Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1593-1596
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210173

Hans 汉斯

几类不同阶群的结构

彭 涛

云南师范大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2022年9月6日；录用日期：2022年10月5日；发布日期：2022年10月12日

摘 要

在有限群的研究中，群的结构在图论中有着重要的应用，因而正确分类不同阶的群结构十分重要，本文利用西罗定理，通过群扩张定理，给出了pq阶群两种可能的结构和$4p$阶群五种可能的结构。

关键词

同构，有限群，直积

The Structure of Several Groups of Different Orders

Tao Peng

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 6th, 2022; accepted: Oct. 5th, 2022; published: Oct. 12th, 2022

Abstract

In the study of finite groups, the structure of groups has important applications in graph theory, so it is very important to classify the structure of groups of different order correctly. In this paper, two possible structures of groups of order pq and five possible structures of groups of order $4p$ are given by using Sylow theorem and group expansion theorem.

Keywords

Homogeneous, Finite Group, Direct Product

文章引用: 彭涛. 几类不同阶群的结构[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1593-1596.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210173

1. 引言

群的一个重要问题是决定一些不同阶群的结构类型，也就是群的同构分类问题，而群的结构重要分为两大类，一类群是交换群，此时它同构于循环群或者一些循环群的直积。第二类群是非交换群，这需要根据一个群阶的大小来推断出元素之间的关系，从而决定出群的结构，因此给出不同阶群的结构就有了实际意义和理论价值。

半群的结构的研究已经有了一些成果，具体参见周绍艳(2016) [1]和刘心驰(2012) [2]。对于一般有限群的研究，梁静老师在文献[3]中对 Z^* 群的结构进行了归纳；孙雨晴，卢家宽老师在文献[4]中给出了自中心化子群对有限群结构的影响；陈梦，刘正龙，陈贵云老师在文献[5]中给出了最高阶元的阶为 7 及 *Sylow*2-子群的阶为 8 的有限群的结构；夏晶老师在文献[6]中给出了有限群的阶与群的结构，而本文利用西罗定理，通过群扩张定理，给出了 pq 阶群两种可能的结构和 $4p$ 阶群五种可能的结构。

2. 预备知识

本节主要给出了一些本文中要用到的一些定义和定理。

定义 1.1 [7]称群 G 为 p-群，如果群 G 的每个元素皆为 p-元素。

定义 2.1 [7]称 p-群 S 为群 G 的 *Sylowp*-子群，如果 S 是 G 的极大 p-子群，即不存在 G 的 p-子群 $S_1 > S$。

引理 1 [7]群 G 中 *Sylowp*-子群的个数 n_p 是 $|G|$ 的因子，并且 $n_p \equiv 1(\bmod p)$。

引理 2 [7]设 $H \le G$，则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。

引理 3 [8]设 $n,m \ge 2$ 为正整数，G 是 n 阶循环群 N 被 m 阶循环群 F 的扩张，则 G 有如下区定义关系：$G=\langle u,v\rangle$，$u^n=1$，$v^m=u^t$，$v^{-1}uv=u^r$，其中 $r^m\equiv 1(\bmod n)$，$t(r-1)\equiv 0(\bmod n)$。

3. 决定几类不同阶的群结构

我们已经知道 $|G|=p$ 时 $G\cong Z_p$，$|G|=p^2$ 时 $G\cong Z_{p^2}$ 或 $G\cong Z_p\times Z_p$，下面我们决定其余几类不同阶的群结构。

定理 1 设 $|G|=pq$，其中 $p>q$ 为素数，则 G 则只有以下几类结构。

1) G 交换 $G\cong Z_p\times Z_q$，

2) G 非交换 $G=\langle a,b\mid a^p=b^q=1, b^{-1}ab=a^s, s\not\equiv 1(\bmod p), s^q\equiv 1(\bmod p)\rangle$。

证明： 设 $G=pq$，若 G 交换，则 $G\cong Z_p\times Z_q$。

1) 若 G 非交换，我们设 $P\in Syl_p(G)$，$Q\in Syl_q(G)$。

由于 p,q 均为素数，所以 $P\in Syl_p(G), Q\in Syl_q(G)$ 均为循环群。不妨设 $P=\langle a\rangle$，$Q=\langle b\rangle$，$a^p=b^q=1$。

由西罗定理可得：$n_p=kp+1\mid q$，又因为 $p>q$，所以可得 $n_p=1$ 即 $P\trianglelefteq G$。$n_q=kp+1\mid p$，显然 $Q\ntrianglelefteq G$ (否则 $P=\langle a\rangle\trianglelefteq G$，$Q=\langle b\rangle\trianglelefteq G$，$P\cap Q=1$，$G=PQ$，可得 $G=P\times Q$ 且 G 可交换，矛盾)，所以 $n_q\ne 1$，即 $n_q=p$，也即 $q\mid p-1$，所以 $a^b=b^{-1}ab\in\langle a\rangle$，不妨设 $b^{-1}ab=a^s$，$s\not\equiv 1(\bmod p)$，则

$$\underbrace{b^{-1}a^sb=(b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\cdots(b^{-1}ab)}_{s个}=(b^{-1}ab)^s=(a^s)^s=a^{s^2}。$$

又因为 $b^{-1}\left(b^{-1}ab\right)b=b^{-2}ab^{2}$，所以 $a^{s^{q}}=1$，即 $s^{q}\equiv 1\left(\bmod p\right)$，

所以 $G=\left\langle a,b\mid a^{p}=b^{q}=1, b^{-1}ab=a^{s}, s\not\equiv 1\left(\bmod p\right), s^{q}\equiv 1\left(\bmod p\right)\right\rangle$。

综上 G 有两种结构：

1) G 交换 $G\cong Z_{P}\times Z_{q}$，

2) G 非交换 $G=\left\langle a,b\mid a^{p}=b^{q}=1, b^{-1}ab=a^{s}, s\not\equiv 1\left(\bmod p\right), s^{q}\equiv 1\left(\bmod p\right)\right\rangle$。

定理 2 设 $|G|=4p$，其中 $p>q$ 为素数，则 G 则只有以下几类结构。

1) $G\cong Z_{4p}$ 或者 $G\cong Z_{2P}\times Z_{P}$，

2) $G\cong Z_{2P}\times Z_{P}$，

3) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=1, b^{2}=a^{p}, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong Q_{4p}$，

4) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=b^{2}=1, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong D_{4p}$，

5) $G=\left\langle a,b\mid a^{p}=b^{4}=1, b^{-1}ab=a^{s}, s^{2}\equiv -1\left(\bmod p\right)\right\rangle$。

证明：设 $G=4p$，若 G 交换，则 1) $G\cong Z_{4p}$ 或者 2) $G\cong Z_{2P}\times Z_{P}$。

若 G 非交换，我们设 $P\in Syl_{p}\left(G\right)$。由于 p,q 均为素数，所以由西罗定理可得：G 的 *Sylowp*-子群的个数 $n_{p}=kp+1\mid 4$ 的，又因为 p 为素数，所以可得 $n_{p}=1$ 即 $P\trianglelefteq G$。对 P 用 N/C 定理，$G/C_{G}\left(P\right)\lesssim Aut\left(P\right)\cong Z_{p-1}$。由于 $|G|=4P$，故 $G/C_{G}\left(P\right)\cong Z_{2}$ 或 $G/C_{G}\left(P\right)\cong Z_{4}$。

若 $G/C_{G}\left(P\right)\cong Z_{2}$，则 G 为 Z_{2p} 被 Z_{2} 的扩张。由引理 3，$G=\left\langle a,b\right\rangle$ 且有定义关系：

$a^{2p}=1$，$b^{2}=a^{t}$，$b^{-1}ab=a^{s}$，其中 $s^{4}\equiv 1\left(\bmod p\right)$，$t\left(s-1\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$。

由于 G 非交换，解上述同余式得 $s\equiv -1\left(\bmod 2p\right)$，$t\equiv p\left(\bmod 2p\right)$ 或 $t\equiv 0\left(\bmod 2p\right)$。

由此得到两个群：

i) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=1, b^{2}=a^{p}, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong Q_{4p}$，

ii) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=b^{2}=1, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong D_{4p}$。

若 $G/C_{G}\left(P\right)\cong Z_{4}$，则 G 为 Z_{p} 被 Z_{4} 的扩张。由引理 3，$G=\left\langle a,b\right\rangle$ 且有定义关系：$a^{p}=1$，$b^{4}=a^{t}$，$b^{-1}ab^{-1}=a^{s}$，其中 $s^{4}\equiv 1\left(\bmod p\right)$，$t\left(s-1\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$。

由于 G 非交换，解上述同余式得 $t\equiv 0\left(\bmod p\right)$，$s^{2}\equiv -1\left(\bmod p\right)$ 或 $s^{2}\equiv 1\left(\bmod p\right)$。

由若 $t\equiv 0\left(\bmod p\right)$，$s^{2}\equiv -1\left(\bmod p\right)$ 则 G 同构于上述 ii)型群。这样得到一个与上述群不同构的群：

iii) $G=\left\langle a,b\mid a^{p}=b^{4}=1, b^{-1}ab=a^{s}, s^{2}\equiv -1\left(\bmod p\right)\right\rangle$。

综上 4*p* 阶群分类如下：

G 为交换群 $G\cong Z_{4p}$ 或者 $G\cong Z_{2P}\times Z_{p}$。

G 为非交换群

i) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=1, b^{2}=a^{p}, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong Q_{4p}$，

ii) $G=\left\langle a,b\mid a^{2p}=b^{2}=1, b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle\cong D_{4p}$，

iii) $G=\left\langle a,b\mid a^{p}=b^{4}=1, b^{-1}ab=a^{s}, s^{2}\equiv -1\left(\bmod p\right)\right\rangle$。

参考文献

[1] 周绍艳. D_{n} 中完全正则半群的结构[J]. 大理大学学报, 2016, 1(6): 1-3.

[2] 刘心驰. 一类半群的结构[J]. 渭南师范学院学报, 2012, 27(10): 120-121.

[3] 梁静. z^* 群的结构[J]. 平顶山学院学报, 2020, 35(5): 27-28.

[4] 孙雨晴, 卢家宽. 自中心化子群对有限群结构的影响[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2020, 38(5): 48-55.

[5] 陈梦, 刘正龙, 陈贵云. 最高阶元的阶为 7 及 *Sylow*2-子群的阶为 8 的有限群的结构[J]. 南西南师范大学学报, 2018, 43(12): 22-25.

[6] 夏晶. 有限群的阶与群的结构[J]. 哈尔滨师范大学自然学学报, 2012, 28(6): 20-21.

[7] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[8] 张达远. 有限群构造(下册) [M]. 北京: 科学出版社, 1982.