

# 基于偏微分方程的自适应图像去噪模型

王鹏飞<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>成都理工大学数理学院, 四川 成都

<sup>2</sup>成都理工大学数学地质四川省重点实验室, 四川 成都

收稿日期: 2022年10月17日; 录用日期: 2022年11月16日; 发布日期: 2022年11月24日

## 摘要

四阶各项异性扩散模型(AFOD)的提出有效解决了各向同性扩散模型(Y-K)的斑点效应、收敛速度慢等和边缘信息丢失等问题。但图像梯度作为边缘指示器, 区分斜坡区域和边缘区域的能力弱, 会使得去噪图像在斜坡区域产生阶梯效应。本文利用差分曲率能有效区分图像边缘区域和斜坡区域的特点, 将AFOD模型和P-Laplace结合, 使得模型能在保护图像边缘的同时, 有效抑制阶梯效应。实验结果与几种相关方法进行比较, 证明了该模型稳定良好的性能。

## 关键词

图像去噪, AFOD模型, P-Laplace, 差分曲率

# Adaptive Image Denoising Model Based on Partial Differential Equation

Pengfei Wang<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>College of Mathematics and Physics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

<sup>2</sup>Geomathematics Key Laboratory of Sichuan Province, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Oct. 17<sup>th</sup>, 2022; accepted: Nov. 16<sup>th</sup>, 2022; published: Nov. 24<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

The Anisotropic Fourth-Order Diffusion Filter (AFOD) is proposed to effectively solve the problems of speckle effect, slow convergence speed and loss of edge information of isotropic Diffusion Filter (Y-K). However, as an edge indicator, the image gradient has a weak ability to distinguish the slope area from the edge area, which will cause the denoised image to produce a staircase effect in the slope area. In this paper, the difference curvature can effectively distinguish the edge area and the slope area of the image, and the AFOD model is combined with P-Laplace, so that the model can

文章引用: 王鹏飞. 基于偏微分方程的自适应图像去噪模型[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1981-1988.

DOI: 10.12677/pm.2022.1211214

effectively suppress the step effect while protecting the image edge. The experimental results are compared with several related methods, which demonstrate the stable and good performance of the model.

## Keywords

Image Denoising, AFOD Model, P-Laplace, Differential Curvature

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

图像在采集、转换和传输过程中,总会不可避免地受到各种噪声的干扰和影响,造成图像特征缺失,对图像的处理带来许多困难,因此图像去噪成了图像处理中最基本的问题。在图像去噪中,权衡去噪与保持图像结构极为重要。基于偏微分方法去噪过程是将边缘检测和平滑去噪相结合,能在去噪过程中保护图像信息,达到较好的去噪效果。其中最为经典的当属以 PM 模型和 TV 模型为代表的二阶偏微分图像去噪模型,和以 Y-K 模型为代表的四阶偏微分图像去噪模型。

经典的 PM 模型是一个“病态”方程, Catte *et al.* (1992)在 PM 模型中引入高斯卷积核,提出了正则化的 PM 模型(Catte 模型) [1]解决了 PM 方程病态问题。Rudin (1992)提出二阶全变分去噪模型(TV 模型) [2],该模型能在去噪过程中很好地保留图像信息,在图像的斜坡区域会出现“阶梯效应”。Lysaker 等人(2003)提出四阶 LLT 模型[3],显著地改善坡道边缘保护并显著减少块状效果。Hajiaboli (2010)指出 Laplace 模对噪声敏感,导致 Y-K 模型去噪后图像容易产生斑点效应,提出了四阶各项异性模型(AFOD 模型) [4],避免了 Y-K 模型边缘丢失问题和斑点效应。Qiang Chen (2010)指出传统的边缘指示器(梯度模)不能较好地区分图像边缘区域和斜坡区域,从而导致去噪图像在斜坡区域出现“阶梯效应”,并提出一种新的边缘指示差分曲率的自适应全变分方法[5]。徐书方(2010)将 TV 模型和 Y-K 模型直接结合,既抑制了 TV 模型的阶梯效应,又防止了 Y-K 模型的边缘丢失[6]。Q. S. Chang (2013)将 LLT 模型与 TV 模型(ROF)相结合,构造了一个二阶与四阶的混合模型(简称 LF 模型) [7],使得模型在保护图像信息的同时,抑制阶梯效应。Y. Q. Wang (2013)为解决 PM 模型的阶梯效应,借用无噪图像边缘信息,再加上了一个带有权重的 Laplace 算子以降低阶梯效应,抑制噪声产生(MPM 模型) [8]。李丹(2014)将 TV 模型与 P-Laplace 模型结合,用 P-Laplace 来平滑 TV 模型去噪图像假边缘[9]。Lizhen Deng (2019)指出传统的四阶去噪模型过于平滑会导致图像边缘模糊和失真,提出一种基于 Hessian 矩阵的四阶各向异性去噪模型,该模型在保持边缘和抑制阶梯效应的同时,具有较好去噪性能[10]。

综上所述,基于偏微分的图像去噪旨在去除噪声,保护边缘,抑制阶梯效应。所以本文需要构建一个能权衡保护边缘和抑制阶梯效应的模型,使得在达到良好去噪的同时,图像丢失信息最少。虽然 AFOD 能有效保护边缘,但文献[11]指出该模型存在阶梯效应,去噪图像在视觉上有不平整感。为了抑制阶梯效应,本文通过结合 AFOD 和 P-Laplace 模型,通过差分曲率控制两模型在图像不同区域的去噪比重。利用差分曲率能有效区分图像斜坡区域和边缘区域的特点,当模型处理噪声图像边缘时,该模型退化为 AFOD 模型,有效保护图像边缘信息;当模型处理噪声图像斜坡和平坦区域时, P-Laplace 模型平滑噪声边缘,抑制阶梯效应。本文将先介绍 AFOD 模型和 P-Laplace 模型,并通过各自的特点,结合差分曲率,构建自适应去噪模型。最后通过进行数值实验对比证明本文模型的可行性。

## 2. 经典模型

### 2.1. AFOD 模型

Hajia Boli 指出 Y-K 模型中 Laplace 算子对噪声较为敏感[4]。相比之下，梯度模检测边缘能力强，提出了一种用于图像去噪的改进四阶各向异性扩散滤波(AFOD 模型)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left( c(|\nabla u|)^2 u_{\eta\eta} + c(|\nabla u|) u_{\xi\xi} \right). \quad (1)$$

其中

$$u_{\eta\eta} = \frac{u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 + 2u_xu_yu_{xy}}{u_y^2 + u_x^2 + \varepsilon}, \quad (2)$$

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy}}{u_y^2 + u_x^2 + \varepsilon}. \quad (3)$$

为了防止分母为 0，增加一个极小常量  $\varepsilon$ 。 $\eta$  和  $\xi$  为图像的梯度方向和切线方向， $u_{\eta\eta}$  为沿图像梯度方向的二阶导数，倾向于平滑图像边缘； $u_{\xi\xi}$  为沿切线方向的二阶导数，倾向于保留图像边缘。该模型的扩散系数为

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + \left( \frac{|\nabla u|}{K} \right)^2}. \quad (4)$$

其中  $|\nabla u|$  为图像梯度模， $K$  为对比度参数。扩散系数的值域在  $(0,1]$ ，当图像梯度模值越大时，扩散系数值越小。可以发现 AFOD 中  $u_{\xi\xi}$  的权重大于  $u_{\eta\eta}$  的权重，所以具有各向异性扩散的行为，并且能保持良好边缘的情况下实现相对快速的降噪，克服了 Y-K 模型收敛速度慢，斑点效应等问题。

### 2.2. P-Laplace 模型

文献[12]中提出了 P-Laplace 算子在图像去噪中的推广，模型表达如下

$$\Delta_p u = \operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right). \quad (5)$$

本文主要讨论当  $p=2$ ，可得一个 Laplace 算子

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (6)$$

假设图像  $u$  大小为  $I \times J$ ，记  $u_{i,j}^n$  为第  $n$  次去噪后在  $(i,j)$  位置像素点的值， $dt$  为足够小的时间步长，采用中心差分格式

$$(u_{xx})_{i,j}^n = u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}, \quad (7)$$

$$(u_{yy})_{i,j}^n = u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1}. \quad (8)$$

易得第  $n$  次迭代，在  $(i,j)$  位置的像素值

$$u_{i,j}^n = u_{i,j}^{n-1} + \begin{bmatrix} 0 & dt & 0 \\ dt & -4dt & dt \\ 0 & dt & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1,j-1}^{n-1} & u_{i-1,j}^{n-1} & u_{i-1,j+1}^{n-1} \\ u_{i,j-1}^{n-1} & u_{i,j}^{n-1} & u_{i,j+1}^{n-1} \\ u_{i+1,j-1}^{n-1} & u_{i+1,j}^{n-1} & u_{i+1,j+1}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

从而得到第  $n$  次迭代图像结果

$$u^n = \begin{bmatrix} 0 & dt & 0 \\ dt & 1-4dt & dt \\ 0 & dt & 0 \end{bmatrix} * u^{n-1}. \quad (10)$$

其中  $*$  为卷积运算符，可以看出，用于图像去噪的 Laplace 算子，实质上就是线性高斯滤波器，在去噪中会带来很强的空间规则性，因此能够较好去除噪声边缘，抑制阶梯效应，使得图像细节(如线条和边缘)会变得过于平滑。

### 3. 本文模型

AFOD 模型的提出，有效地避免了 Y-K 斑点效应、收敛速度慢等和边缘信息丢失等问题。但图像梯度作为边缘指示器虽然受噪声影响小，判别边缘区域和斜坡区域能力较弱。为了有效区分图像中的边缘和坡道，Chen [5] 等人提出的边缘指示器为

$$D = \left| \left| u_{\xi\xi} \right| - \left| u_{\eta\eta} \right| \right|. \quad (11)$$

$u_{\eta\eta}$   $u_{\xi\xi}$  和由公式(2)和(3)得出，对于差分曲率有如下结论：

- 1) 对于图像边缘， $\left| u_{\eta\eta} \right|$  值大， $\left| u_{\xi\xi} \right|$  值小，所以  $D$  值大；
- 2) 对于图像平坦区域与斜坡区域， $\left| u_{\eta\eta} \right|$  和  $\left| u_{\xi\xi} \right|$  值小，所以  $D$  值小；
- 3) 对于孤立噪声， $\left| u_{\eta\eta} \right|$  和  $\left| u_{\xi\xi} \right|$  值大并且相近，所以  $D$  值小。

因此差分曲率能有效地区分图像边缘区域与非边缘区域。

为了抑制去噪图像出现阶梯效应，本文提出模型如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left( 1 - \frac{f(D)}{2} \right) \nabla^2 \left[ c(\nabla u)^2 u_{\eta\eta} + c(\nabla u) u_{\xi\xi} \right] + \frac{f(D)}{2} \nabla^2 u. \quad (12)$$

其中  $D$  为图像差分曲率， $f(D)$  为控制 AFOD 模型与 P-Laplace 模型的参数，表达式为

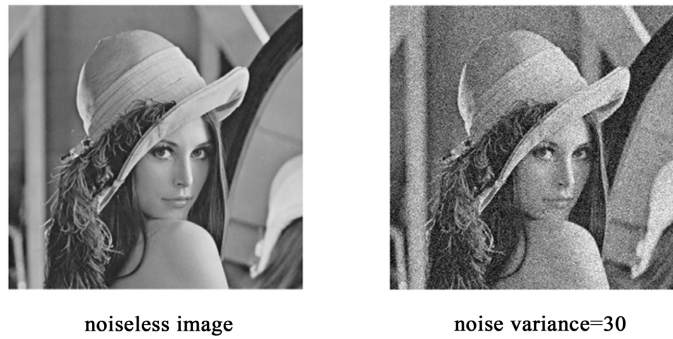
$$f(D) = \frac{1}{1+D^2}. \quad (13)$$

通过控制参数  $f(D)$  将 AFOD 模型和 P-Laplace 结合，达到保护边缘和抑制阶梯效应的作用。当模型处理噪声图像边缘时， $D$  值较大， $f(D)$  值趋于 0，模型退化为 AFOD 模型以达到保护图像边缘的目的；当处理图像平坦区域和斜坡区域时， $D$  值较小， $f(D)$  值趋于 1，两个模型的权重均为 0.5，Laplace 抑制 AFOD 模型的阶梯效应。可以发现，本文模型通过控制参数  $f(D)$  达到自适应效果，借助差分曲率  $D$  对于斜坡区域和边缘区域有较强的区分能力，用 Laplace 算子过滤噪声边缘，抑制阶梯效应。

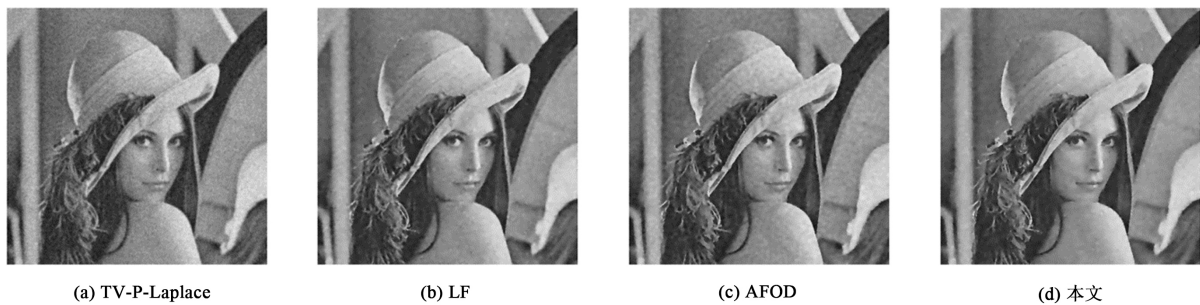
### 4. 仿真实验

在本节中，我们展示本文模型的良好去噪能力。并与 TV-P-Laplace 模型、LF 模型和 AFOD 模型进行比较。用峰值信噪比(PSNR)、信噪比(SNR)和结构相似性(SSIM)被用作评价去噪图像质量的客观指标。本文设置 TV-P-Laplace 模型和 LF 模型时间步长  $dt$  为 0.1。AFOD 模型和本文模型时间步长  $dt$  为 0.031，AFOD 模型中对比度参数  $K$  为 7。并根据文献[4] [7] [9]中模型的有限差分格式，进行 MATLAB 数值实验，选取 Lena、Pepper 和 House 图像进行仿真。设置当去噪图像达到信噪比最大值时，迭代停止。先选取 Lena 图像分别加入噪声方差为 30 的高斯噪声，验证模型去噪能力的稳定性。

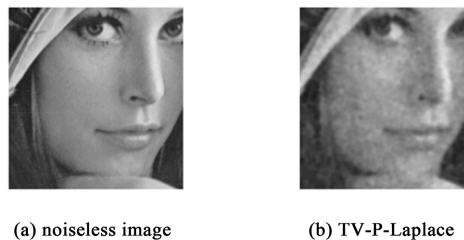
由图 1~3，噪声方差为 30 时，TV-P-Laplace 模型没有达到较好的平滑去噪效果，LF 模型和 AFOD 模型在视觉上存在不平整感，存在阶梯效应。相比之下，本文模型在视觉上达到了很好地平滑去噪效果，



**Figure 1.** Original noise image  
**图 1.** 原图噪声图像



**Figure 2.** Lena image denoising effect  
**图 2.** Lena 图像去噪效果



(a) noiseless image

(b) TV-P-Laplace



(c) LF

(d) AFOD

(e) 本文

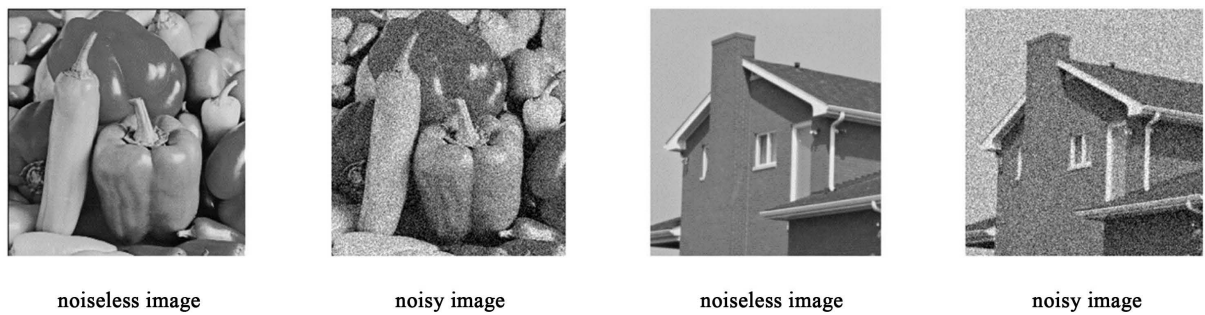
**Figure 3.** Lena image face denoising effect  
**图 3.** Lena 图像脸部去噪效果

在脸部的平坦区域和斜坡区域的处理，比其他模型更为平整，较好地抑制了阶梯效应。由表 1，在处理高斯噪声方差为 30 的图像中，TV-P-Laplace 模型迭代 20 次达到信噪比峰值，本文模型和 LF 模型在 210 次左右达到信噪比峰值，LF 模型在 320 次左右达到信噪比峰值。本文模型去噪结果的 PSNR、SNR 和 SSIM 值都是最大的，图像失真最小，去噪结果图像与原图结构最为接近，证实了本文模型去噪能力与保护图像信息能力的良好与稳定性，并且能抑制阶梯效应，使得图像更加平整。

**Table 1.** Objective evaluation index of Lena image after denoising  
**表 1.** Lena 图像去噪后的客观评价指标

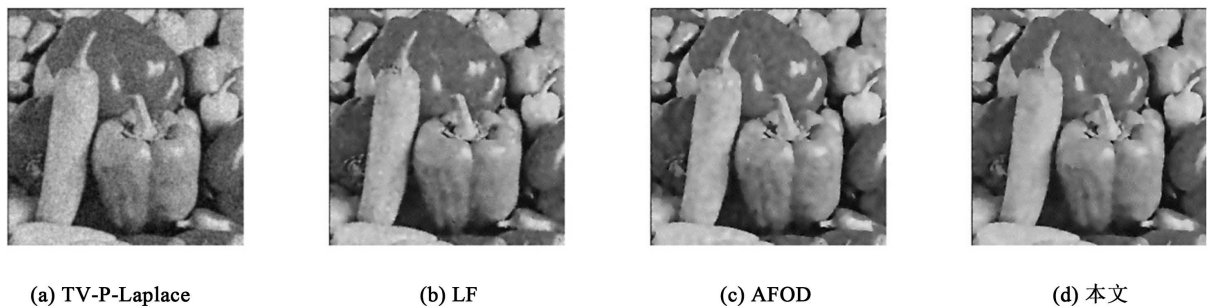
	PSNR	SNR	SSIM	迭代次数
TV-P-Laplace	28.59	14.05	0.741	20
LF	29.66	15.13	0.806	210
AFOD	29.41	14.88	0.792	320
本文	29.70	15.17	0.807	220

以下选取的 House 与 Pepper 图像，加入方差为 30 的高斯噪声，去噪结果如下图 4~6。



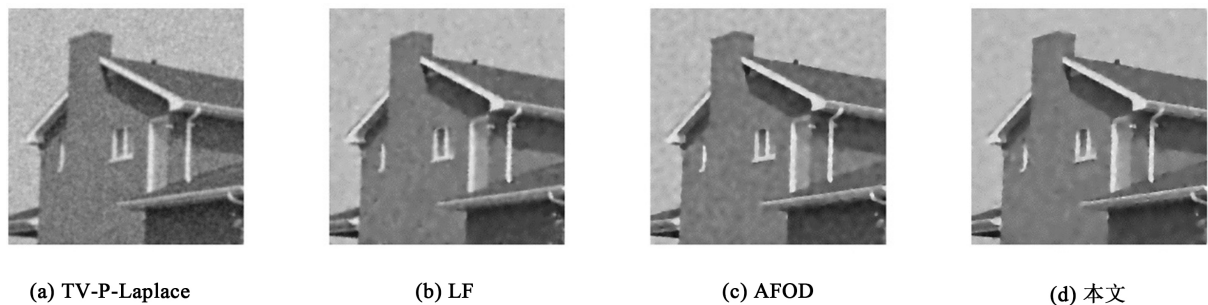
**Figure 4.** Original image and noisy image

**图 4.** 原图与噪声图像



**Figure 5.** Pepper denoising result image

**图 5.** Pepper 去噪结果图像



**Figure 6.** House denoising result image

**图 6.** House 去噪结果图像

由图 5 在 Pepper 图像中加入方差为 30 的高斯噪声, TV-P-Laplace 模型和 LF 模型去噪结果图像在视觉上存在有不平整感, AFOD 模型和本文模型达到较好的平滑效果。由表 2, 在 Pepper 噪声图 SNR 值为 6.17。去噪后, AFOD 模型和本文模型的 PSNR、SNR 和 SSIM 值高于其他模型, 并且两模型去噪结果接近。

在图 6 对 House 噪声图去噪, 可以明显看出, TV-P-Laplace、LF 和 AFOD 模型在平坦区域存在伪影。本文模型去噪结果图像边缘完整, 在图像平坦区域有很好地平滑去噪效果, 不存在阶梯效应, 在视觉上达到最佳的去噪效果。在表 2 中, 本文模型去噪图像 PSNR 和 SNR 都比 AFOD 在数值上均有提升, 表明本文模型相比于 AFOD 模型, 去噪图像的失真能达到更小。

**Table 2.** Objective evaluation index of Pepper and House image after denoising

**表 2.** Pepepr 和 House 图像去噪后的客观评价指标

噪声图像 SNR (dB)	模型	PSNR (dB)	SNR (dB)	SSIM	迭代次数
Pepper 6.17	TV-P-Laplace	25.73	12.11	0.694	10
	LF	27.26	13.64	0.806	170
	AFOD	28.09	14.47	0.823	300
	本文	28.29	14.67	0.833	200
House 5.26	TV-P-Laplace	27.96	13.09	0.701	15
	LF	29.21	14.34	0.792	210
	AFOD	29.45	14.58	0.787	400
	本文	29.63	14.76	0.802	240

## 5. 结论

本文将 AFOD 模型和 P-Laplace 模型相结合, 以达到去除噪声, 保护边缘和抑制阶梯效应的目的。利用差分曲率能有效区分图像边缘区域与斜坡区域的特点, 使得模型在处理图像边缘区域时, 退化为 AFOD 模型, 有效保护图像边缘信息; 当模型处理噪声图像斜坡和平坦区域时, P-Laplace 模型平滑噪声边缘, 抑制阶梯效应。在对比实验中, 也验证了本文模型良好性能。本文模型虽提高了图像质量, 但由于结合多个模型, 在计算表示上也较为复杂, 在参数设置上也受限于 AFOD 模型。如何针对该算法进行优化将是下一步研究的工作重点。

## 参考文献

- [1] Catté, F., Lions, P.-L., Morel, J.-M. and Coll, T. (1992) Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**, 182-193. <https://doi.org/10.1137/0729012>
- [2] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F)
- [3] Lysaker, M., Lundervold, A. and Tai, X.C. (2003) Noise Removal Using Fourth-Order Partial Differential Equation with Applications to Medical Magnetic Resonance Images in Space and Time. *IEEE Transactions on Image Processing*, **12**, 1579-1590. <https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819229>
- [4] Hajiaboli, M.R. (2011) An Anisotropic Fourth-Order Diffusion Filter for Image Noise Removal. *International Journal of Computer Vision*, **92**, 177-191. <https://doi.org/10.1007/s11263-010-0330-1>
- [5] Chen, Q., Montesinos, P., Sun, Q.S., et al. (2010) Adaptive Total Variation Denoising Based on Difference Curvature. *Image and Vision Computing*, **28**, 298-306. <https://doi.org/10.1016/j.imavis.2009.04.012>
- [6] 徐书方, 刘婧, 沈立新. 一种基于偏微分方程的图像去噪方法[J]. 大连海事大学学报, 2010, 36(4): 107-110.

- [7] Chang, Q.S., Tai, X.C. and Xing, L. (2009) A Compound Algorithm of Denoising Using Second-Order and Fourth-Order Partial Differential Equations. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, **2**, 353-376. <https://doi.org/10.4208/nmtma.2009.m9001s>
- [8] Wang, Y.Q., Guo, J.C., Chen, W.F. and Zhang, W.X. (2013) Image Denoising Using Modified Perona-Malik Model Based on Directional Laplacian. *Signal Processing*, **93**, 2548-2558. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.02.020>
- [9] 李丹, 仲崇权, 王世强, 陈祖军. 基于全变差和P-Laplace模型的混合图像修复算法[J]. 大连理工大学学报, 2014, 54(6): 676-681.
- [10] Deng, L., Zhu, H., Yang, Z., *et al.* (2019) Hessian Matrix-Based Fourth-Order Anisotropic Diffusion Filter for Image Denoising. *Optics & Laser Technology*, **110**, 184-190. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.08.043>
- [11] 贺亚茹. 图像恢复的PDE方法研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安理工大学, 2018.
- [12] Baravdish, G., Cheng, Y., Svensson, O., *et al.* (2015) Extension of  $p$ -Laplace Operator for Image Denoising. *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, Springer, Cham, Vol. 494, 107-116. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-55795-3\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55795-3_9)