int_{\Omega}\Phi(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)}})\mathrm{d}x\le 1, \tag{1.6}$$

其中 $\|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)}=\|f\chi_\Omega\|_{L^{\Phi}}$ 以及 $\|f\|_{WL^{\Phi}(\Omega)}=\|f\chi_\Omega\|_{WL^{\Phi}}$.

定义1.4 [37] 设 $\varphi(x,r)$ 是 $\mathbb{G}\times(0,\infty)$ 上的一个正可测函数, 并且 Φ 是任意的 Young 函数, 则广义 Orlicz-Morry 空间 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 可定义为:

$$\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})=\{f\in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G}):\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}=\sup_{x\in\ \mathbb{G},t>0}\varphi(x,t)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}. \tag{1.7}$$

同时, 弱广义 Orlicz-Morry 空间 $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 可定义为:

$$\|f\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}=\sup_{x\in\mathbb{G},t>0}\varphi(x,t)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|f\|_{WL^{\Phi}(B(x,t))}<\infty. \tag{1.8}$$

注记1.5 (1) 如果 $\Phi(r)=r^p,1\le p<\infty$, 那么广义 Orlicz-Morry 空间 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 等价于广义 Morry 空间 $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{G})$.

(2) 如果 $\varphi(r)=\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$, 那么广义 Orlicz-Morry 空间 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 等价于 Orlicz 空间 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$.
本文的主要定理表述如下

定理1.6 [**Spanne-型结果**] 设 Φ,Ψ为 Young 函数, $0<\alpha<\mathcal{Q}$. 且 $\varphi_1,\varphi_2\in\Gamma_\Phi$.

(1) 设

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})\le C\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}),\Phi\in\nabla_2. \tag{1.9}$$

那么条件

$$\sup_{r<t<\infty}\varphi_1(t)\frac{\Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})}{\Phi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})}\le C\varphi_2(r), \tag{1.10}$$

是 M_α 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 上有界的充分条件, 其中 $r>0$, 且 C 是与 r 无关的正常数.

(2) 设 φ_1 是一个几乎处处递减的函数, 且 $\Phi\in\nabla_2$, 则条件

$$\varphi_1(r)r^{\alpha}\le C\varphi_2(r),$$

是 M_α 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界的必要条件, 其中 $r>0$, 且 C 是与 r 无关的正常数.

(3) 设条件

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \le C\varphi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}),\ r > 0,$$

满足下列不等式:

$$\sup_{r<t<\infty} \varphi_1(t)\frac{\Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})}{\Phi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})} \le C\varphi_1(r)r^{\alpha},\ r > 0.$$

其中 $\Phi \in \nabla_2$, φ_1 是几乎处处递减的函数, 且 $C > 0$ 是与 r 无关的常数. 那么条件

$$\varphi_1(r)r^{\alpha} \le C\varphi_2(r)$$

是 M_{α} 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 有界的充要条件.

定理1.7 [**Adams-型结果**] 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, Φ 为 Young 函数, $\varphi \in \Gamma_{\Phi}$ 几乎处处递减, $\eta(t) = \varphi(t)^{\beta}$, $\Phi(t)^{\beta} = \Psi(t)$ 以及 $\Psi(t) = \Phi(t^{1/\beta})$, 其中 $\beta \in (0, 1)$.

(1) $\Phi \in \nabla_2$, 不等式

$$t^{\alpha}\varphi(t) \le C\varphi(t)^{\beta}, t > 0, \tag{1.11}$$

是 M_{α} 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ 有界的充分条件, 其中 C 是与 r 无关的正常数.

(2) 不等式

$$t^{\alpha} \le C\varphi(t)^{\beta-1}, t > 0,$$

是 M_{α} 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ 有界的必要条件, 其中 C 是与 r 无关的正常数.

(3) 不等式

$$t^{\alpha} \le C\varphi(t)^{\beta-1}, t > 0,$$

是 M_{α} 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ 有界的充要条件, 其中 C 是与 r 无关的正常数, 且 $\Phi \in \nabla_2$.

注记1.8 根据定义 1.6 以及引理 3.1, 我们知道当 $\alpha = 0$ 时, M 是从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})$ 有界.

定理1.9 [**Spanne-型结果**] 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ 且 Φ, Ψ 为 Young 函数.

(1) 设 $\Phi \in \nabla_2$, $\varphi(t)$, 其中 $\varphi_1 \in \Gamma_{\Phi}$ 及 $\varphi_2 \in \Gamma_{\Psi}$. 满足下列条件:

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) + \sup_{r<t<\infty}(1 + \frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})t^{\alpha} \le C\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$$

则不等式:

$$\sup_{r<t<\infty} \varphi_1(t)(1 + \frac{t}{r})\frac{\Phi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})}{\Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})} \le C\varphi_2(r)$$

是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 上有界的充分条件.

(2) 设 φ_1 几乎处处递减, 且 $\Psi \in \triangle_2$, 则不等式:

$$\varphi_1(t)t^{\alpha} \le C\varphi_2(t)$$

是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$上有界的必要条件.

(3) 设 φ_1 几乎处处递减 , $\Phi \in \triangle_2 \cap \triangledown_2$ 以及 $\Psi \in \triangle_2$, 条件 (1.9) 是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 上有界的充要条件.

上述结果可以采用与文献 [4]中的引理 6.1 类似的证明方法来证明, 为简洁起见, 此处不再赘述.

定理1.10 [**Adams-型结果**] 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ 且 Φ, Ψ 为 Young 函数.

(1) 设 $\Phi \in \triangle_2 \cap \triangledown_2$, $\Psi \in \triangle_2$, 其中 $\varphi_1 \in \Gamma_\Phi$ 且 $\varphi_2 \in \Gamma_\Psi$. 条件

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \leq C \Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$$

是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 上有界的充分条件.

(2) 设 φ_1 几乎处处递减 , 且 $\Psi \in \triangle_2$, 则条件

$$\varphi_1(t) t^\alpha \leq C \varphi_2(t)$$

是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$上有界的必要条件.

(3) 设 φ_1 几乎处处递减, $\Phi \in \triangle_2 \cap \triangledown_2$ 且 $\Psi \in \triangle_2$, 条件 (1.9) 是 $M_{b,\alpha}(\mathbb{G})$ 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 上有界的充要条件.

全文中, C 表示与主要参数无关的常数, 其值在不同的地方可能不尽相同.

2. 预备知识

在本节中, 为了证明主要定理, 我们首先回顾一些引理.

引理2.1 [22] 设 Φ 为一个 Young 函数.

(1) 若 M 从空间 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 到空间 $WL^\Phi(\mathbb{G})$ 有界时, 不等式

$$\|Mf\|_{WL^\Phi(\mathbb{G})} \leq C_0 \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{G})}$$

成立, 其中 C_0 是与 f 无关的常数.

(2) M 在 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 上有界时, 当且仅当 $\Phi \in \nabla_2$ 不等式:

$$\|Mf\|_{L^\Phi(\mathbb{G})} \leq C_0 \|f\|_{L^\Phi(\mathbb{G})}$$

成立, 其中 C_0 是与 f 无关的常数.

引理2.2 [19] 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, Φ, Ψ 为 Young 函数 且 $\Phi \in \Gamma$, $\Phi \in \nabla_2$. 那么条件:

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \leq C \Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$$

是 M_α 从 $L^\Phi(\mathbb{G})$ 到 $L^\Psi(\mathbb{G})$ 上有界的充要条件, 其中 $r > 0$, C 是与 r 无关的正常数.

引理2.3 [19] 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ 且 $\Phi \in \Upsilon$, Ψ 为 Young 函数.

(1) 当 $\Phi \in \nabla_2$ 且条件 (3.1) 成立, 那么条件 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ 是 $M_{b,\alpha}$ 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 上有界的充分条件.

(2) 当 $\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \lesssim r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$, 那么条件 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$是 $M_{b,\alpha}$ 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 上有界的必要条件.

(3) 当 $\Phi \in \nabla_2$ 以及 $\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \approx r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})$, 那么条件 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{G})$ 是 $M_{b,\alpha}$ 从 $L^{\Phi}(\mathbb{G})$ 到 $L^{\Psi}(\mathbb{G})$ 有界的充要条件.

引理2.4 [29] 设 $E \subset \mathbb{G}$ 是有限 Haar 测度, 且 Φ 为 Young 函数, 则:

$$\|\chi_E\|_{L^{\Phi}(\mathbb{G})} = \|\chi_E\|_{WL^{\Phi}(\mathbb{G})} = \frac{1}{\Phi^{-1}(|E|^{-1})}.$$

引理2.5 [29] 对于 Young 函数 Φ 以及任意球 B, 有:

$$\int_B |f(y)|\mathrm{d}y \le 2|B|\Phi^{-1}(|B|^{-1})\|f\|_{L^{\Phi}(B)}.$$

引理2.6 设 f, g 为 E 上的可测函数, 且 $E \subset \mathbb{G}$ 为可测集. 对于 Young 函数 Φ 及其补函数 $\tilde{\Phi}$, 有:

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \le 2\|f\|_{L^{\Phi}(E)}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}}(E)}.$$

引理2.7 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, Φ, Ψ 为 Young 函数. 若存在一个正常数 C 使得:

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}) \le C\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}}).$$

则对于任何 $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ 且 $B = B(x, r)$, 我们有:

$$\|M_\alpha f\|_{WL^{\Psi}(B)} \le \frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}.$$

引理2.8 [4] 设 $B_0 = B(x_0, r_0)$, 则 $|B_0|^{\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}} \lesssim M_\alpha\chi_{B_0(x)}$, 其中任意 $x \in B_0$.

3. 定理1.6和定理1.7的证明

由于直接利用广义 Olicz-Morrey 空间的定义证明有界性存在一定的困难, 所以我们首先要得到分数次极大算子在 Olicz 空间上的一个不等式, 即有界性证明的桥梁.

引理 3.1 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$, 且 Φ, Ψ 为 Young 函数. 设 Φ^{-1} 和 Ψ^{-1} 满足条件 (1.10), 则对任意的 $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$, 有:

$$\|M_\alpha f\|_{L^{\Psi}(B)} \le \frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\|f\|_{L^{\Phi}(B(x,t))}.$$

证明引理 3.1 对于任意的 $f \in L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$, 设 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{2k_0B}$, $f_2 = f\chi_{(2k_0B)^c}$. 那

么

$$M_\alpha f(z) = M_\alpha f_1(z) + M_\alpha f_2(z).$$

根据引理2.3, 我们有

$$\begin{aligned}\|M_\alpha f_1\|_{L^\Psi(B)} &\le \|M_\alpha f_1\|_{L^\Psi(\mathbb{G})} \le C\|f_1\|_{L^\Phi(\mathbb{G})}\\ &= C\|f\|_{L^\Phi(B(x,2k_0r))},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\Phi(B(x,2k_0r))} &= \|f\|_{L^\Phi(B(x,2k_0r))} \sup_{t>2k_0r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\Psi(t^{-\mathcal{Q}})\\ &\le \frac{\|f\|_{L^\Phi(B(x,2k_0r))}}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>2k_0r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\\ &\le \frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>2k_0r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}.\end{aligned}$$

设 z 为 B 中的任意一点, 当 $B(z,t)\cap(\mathbb{G}\backslash 2k_0B) \neq \varnothing$ 时, 那么 $t > r$. 同时, 如果 $y \in B(z,t)\cap(\mathbb{G}\backslash 2k_0B)$, 我们就可以得到 $t > \rho(y^{-1}z) \ge \frac{1}{k_0}\rho(x^{-1}y) - \rho(x^{-1}z) > 2r - r = r$, 其中 k_0 是满足 $\rho(yz) = k_0(\rho(y) + \rho(z))$ 的常数.

另一方面, 如果 $y \in B(z,t)\cap(\mathbb{G}\backslash 2k_0B)$, 我们有 $\rho(x^{-1}y) \le \rho(y^{-1}z)+\rho(x^{-1}z) < t+r < 2t \le 2k_0t$. 所以,

$$\begin{aligned}M_\alpha f_2(z) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(z,t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}} \int_{B(z,t)\cap(2k_0B)^c} |f(y)|\mathrm{d}y\\ &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(z,t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}} \frac{|B(x,2k_0t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}}{|B(x,2k_0t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}} \int_{B(z,t)\cap(2k_0B)^c} |f(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C\sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2k_0t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}} \int_{B(x,2k_0t)} |f(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C\sup_{t>2k_0r} \frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{\mathcal{Q}}}} \int_{B(x,t)} |f(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

利用引理 2.5, 我们有

$$\begin{aligned}\|M_\alpha f_2\|_{L^\Psi(B)} &\le C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>r} t^{\alpha-\mathcal{Q}}|B(x,t)|\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}\\ &\le C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}.\end{aligned}$$

结合以上估计, 可以得到:

$$\|M_\alpha f\|_{L^\Psi(B)} \le C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-\mathcal{Q}})} \sup_{t>r} \Psi^{-1}(t^{-\mathcal{Q}})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}.$$

证明定理 1.6 (1) 通过利用引理 3.1 以及 (1.10), 我们有

$$\begin{aligned}\|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})} &= \sup_{X\in\mathbb{G},r>0}\varphi_2^{-1}(x,r)\Psi^{-1}(r^{-Q})\|M_\alpha f\|_{\mathcal{L}^\Psi(B)}\\ &\le C\sup_{X\in\mathbb{G},r>0}\varphi_2^{-1}(x,r)\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-Q})\|f\|_{\mathcal{L}^\Phi(B(x,t))}\\ &\le C\sup_{X\in\mathbb{G},r>0}\varphi_2^{-1}(x,r)\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-Q})\Phi(t^{-Q})\varphi_1(x,t)\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})}\\ &\le \|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\psi_1}(\mathbb{G})},\end{aligned}$$

(2) 令 $B_0=B(x_0,t_0)$ 且 $x\in B_0$, 则结合引理 2.8 我们有 $r_0^\alpha\le M_\alpha\chi_{B_0(x)}$. 再取 orlicz 范数, 且 M_α 从 $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})$ 是有界的, 可以得到:

$$\begin{aligned}r_0^\alpha &\lesssim \Psi^{-1}(|B_0|^{-1})\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{L^\psi(B_0)}\\ &\lesssim \varphi_2(x_0,t_0)\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})}\\ &\lesssim \varphi_2(x_0,t_0)\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})}\\ &\lesssim \frac{\varphi_2(x_0,t_0)}{\varphi_(x_0,t_0)}.\end{aligned}$$

(3) 定理的第三部分证明可以根据定理的第一部分和第二部分得到.

证明定理 1.7 (1) 令 $B:=B(x,r)$ 是一个以 x 为中心, 以 r 为半径的球. 下面我们将 f 分解为:

$$f:=f_1+f_2=f\chi_B+f\chi_{\mathbb{G}\backslash 2B}.$$

通过算子 M_α 的次线性, 有

$$M_\alpha f(x)\le M_\alpha f_1(x)+M_\alpha f_2(x)=\mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2.$$

根据文献 [38] 的 Hedberg 技巧, 很容易得到:

$$\mathrm{D}_1=M_\alpha f_1(x)\le Cr^\alpha Mf(x).$$

现在我们来估计 D_2, 结合式 (1.1) 和引理 2.5, 我们有:

$$\begin{aligned}M_\alpha f_2(x) &= \sup_{t>0}\frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{Q}}}\int_{B(x,t)}|f_2(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C\sup_{t>0}\frac{t^\alpha}{|B(z,t)|}\int_{B(x,t)\bigcap\{\mathbb{G}\backslash 2B(z,r)\}}|f(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C\sup_{r<t<\infty}\frac{t^\alpha}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}|f(y)|\mathrm{d}y\\ &\le C\sup_{r<t<\infty}t^\alpha\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))}.\end{aligned}$$

此外, 结合定义 1.4, 式 (1.11)以及对 D_1 和 D_2 的估计, 我们可以推断出:

$$\begin{aligned}
M_\alpha f(x) &\leq Cr^\alpha Mf(x) + C\sup_{r<t<\infty} t^\alpha \Phi^{-1}(|B(z,t)|^{-1})\|f\|_{L^\Phi(B(x,t))} \\
&\leq Cr^\alpha Mf(x) + C\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \sup_{r<t<\infty} t^\alpha \varphi(t) \\
&\leq C[\varphi(r)]^\beta[\varphi(r)]^{-1}Mf(x) + C[\varphi(r)]^\beta\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \\
&\leq C[\varphi(r)]^{\beta-1}Mf(x) + C[\varphi(r)]^\beta\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \\
&\leq \min\left\{C\varphi(r)^{\beta-1}Mf(x), C\varphi(r)^\beta\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}\right\} \\
&\leq \sup_{s>0}\min\left\{Cs^{\beta-1}Mf(x), Cs^\beta\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}\right\} \\
&\leq C(Mf(x))^\beta\|f\|^{1-\beta}_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})},
\end{aligned}$$

结合定义 1.3, 我们有:

$$\int_B \Psi\left(\frac{(Mf(z))^\beta}{\|Mf\|^\beta_{L^\Phi(B)}}\right)\mathrm{d}z = \int_B \Phi\left(\frac{Mf(z)}{\|Mf\|_{L^\Phi(B)}}\right)\mathrm{d}z \leq 1,$$

关于上述不等式取上确界, 很容易得到:

$$\|(Mf)^\beta\|_{L^\Psi(B)} \leq \|Mf\|^\beta_{L^\Phi(B)}. \tag{3.1}$$

通过定义 1.4, 引理 2,1 以及式 (3.1), 我们有:

$$\begin{aligned}
\|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})} &= \sup_{x\in G,t>0} \eta(x,t)^{-1}\Psi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|M_\alpha(f)\|_{L^\Psi(B(x,t))} \\
&\leq C\sup_{x\in G,t>0} \eta(x,t)^{-1}\Psi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|(Mf(x))^\beta\|_{L^\Psi(B(x,t))}\|f\|^{1-\beta}_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \\
&\leq C\left\{\sup_{x\in G,t>0} \varphi(x,t)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\|Mf\|_{L^\Phi(B(x,t))}\right\}^\beta \|f\|^{1-\beta}_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \\
&\leq C\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})}.
\end{aligned}$$

(2) 令 $B_0 = B(x_0,t_0)$ 且 $x \in B_0$. 根据引理 2.8, 我们有:

$$r_0^\alpha \leq CM_\alpha\chi_{B_0}(x).$$

因此, 对上述不等式取 Orlicz 范数, 我们有:

$$\begin{aligned}
r_0^\alpha &\leq C\Psi^{-1}(t_0^{-Q})\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{L^\Psi(B_0)} \\
&\leq C\eta(t_0)\|M_\alpha\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{G})} \\
&\leq C\eta(t_0)\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{G})} \\
&\leq C\varphi(t_0)^{\beta-1}.
\end{aligned}$$

(3) 定理的第三部分证明可以根据定理的第一部分和第二部分得到.

4. 定理1.10的证明

为了证明定理 1.10, 我们需要以下引理:

引理4.1 [25] 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$, 则下列条件等价:

(1) $b \in \text{BMO}(\mathbb{G})$ 且 $f^- \in L^\infty(\mathbb{G})$.

(2) 存在 $t \in [1, \infty)$, 有不等式:

$$\sup_B \frac{\|(f(\cdot) - M_B(f)(\cdot))\chi_B\|_{L^t(\mathbb{G})}}{\|\chi_B\|_{L^t(\mathbb{G})}} \le C.$$

(3) 对于所有的 $t \in [1, \infty)$, (2) 中的不等式成立.

引理4.2 [25] 设 $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$ 且 $B_0 := B(x_0, r_0)$, 则下列不等式成立:

$$r_0^\alpha |b(x) - b_{B_0}| \le CM_{b,\alpha}\chi_{B_0}(x), \quad \forall x \in B_0.$$

同时, 我们需要对 BMO($\mathbb{G}$) 空间进行描述, 可见参考文献 [39].

引理4.3 设 $f \in \text{BMO}(\mathbb{G})$ 以及 $\Phi \in \triangle_2$ 为 Young 函数, 则

$$\|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{G})} \approx \sup_B \Phi^{-1}(|B|^{-1})\|f(\cdot) - f_B\|_{L^\Phi(B)},$$

其中上确界表示所有的球 $B \subset \mathbb{G}$.

下面对分数次极大算子的交换子的估计可见文献 [40], 即分数次极大算子的控制关系.

引理4.4 设 $0 < \alpha < \mathcal{Q}$ 以及 $b \in \text{BMO}(\mathbb{G})$. 则存在常数 $C > 0$ 使得对任意的 $x \in \mathbb{G}$ 和 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{G})$, 有:

$$M_{b,\alpha}f(x) \le C\|b\|_{\text{BMO}(\mathbb{G})}[M(M_\alpha f)(x) + M_\alpha(Mf)(x)].$$

证明定理 1.10 (1) 通过结合定理 1.7 (1) 和引理 4.4, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\|M_{b,\alpha}f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})}\\
&\le C\|b\|_{\text{BMO}}\|M(M_\alpha f) + M_\alpha(Mf)\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})}\\
&\le C\|b\|_{\text{BMO}}(\|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})} + \|Mf\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})})\\
&\le C\|b\|_{\text{BMO}}\|f\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})}.
\end{aligned}$$

(2) 令 $B_0 = B(x_0, t_0)$. 根据定义 1.4, 定理 2.4, 4.2 及定理 4.3, 我们有:

$$\begin{aligned} t_0^\alpha &\le C\frac{\|M_{b,\alpha}\chi_{B_0}\|_{L^\Psi(B_0)}}{\|b(\cdot)-b_{B_0}\|_{L^\Psi(B_0)}} \\ &\le C\frac{1}{\|b\|_{\mathrm{BMO}}}\|M_{b,\alpha}\chi_{B_0}\|_{L^\Psi(B_0)}\Psi^{-1}(|B_0|^{-1}) \\ &\le C\frac{1}{\|b\|_{\mathrm{BMO}}}\varphi_2(t_0)\|M_{b,\alpha}\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{G})} \\ &\le C\varphi_2(t_0)\|\chi_{B_0}\|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{G})} \\ &\le C\frac{\varphi_2(t_0)}{\varphi_1(t_0)}. \end{aligned}$$

(3) 定理的第三部分证明可以根据定理的第一部分和第二部分得到.

基金项目

甘肃省高等学校科研项目(2020A-010); 西北师范大学青年教师科研能力提升项目(NWNU-LKQN2020-07).

参考文献

[1] Birnbaum, Z. and Orlicz, W. (1931) Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinander konjugierten potenzen. *Studia Mathematica*, **3**, 1-67. https://doi.org/10.4064/sm-3-1-1-67

[2] Orlicz, W. (1932) Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. *Bull. Int. Acad. Pol. Ser. A*, **8**, 207-220. (Reprinted in: Collected Papers, PWN, Warszawa, 1988, 217-230)

[3] Aberqi, A., Bennouna, J. and Elmassoudi, M. (2021) Nonlinear Elliptic Equations with Measure Data in Orlicz Spaces. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, **73**, 1587-1611. https://doi.org/10.37863/umzh.v73i12.1290

[4] Bourahma, M., Benkirane, A. and Bennouna, J. (2021) Existence of Renormalized Solutions for a Class of Nonlinear Parabolic Equations with Generalized Growth in Orlicz Spaces. *Khayyam Journal of Mathematics*, **7**, 140-164.

[5] Mohamed, M.M.A. (2021) Nonlinear Quadratic Volterra-Urysohn Functional-Integral Equations in Orlicz Spaces. *Filomat*, **35**, 2963-2972. https://doi.org/10.2298/FIL2109963M

[6] Bourahma, M., Benkirane, A. and Bennouna, J. (2020) Existence of Renormalized Solutions for Some Nonlinear Elliptic Equations in Orlicz Spaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **69**, 231-252. https://doi.org/10.1007/s12215-019-00399-z

[7] Zhang, C., Li, C. and Meng, F. (2022) Global Attractors in Orlicz Spaces for Reaction-Diffusion Equations. *Applied Mathematics Letters*, **123**, Article ID: 107294. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107294

[8] Kawasumi, R. and Nakai, E. (2020) Pointwise Multipliers on Weak Orlicz Spaces. *Hiroshima Mathematical Journal*, **50**, 169-184. https://doi.org/10.32917/hmj/1595901625

[9] Asadzadeh, J.A. and Jabrailova, A.N. (2021) On Stability of Bases From Perturbed Exponential Systems in Orlicz Spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **11**, 196-213.

[10] Chamorro, D. (2022) Mixed Sobolev-Like Inequalities in Lebesgue Spaces of Variable Exponents and in Orlicz Spaces. *Positivity*, **26**, 5-21. https://doi.org/10.1007/s11117-022-00882-5

[11] Rao, M.M. and Ren, Z. (2002) Applications of Orlicz Spaces. Marcel Dekker Inc., New York.

[12] Tran, M. and Nguyen, T. (2022) Weighted Distribution Approach to Gradient Estimates for Quasilinear Elliptic Double-Obstacle Problems in Orlicz Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **509**, Article ID: 125928. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125928

[13] Nakai, E. (2004) Generalized Fractional Integrals on Orlicz-Morrey Spaces. Banach and Function Spaces. Yokohama Publ., Yokohama, 323-333.

[14] Takeshi, I. (2021) Orlicz-Fractional Maximal Operators in Morrey and Orlicz-Morrey Spaces. *Positivity*, **25**, 243-272. https://doi.org/10.1007/s11117-020-00762-w

[15] Yamaguchi, S. and Nakai, E. (2022) Compactness of Commutators of Integral Operators with Functions in Campanato Spaces on Orlicz-Morrey Spaces. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **28**, Article No. 33. https://doi.org/10.1007/s00041-022-09920-y

[16] Sawano, Y., Sugano, S. and Tanaka, H. (2012) Orlicz-Morrey Spaces and Fractional Operators. *Potential Analysis*, 36, 517-556. https://doi.org/10.1007/s11118-011-9239-8

[17] Hasanov, J.J. (2014) Φ-Admissible Sublinear Singular Operators and Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Journal of Function Spaces*, **2014**, Article ID: 505237. https://doi.org/10.1155/2014/505237

[18] Deringoz, F., Guliyev, V.S. and Hasanov, S.G. (2018) Commutators of Fractional Maximal Operator on Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Positivity*, **22**, 141-158. https://doi.org/10.1007/s11117-017-0504-y

[19] Eroglu, A., Abasova, G.A. and Guliyev, V.S. (2019) Characterization of Parabolic Fractional Integral and Its Commutators in Parabolic Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **9**, 92-107.

[20] Nakai, E. (2014) Generalized Fractional Integrals on Generalized Morrey Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **287**, 339-351. https://doi.org/10.1002/mana.201200334

[21] Deringoz, F., Guliyev, V.S. and Samko, S.G. (2014) Boundedness of Maximal and Singular Operators on Generalized Orlicz-Morrey Spaces. In: Bastos, M., Lebre, A., Samko, S. and Spitkovsky, I., Eds., *Operator Theory, Operator Algebras and Applications*, Birkhäuser, Basel, 139-158. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0816-3_7

[22] Gogatishvili, A., Genebashvili, I. and Kokilashvili, V. (1998) Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. Longman, Harlow.

[23] Lu, G. (2021) Parameter Marcinkiewicz Integral and Its Commutator on Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **58**, 383-400.

[24] Omarova, M.N. (2020) Nonsingular Integral Operator and Its Commutators on Vanishing Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **10**, 140-156.

[25] Guliyev, V. (2022) Some Characterizations of BMO Spaces via Commutators in Orlicz Spaces on Stratified Lie Groups. *Results in Mathematics*, **77**, Article No. 42. https://doi.org/10.1007/s00025-021-01578-0

[26] Jiang, M. and Li, F. (2022) Lie Group Continual Meta Learning Algorithm. *Applied Intelligence*, **52**, 10965-10978.

[27] Moustafa, M., Amin, A. and Laouini, G. (2021) New Exact Solutions for the Nonlinear Schrdinger's Equation with Anti-Cubic Nonlinearity Term via Lie Group Method. *Optik*, **248**, 168-205. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.168205

[28] Stein, E. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton.

[29] Capone, C., Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. (2007) The Fractional Maximal Operator and Fractional Integrals on Variable L^p Spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*, **23**, 743-770. https://doi.org/10.4171/RMI/511

[30] Cao, M. and Xue, Q. (2016) Characterization of Two-Weighted Inequalities for Multilinear Fractional Maximal Operator. *Nonlinear Analysis*, **130**, 214-228. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.10.004

[31] Hu, G., Lin, H. and Yang, D. (2007) Marcinkiewicz Integrals with Non-Doubling Measures. *Integral Equations and Operator Theory*, **52**, 205-238. https://doi.org/10.1007/s00020-007-1481-5

[32] Guliyev, V. and Deringoz, F. (2015) Boundedness of Fractional Maximal Operator and Its Commutators on Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, **9**, 1249-1267. https://doi.org/10.1007/s11785-014-0401-3

[33] Ri, C. and Zhang, Z. (2019) Boundedness of Commutator of θ-Type Calderón-Zygmund Operators on Non-Homogeneous Metric Measure Spaces. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **40**, 585-598. https://doi.org/10.1007/s11401-019-0153-5

[34] Lu, G. (2020) Commutators of θ-Type Generalized Fractional Integrals on Non-Homogeneous Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2020**, Article No. 202. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02470-1

[35] Lu, G. and Tao, S. (2021) Generalized Homogeneous Littlewood-Paley g-Function on Some Function Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **44**, 17-34. https://doi.org/10.1007/s40840-020-00934-7

[36] Lu, G. and Zhou, J. (2015) Boundedness of Commutators of Parameter Marcinkiewicz Integrals on Morrey Spaces with Non-Doubling Measures. *Advances in Mathematics*, **44**, 73-83.

[37] Deringoz, F., Dorak, K. and Guliyev, V. (2012) Characterization of the Boundedness of Fractional Maximal Operator and Its Commutators in Orlicz and Generalized Orlicz-Morrey Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *Analysis and Mathematical Physics*, **11**, Article No. 63. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00497-1

[38] Li, H. (1972) On Certain Convolution Inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**, 505-510. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1972-0312232-4

[39] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[40] Guliyev, V. (2021) Commutators of Fractional Maximal Function in Generalized Morrey Spaces on Carnot Groups. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**, 893-909. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1793969