Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1571-1576
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210170

Hans汉斯

基于改进集的双层向量均衡问题解的存在性

黄文君，曾丽华，高雲霄

江西理工大学，基础课教学部，江西 南昌

收稿日期：2022年9月5日；录用日期：2022年10月4日；发布日期：2022年10月10日

摘 要

本文研究了改进集下的双层向量均衡问题解的存在性。结合拓扑空间知识，运用改进集的有关结论，在向量**Tikhonov-type**正则化过程下得到了基于改进集的双层向量均衡问题解的存在性。

关键词

改进集，双层向量均衡问题，解的存在性

Existence of the Solution for Bilevel Vector Equilibrium Problem via Improvement Sets

Wenjun Huang, Lihua Zeng, Yunxiao Gao

Teaching Department of Basic Courses, Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Sep. 5th, 2022; accepted: Oct. 4th, 2022; published: Oct. 10th, 2022

Abstract

In this paper, the existence of solution for bilevel vector equilibrium problem is studies under improvement sets. Combining the knowledge of topological space and using the relevant conclusions of the improvement set, the existence of the solution of the bilevel vector equilibrium problem based on the improvement set is obtained under the vector Tikhonov-type regularization process.

文章引用：黄文君，曾丽华，高雲霄. 基于改进集的双层向量均衡问题解的存在性[J]. 理论数学，2022，12(10): 1571-1576. DOI: 10.12677/pm.2022.1210170

Keywords

Improvement Sets, Bilevel Vector Equilibrium Problem, Existence of Solution

1. 引言

在本文中，除非特别说明，始终假设 X,Y,Z 是三个实的Hausdorff拓扑线性空间，并用 $int(K)$ 和 $cl(K)$ 分别表示一个集合 K 的内部和闭包。再设 A 是 X 中的一个非空闭凸子集，C 是 Z 中的闭凸点锥且内部非空，即 $int(C)\neq\varnothing$。

近年来，Chicco [1]等在文献中引入了改进集的概念。给定集合 $E\subseteq Z$，记 $u\_comper(E):=E+C$，并称之为 E 的上方集。如果有 $u\_comper=E$，那么称 E 是 Z 中的上全集。进一步，若上全集 E 满足 $0\notin E$，则称 E 是一个改进集。

接下来考虑下述的双层向量均衡问题：分别求 $\bar{x}\in S_w$，使得

$$\text{(BWVEP)}\quad g(\bar{x},y)\notin -int(E),\forall y\in S_w;$$

其中 S_w 分别是下面向量均衡问题的解集：求 $\bar{z}\in A$ 使得

$$\text{(WVEP)}\quad f(\bar{z},z)\notin -int(E),\forall z\in A.$$

当 $Z=R$，$C=[0,+\infty)$，$E=(0,+\infty)$，(BWVEP)均退化为双层向量均衡问题：

求 $\bar{x}\in S$，使得

$$g(\bar{x},y)>0,\forall y\in S$$

其中 $S=\{\bar{z}\in K:f(\bar{z},z)>0,\forall z\in K\}$。

众所周知，经典的数值优化由于目标单一，其最优解通常也是唯一的。与此不同，向量优化问题由于其目标是(有限或无限)多个的，导致其解具有多样性。目前，不同的学者从不同的实际应用角度出发，针对向量优化问题，提出了多种解的概念，如：有效解、弱有效解、Benson 真有效解、Hening 真有效解、全局有效解等。然而最近，Chicco [1]在有限维空间中用一个新的集合来代替由像空间中诱导出偏序的锥，称之为改进集。它可以将向量优化中的多种有效解概念统一起来，这为处理向量优化问题提供了统一而又简洁的框架。

向量均衡问题(BVEP)涵盖了优化问题、分层最小化问题、数学规划等实际问题作为特例，并广泛地应用于现实生产和生活中，如运输中的网点设施选址问题，管理中公司部门协调、电力分配、信贷分配以及最优设计问题等。目前，关于双层均衡问题的研究已经在解集的性状、最优性条件、对偶理论、适定性与稳定性等方面已经取得了可喜的成绩[2]-[9]。

受以上工作的启发，本文将结合改进集来研究双层弱向量均衡问题解的存在性。这在一定程度上推广和发展了已有文献的结论。全文分为四小节，在第 2 小节给出文中要用到的一些概念和已知结论；第 3 小节考虑了基于改进集的双层向量均衡问题，并得出了其解集的存在性结果；第 4 小节总结了本文的研究工作以及所获得的结论。

2. 预备知识

定义 1 [10]设 X,Y 是两个拓扑空间，称集值映射 $F:X\to 2^Y$。

1) 在 $x_0\in X$ 点是上半连续的(简写为 *u.s.c.*)，如果对包含 $F(x_0)$ 的每一开集 V，都存在包含 x_0 的开集 U，使得 $\forall x\in U$，都有 $F(x)\subseteq V$；

2) 在 $x_0\in X$ 点是下半连续的(简写为 *l.s.c.*)，如果对每一开集 V 且 $F(x_0)\cap V\neq\varnothing$，都存在包含 x_0 的开集 U，使得 $\forall x\in U$，都有 $F(x)\cap V\neq\varnothing$；

3) 在 $x_0\in X$ 点是闭的，如果对任意的网

$$\{(x_\alpha,y_\alpha)\}\subseteq graph(F):=\{(x,y):x\in X,y\in F(x)\}$$

且 $(x_\alpha,y_\alpha)\to(x_0,y_0)$，则有 $(x_0,y_0)\in graph(F)$ 或 $y_0\in F(x_0)$；

1) 在 X 上是 *u.s.c.*的(相应地，*l.s.c.*)，如果 F 在 X 上的每一点都是 *u.s.c.*的(相应地，*l.s.c.*)；

2) 在 X 上是连续的，如果 F 在 X 上既是 *u.s.c.*又是 *l.s.c.*的；

引理 1 [10]设 X,Y 是两个拓扑空间，$F:X\to 2^Y$ 是一集值映射。

1) 当Y是 Hausdorff 拓扑空间时，若 F 在给定的 $x_0\in X$ 处是 *u.s.c.*的且有紧值(即 $F(x_0)$ 是紧集)，则 F 在 x_0 处是闭的；进而，若 F 在 X 上是 *u.s.c.*的且有紧值，即 F 在 X 上的每一点 $x\in X$ 是 *u.s.c.*的且有紧值，则 F 在 X 上是闭的；

2) 对给定的 $x_0\in X$，若 $F(x_0)$ 是紧的，那么 F 在 x_0 处是 *u.s.c.*的充要条件是：对任意的网 $\{x_\alpha\}\subseteq X$ 满足 $x_\alpha\to x_0$，对任意的网 $\{y_\alpha\}$ 且 $y_\alpha\in F(x_\alpha)$，存在某个 $y_0\in F(x_0)$ 以及 $\{y_\alpha\}$ 的某个子网 $\{y_\beta\}$，使得 $y_\beta\to y_0$；

3) F 在 $x_0\in X$ 点是 *l.s.c.*的充要条件是：对任意的 $y_0\in F(x_0)$ 和任意的网 $\{x_\alpha\}\subseteq X$ 且 $x_\alpha\to x_0$，存在网 $\{y_\alpha\}$，使得 $y_\alpha\in F(x_\alpha)$ 且 $y_\alpha\to y_0$；

4) 如果 X,Y 是两个 Hausdorff 拓扑线性空间且 Y 是紧的，F 有非空闭值，那么 F 在 X 上为 *u.s.c.*的充要条件是 F 为闭映射。

定义 2 [11]设 X 和 Y 是两个实的 Hausdorff 拓扑线性空间，K 是 X 中的非空子集，C 为 Y 中的非空闭凸锥，称向量值映射 $f:K\to Y$。

1) 在 $x_0\in K$ 处是 C-上半连续的(简记为 C-*u.s.c.*)，如果对于 Y 中零元的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 U，使得

$$f(x)\in f(x_0)+V-C,\forall x\in U\cap K.$$

若 f 在 K 中的每一点都是 C-*u.s.c.*，则称 f 在 K 中是 C-*u.s.c.*；

2) 在 $x_0\in K$ 处是 C-下半连续的(简记为 C-*l.s.c.*)，如果对于 Y 中零元的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 U，使得

$$f(x)\in f(x_0)+V+C,\forall x\in U\cap K.$$

若 f 在 K 中的每一点都是 C-*l.s.c.*，则称 f 在 X 中是 C-*l.s.c.*；

3) 如果 f 在 K 上既是 C-*u.s.c.*的又是 C-*l.s.c.*的，则称 f 在 K 上是 C-连续的。

注 1 由定义易知，f 在 $x_0\in K$ 处是 C-上半连续的充要条件是 $-f$ 在 x_0 处是 C-下半连续的，进而可知 f 在 K 上是 C-连续的充要条件是 $-f$ 在 K 上是 C-连续的。

引理 2 [12]假设 $E\subseteq Z$ 是改进集，若 $0\notin cl(E)\subseteq C$，则有 $int(C)\subseteq E\subseteq C\setminus 0$。

引理 3 [13]改进集有下述基本性质：

1) $int(C)+E\subseteq int(E)$ 且 $int(E)\neq\varnothing$。进一步，$C+int(E)\subseteq int(E)$；

2) $int(C)+cl(E)\subseteq int(E)$；

3) $C+cl(E)\subseteq cl(E)$。

3. 主要结果

在本节中，我们将借助于向量 Tikhonov-type 正则化过程来考虑(BMVEP)解的存在性。

为此，针对(BMVEP)，我们引入混合向量均衡问题：$\forall\varepsilon>0$，求 $\bar{x}_\varepsilon\in A$，使得

$$\text{(MWVEP)}\quad f(\bar{x}_\varepsilon,y)+\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E),\forall y\in A.$$

定理 1 假定向量值映射 $f,g:A\times A\to Z$ 满足下列条件：

1) $\forall y\in A$，$x\to f(x,y)$ 是 C-上半连续的；

2) $\forall x,y\in K$，$f(x,y)\notin -int(E)$ 蕴含着 $f(y,x)\in -E$；

3) $\forall y\in A$，$x\to g(x,y)$ 是 C-上半连续的；

4) $\forall\varepsilon>0$，(MWVEP)有解 $\bar{x}_\varepsilon$。

则解集 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的每一个聚点 $\bar{x}$ 是(BWVEP)的一个解。

证明： 设 $\bar{x}$ 是网 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个聚点。$\forall\varepsilon>0$，令 S_ε 为(MWVEP)的解集，即

$$S_\varepsilon:=\left\{\bar{x}_\varepsilon\in A: f(\bar{x}_\varepsilon,y)+\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E),\forall y\in A\right\}.$$

证明过程分成两步来完成。

i) $\forall y\in A$ 有 $f(\bar{x},y)\notin -int(E)$，也就是 $\bar{x}\in S_w$。

(反证法)假设存在某个 $y_0\in A$，使得 $f(\bar{x},y_0)\in -int(E)$。那么在 Z 中存在零点的一个平衡邻域 V 使得

$$f(\bar{x},y_0)+V+V\subseteq -int(E),$$

又存在 ε_0 使得对任意的 $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ 都有

$$\varepsilon g(\bar{x},y_0)+\varepsilon V\subseteq V.$$

由条件(iv)，我们知 $S_\varepsilon\neq\varnothing$。对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\bar{x}_\varepsilon\in S_\varepsilon$，我们有

$$f(\bar{x}_\varepsilon,y)+\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E),\forall y\in A. \tag{1}$$

因为 $x\to f(x,y)$ 和 $x\to g(x,y)$ 是 C-上半连续的。对上诉的 V，存在 $\gamma>0$，$\bar{x}$ 的邻域 U，使得对任意的 $\varepsilon\in(0,\gamma)$ 都有 $\bar{x}_\varepsilon\in U$ 而且有

$$\begin{cases} f(\bar{x}_\varepsilon,y_0)\in f(\bar{x},y_0)+V-C\\ g(\bar{x}_\varepsilon,y_0)\in g(\bar{x},y_0)+V-C\end{cases}$$

注意到 $\varepsilon\in(0,\gamma)$，不难得到 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y_0)\in\varepsilon g(\bar{x},y_0)+\varepsilon V-\varepsilon C$。

又因为 C 是凸锥，有 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y_0)\in\varepsilon g(\bar{x},y_0)+\varepsilon V-C\subseteq V-C$。

因而，我们有

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_\varepsilon,y_0)+\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y_0)&\in f(\bar{x},y_0)+V-C+\varepsilon g(\bar{x},y_0)+\varepsilon V-\varepsilon C\\ &\subseteq f(\bar{x},y_0)+V-C\\ &\subseteq -int(E)-C\\ &\subseteq -int(E).\end{aligned}$$

这与(1)式相矛盾，因此 $f(\bar{x},y)\notin -int(E),\forall y\in A$。

ii) $\bar{x}$ 是(BVEP)的一个解，*i.e.*，$\bar{x}\in S_w$ 满足 $g(\bar{x},y)\notin -int(E),\forall y\in S_w$，其中

$$S_w:=\{x\in A: f(x,z)\notin -int(E),\forall z\in A\}.$$

对任意给定的向量 $z\in S_w$，因为 $\bar{x}_\varepsilon\in S_\varepsilon$，我们有

$$f(\bar{x}_\varepsilon,z)+\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,z)\notin -int(E). \tag{2}$$

我们断言对任意的 $y\in S_w$ 都有 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E)$。应用反证法，假定存在某个 $z\in S_w$ 使得 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,z)\in -int(E)$。

注意到 $\bar{x}_\varepsilon\in A$，$z\in S_w$，我们可以得到 $f(z,\bar{x}_\varepsilon)\notin -int(E)$。又由条件(ii)，可以得到 $f(\bar{x}_\varepsilon,z)\in -E$。

因此有

$$\begin{aligned}\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,z)+f(\bar{x}_\varepsilon,z)&\in -int(E)-E\\&\subseteq -int(E)-C\\&\subseteq -int(E).\end{aligned}$$

而上式与(2)式矛盾，那么对任意的 $y\in S_w$，我们有 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E)$。

进而我们可以得到

$$g(\bar{x}_\varepsilon,y)\notin -int(E),\forall y\in S_w. \tag{3}$$

接下来我们证明 $g(\bar{x},y)\notin -int(E)$，$\forall y\in S_w$。应用反证法，假定存在某个 $z\in S_w$ 使得 $g(\bar{x},z)\in -int(E)$。我们取定一个邻域 $W=-g(\bar{x},z)-int(E)$，则 W 是零点的一个开邻域。又因为向量值映射 $x\to g(x,z)$ 是 C-上半连续的和 $\bar{x}$ 是解集 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个聚点。那么对上述的邻域 W，存在一些 ε_0 使得

$$\begin{aligned}g(\bar{x}_\varepsilon,z)&\in g(\bar{x},z)+W-C\\&\subseteq g(\bar{x},z)+(-g(\bar{x},z)-int(E))-C\\&=-int(E)-C\\&=-int(E).\end{aligned}$$

注意到上式与式(3)相矛盾，那么我们得到 $g(\bar{x},y)\notin -int(E)$，$\forall y\in S_w$。

综上所述，我们已经证得(MWVEP)解集 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的每一个聚点 $\bar{x}$ 是(BWVEP)的一个解。

注 2 定理 1 中的条件(ii)类似于大多文献中的 C-单调这一条件，但值得注意的是本文中使用的是改进集 E，而不是经常使用的锥 C。

4. 结束语

本文介绍了改进集的一些特性，在此基础上来研究向量均衡问题，借助向量 Tikhonov-type 正则化过程获得了解的存在性。

基金项目

江西省教育厅科技项目(GJJ210866, GJJ210827)。

参考文献

[1] Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L. and Tijs, S. (2011) Vector Optimization Problems via Improvement Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, 516-529. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[2] Bonnel, H. and Morgan, J. (2006) Semivectorial Bilevel Optimization Problem: Penalty Approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **131**, 365-382. https://doi.org/10.1007/s10957-006-9150-4

[3] Bard, J.F. (1998) Practical Bilevel Optimization: Applications and Algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2836-1

[4] Dempe, S. (2002) Foundations of Bilevel Programming. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] Chadli, O., Ansari, Q.H. and Al-Homidan, S. (2017) Existence of Solutions and Algorithms for Bilevel Vector Equilibrium prOblems: An Auxiliary Principle Technique. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **172**, 726-758. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1062-y

[6] Ding, X.P. (2012) Existence and Iterative Algorithms of Solutions for a Class of Bilevel Generalized Mixed Equilibrium Problems in Banach Spaces. *Journal of Global Optimization*, **53**, 527-537. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9724-z

[7] Capata, A. (2021) Existenceof Solutions of Bilevel Strong Vector Equilibrium Problems and Their Applications. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, **5**, 371-389. https://doi.org/10.23952/jnva.5.2021.3.03

[8] Hung, N.V. and O'Regan D. (2020) Bilevel Equilibrium Problems with Lower and Upper Bounds in Locally Convex Hausdorff Topological Vector Spaces. *Topology and Its Applications*, **269**, 106939. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106939

[9] Li, Q.N., Li, Z. and Zemkoho, A. (2022) Bilevel Hyperparameter Optimization for Support Vector Classification: Theoretical Analysis and a Solution Method. *Mathematical Methods of Operations Research*. https://doi.org/10.1007/s00186-022-00798-6

[10] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (1984) Applied Nonlinear Analysis. Wiley, New York.

[11] Luc, D.T. (1989) Theory of Vector Optimization. In: Fandel, G. and Trockel, W., Eds., *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Spring-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

[12] Mao, J.Y., Wang, S.H. and Han, Y. (2019) The Stability of the Solution Sets for Set Optimization Problems via Improvement Sets. *Optimization*, **68**, 2168-2190. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1579813

[13] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050