Pure Mathematics **理论数学, 2023, 13(3), 573-587**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133061

带有奇异非线性项的加权(p, q)-Laplace方程正解的存在性

吕凯利

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年2月21日；录用日期：2023年3月22日；发布日期：2023年3月30日

摘　要

该文研究了 $W_0^{1,H}(\Omega)$ 中一类带有奇异的非线性项的加权 (p,q)-Laplace方程正解的存在性和多重性。利用纤维映射和变分法等技巧，在参数较小的情况下，得到方程至少有两个正解。

关键词

奇异性，纤维映射，变分法

Existence of Positive Solutions of Weighted (p, q)-Laplace Equation with Singular Nonlinear Terms

Kaili Lyu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 21st, 2023; accepted: Mar. 22nd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

Abstract

This paper investigates the existence and multiplicity of positive solutions of a class of weighted (p,q)-Laplace equations with singular nonlinear terms in $W_0^{1,H}(\Omega)$. Using techniques such as fiber mapping and variational methods, at least two positive solutions of the equation are obtained under small parameters.

文章引用: 吕凯利. 带有奇异非线性项的加权(p, q)-Laplace 方程正解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 573-587.
DOI: 10.12677/pm.2023.133061

Keywords

Singularity, Fiber Mapping, Variational Method

1. 引言及主要结果

在参数 $\lambda>0$ 且较小的情形下，本文研究如下带有奇异的非线性项的加权 (p,q)-Laplace 方程

$$\begin{cases}-div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+w(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)=a(x)u^{-\gamma}+\lambda b(x)u^{r-1}, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{1.1}$$

正解的存在性。

众所周知，(p,q)-Laplace 方程与流体力学密切相关，来源于非牛顿流体问题的研究，并与拟正则性和拟投影映射的相关理论有密切联系(见[1])。

在过去几十年中，(p,q)-Laplace 方程等相关问题得到广泛研究，并取得许多重要结果，比如[2] [3]；对于含有形如(1.1)的加权 (p,q)-Laplace 方程解的存在性也有一些研究成果(见[4] [5] [6]等)；对于非线性项具有奇异的情形研究，近年来已取得一定进展(见[7]-[12])。

定义 1.1 如果存在 $u\geq 0$，$u\in W_0^{1,H}(\Omega)$，且对任意 $h\in W_0^{1,H}(\Omega)$ 成立

$$\int_\Omega\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+w(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)\cdot\nabla h\mathrm{d}x=\int_\Omega a(x)u^{-\gamma}h\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega b(x)u^{r-1}h\mathrm{d}x,$$

则称函数 u 为问题(1.1)的弱解。

我们知道问题(1.1)的弱解与下列能量泛函 $I_\lambda(u):D(I)\to\mathbb{R}$

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{q}\|\nabla u\|_{q,w}^q-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{r}\|u\|_{r,b}^r$$

的临界点一致，其中，$D(I)=\left\{u\in W_0^{1,H}(\Omega):\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x<\infty\right\}$。

由于奇异项的出现，泛函 $I_\lambda(u)$ 不是 C^1 的，我们想利用纤维映射克服这个困难。首先定义集合

$$N_\lambda=\left\{u\in W_0^{1,H}(\Omega)\setminus\{0\}:\|\nabla u\|_p^p+\|\nabla u\|_{q,w}^q=\int_\Omega a(x)u^{1-\gamma}\mathrm{d}x+\lambda\|u\|_{r,b}^r\right\}.$$

容易看出 N_λ 包含了问题(1.1)的弱解。为了获得(1.1)的多重解，我们将 N_λ 分解成 N_λ^+、N_λ^0 和 N_λ^-：

$$N_\lambda^+=\left\{u\in N_\lambda:(p+\gamma-1)\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)\|u\|_{r,b}^r>0\right\},$$

$$N_\lambda^0=\left\{u\in N_\lambda:(p+\gamma-1)\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)\|u\|_{r,b}^r=0\right\},$$

$$N_\lambda^-=\left\{u\in N_\lambda:(p+\gamma-1)\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)\|u\|_{r,b}^r<0\right\}.$$

注记：设 $h_u(t)=I_\lambda(tu)$，$t\geq 0$，$u\in W_0^{1,H}(\Omega)\setminus\{0\}$，则下列结论成立：

(1) $u\in N_\lambda\Leftrightarrow h_u'(1)=0$；

(2) 若 $u\in N_{\lambda}^{+}$，那么 $t=1$ 是 $h_u(t)$ 的极小值点；

(3) 若 $u\in N_{\lambda}^{-}$，那么 $t=1$ 是 $h_u(t)$ 的极大值点。

为了得到问题(1.1)具有多个正解，我们需要对(1.1)中的相关函数和参作如下假设：

$$\text{(H)}\quad (1)\ 1<p<q<N,\ \frac{q}{p}<1+\frac{1}{N},\ 0\le w(x)\in C^{0,1}(\bar{\Omega});$$

$$(2)\ 0<\gamma<1,\ q<r<p^*=\frac{Np}{N-p};$$

$$(3)\ a(x)\in L^{\infty}(\Omega),\ \ a(x)\ge 0,\ \ a.e.\ x\in\Omega;$$

$$(4)\ 0<b_0\le b(x)\in L^{\infty}(\Omega).$$

本文的主要结果如下：

定理 1.1 假设条件(H)成立，则存在 $\lambda^*>0$，对任意 $\lambda\in(0,\lambda^*)$，问题(1.1)至少有两个正解 $u^*,v^*\in W_0^{1,H}(\Omega)$，并且 $I_\lambda(u^*)<0<I_\lambda(v^*)$。

本文共分为三个部分，第一部分介绍引言及主要结果，第二部分介绍基本知识，第三部分介绍相关引理和主要结果的证明。

2. 预备知识及相关结果

本节首先介绍一些记号，然后陈述加权 Sobolev 空间的相关结果。

记

$$L^H(\Omega)=\{u\,|\,u:\Omega\to\mathbb{R}\text{是可测的},\rho_H(u)<\infty\},$$

在 $L^H(\Omega)$ 上定义范数

$$\|u\|_H=\inf\left\{\tau>0:\rho_H\left(\frac{u}{\tau}\right)\le 1\right\},$$

其中 $H(x,t)=t^p+w(x)t^q$，

$$\rho_H(u)=\int_\Omega H(x,|u|)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(|u|^p+w(x)|u|^q\right)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

记

$$L_w^q(\Omega)=\left\{u\,|\,u:\Omega\to\mathbb{R}\text{是可测的},\int_\Omega w(x)|u|^q\,\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

在 $L_w^q(\Omega)$ 上定义范数

$$\|u\|_{q,w}=\left(\int_\Omega w(x)|u|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

同样的方法定义 $L_b^r(\Omega)$。

记

$$W^{1,H}(\Omega)=\{u\,|\,u\in L^H(\Omega),|\nabla u|\in L^H(\Omega)\},$$

在 $W^{1,H}(\Omega)$ 上定义范数

$$\|u\|_{1,H}=\|u\|_H+\|\nabla u\|_H.$$

记$W_0^{1,H}(\Omega)$是$C_0^\infty(\Omega)$在$W^{1,H}(\Omega)$中的闭包。根据(H-1)和 Poincaré 不等式可以得到定义在$W_0^{1,H}(\Omega)$上的范数$\|u\|_{1,H}$与$\|\nabla u\|_H$等价(见[13])。

命题 2.1 (见[4])假设条件(H)成立，有下列性质成立：

(1) $L^H(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$和$W_0^{1,H}(\Omega)\hookrightarrow W_0^{1,r}(\Omega)$是连续的，其中$r\in[1,p]$；

(2) $W_0^{1,H}(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$是连续的，其中$r\in[1,p^*]$；

(3) $W_0^{1,H}(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$是紧嵌入的，其中$r\in[1,p^*)$；

(4) $L^H(\Omega)\hookrightarrow L_w^q(\Omega)$是连续的；

(5) $L^q(\Omega)\hookrightarrow L^H(\Omega)$是连续的。

命题 2.2 (见[4])假设条件(H)成立，设$u\in L^H(\Omega)$和$\rho_H(u)$如(2.1)式所定义，那么有：

(1) 如果$u\neq 0$，则$\|u\|=\lambda$的充要条件是$\rho_H\left(\frac{u}{\lambda}\right)=1$。

(2) $\|u\|_H<1$充要条件是$\rho_H(u)<1$；
$\|u\|_H>1$充要条件是$\rho_H(u)>1$；
$\|u\|_H=1$充要条件是$\rho_H(u)=1$。

(3) 如果$\|u\|_H<1$，则$\|u\|_H^q\leq\rho_H(u)\leq\|u\|_H^p$。

(4) 如果$\|u\|_H>1$，则$\|u\|_H^p\leq\rho_H(u)\leq\|u\|_H^q$。

(5) $\|u\|_H\to 0$充要条件是$\rho_H(u)\to 0$。

(6) $\|u\|_H\to+\infty$充要条件是$\rho_H(u)\to+\infty$。

命题 2.3 (见[4])设非线性映射$A:W_0^{1,H}(\Omega)\to W_0^{1,H}(\Omega)^*$定义为

$$\langle A(u),v\rangle=\int_\Omega\left(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u+b(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\quad\forall u,v\in W_0^{1,H}(\Omega),$$

那么A是有界的、连续的、严格单调的，且为(S_+)型。

3. 主要结果的证明

引理 3.1 假设条件(H)成立，则$I_\lambda(u)$在N_λ上是强制的。

证：设$u\in N_\lambda$，不妨设$\|u\|_{1,H,0}>1$。由N_λ的定义可知

$$-\lambda\|u\|_{r,b}^r=-\|\nabla u\|_p^p-\|\nabla u\|_{q,w}^q+\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

由 Hölder 不等式，命题 2.1 和命题 2.2 有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|\nabla u\|_p^p+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\|\nabla u\|_{q,w}^q+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\\&\geq\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\rho_H(\nabla u)+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\mathrm{d}x\\&\geq c\|u\|_{1,H}^p-c\|u\|_{1,H}^{1-\gamma}.\end{aligned}$$

因为$1-\gamma<1<p$，所以$I_\lambda(u)$在N_λ是强制的。证毕。

引理 3.2 假设条件(H)成立，则存在$\lambda_1^*>0$，对于任意$\lambda\in(0,\lambda_1^*)$，有$N_\lambda^0=\varnothing$。

证：用反证法。假设对于任意$\lambda_1^*>0$，存在$\lambda\in(0,\lambda_1^*)$，有$N_\lambda^0\neq\varnothing$，即存在$u\in N_\lambda^0$，成立

$$(p+\gamma-1)\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)\|u\|_{r,b}^r=0. \tag{3.2}$$

因为$u\in N_\lambda$，那么

$$\|\nabla u\|_p^p+\|\nabla u\|_{q,w}^q=\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x+\lambda\|u\|_{r,b}^r. \tag{3.3}$$

由(3.2)和(3.3)可得

$$(r-p)\|\nabla u\|_p^p+(r-q)\|\nabla u\|_{q,w}^q=(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

利用 Hölder 不等式和命题 2.1 得到

$$\min\left\{\|u\|_{1,H}^p,\|u\|_{1,H}^q\right\}\le c\|u\|_{1,H}^{1-\gamma}.$$

因为$1-\gamma<1<p<q$，所以

$$\|u\|_{1,H}\le c. \tag{3.5}$$

另一方面，由(3.2)式，利用 Hölder 不等式和命题 2.1，我们有

$$\min\left\{\|u\|_{1,H}^p,\|u\|_{1,H}^q\right\}\le \lambda c\|u\|_{1,H}^r.$$

因此

$$\|u\|_{1,H}^q\ge\left(\frac{1}{\lambda c}\right)^{\frac{1}{r-q}}.$$

注意到$p<q<r$，若$\lambda\to 0^+$，便得到$\|u\|\to+\infty$，与(3.5)式矛盾。证毕。

引理 3.3 假设条件(H)成立，则下列结论成立：

(1) 存在$\lambda_2^*\in(0,\lambda_1^*)$，当$\lambda\in(0,\lambda_2^*)$时，$N_\lambda^+\ne\varnothing$，其中$\lambda_1^*$是由引理 3.2 给出。

(2) 对任意$\lambda\in(0,\lambda_2^*)$，存在$u^*\in N_\lambda^+$，$u^*(x)\ge 0$，$a.e.\ x\in\Omega$，使得$I_\lambda(u^*)=m_\lambda^+<0$，其中$m_\lambda^+=\inf_{N_\lambda^+}I_\lambda$。

证 (1) 设$u\in W_0^{1,H}(\Omega)\setminus\{0\}$，定义函数$f_u(t):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$f_u(t)=t^{p-r}\|\nabla u\|_p^p-t^{-r-\gamma+1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x.$$

由于

$$f_u'(t)=(p-r)t^{p-r-1}\|\nabla u\|_p^p+(r+\gamma-1)t^{-r-\gamma}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x,$$

令$f_u'(t)=0$，得到唯一驻点

$$t_{u,1}=\left[\frac{(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x}{(r-p)\|\nabla u\|_p^p}\right]^{\frac{1}{p+\gamma-1}},$$

且当$0<t<t_{u,1}$时，$f_u'(t)>0$；当$t>t_{u,1}$时，$f_u'(t)<0$。因此$f_u(t_{u,1})=\max_{t>0}f_u(t)$。

又$f_u(t)=t^{p-r}\left(\|\nabla u\|_p^p-t^{-p-\gamma+1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\right)$，所以存在$T_u$，当$t>T_u$时，有$f_u(t)>0$，从而$f_u(t_{u,1})=\max_{t>0}f(t)>0$。

经过简单计算得到

$$f_u\left(t_{u,1}\right)=\frac{\left[(r-p)\|\nabla u\|_p^p\right]^{\frac{r-p}{p+\gamma-1}}}{\left[(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{r-p}{p+\gamma-1}}}\|\nabla u\|_p^p$$
$$-\frac{\left[(r-p)\|\nabla u\|_p^p\right]^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}}{\left[(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x \tag{3.6}$$
$$=\frac{p+\gamma-1}{r-p}\left[\frac{r-p}{r+\gamma-1}\right]^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}\|\nabla u\|_p^{\frac{p(r+\gamma-1)}{p+\gamma-1}}\left(\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r}{p+\gamma-1}}.$$

由 Sobolev 嵌入定理及 Hölder 不等式知，存在常数 C_1，使得

$$\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\le C_1\|u\|_{p^*}^{1-\gamma}. \tag{3.7}$$

由(3.6)，(3.7)和条件(H-4)知，存在正常数 C_2， C_3 和 C_4，成立

$$\begin{aligned}f_u\left(t_{u,1}\right)-\lambda\|u\|_{r,b}^r&=\frac{p+\gamma-1}{r-p}\left[\frac{r-p}{r+\gamma-1}\right]^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}\|\nabla u\|_p^{\frac{p(r+\gamma-1)}{p+\gamma-1}}\left[\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-r}{p+\gamma-1}}-\lambda\|u\|_{r,b}^r\\&\ge\frac{p+\gamma-1}{r-p}\left[\frac{r-p}{r+\gamma-1}\right]^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}C_2\left(\|u\|_{p^*}^p\right)^{\frac{r+\gamma-1}{p+\gamma-1}}\left(C_1\|u\|_{p^*}^{1-\gamma}\right)^{\frac{p-r}{p+\gamma-1}}-\lambda C_3\|u\|_{p^*}^r\\&=\left(C_4-\lambda C_3\right)\|u\|_{p^*}^r.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此存在 $\lambda_2^*\in\left(0,\lambda_1^*\right)$，且 λ_2^* 与 u 无关，当 $\lambda\in\left(0,\lambda_2^*\right)$，有

$$f_u\left(t_{u,1}\right)-\lambda\|u\|_{r,b}^r>0. \tag{3.9}$$

进一步考虑函数 $g_u(t):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$g_u(t)=t^{p-r}\|\nabla u\|_p^p+t^{q-r}\|\nabla u\|_{q,w}^q-t^{-r-\gamma+1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x.$$

由于

$$\begin{aligned}g_u'(t)&=(p-r)t^{p-r-1}\|\nabla u\|_p^p+(q-r)t^{q-r-1}\|\nabla u\|_{q,w}^q-(-r-\gamma+1)t^{-r-\gamma}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\\&=t^{-r-\gamma}\left[(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-(r-p)t^{p+\gamma-1}\|\nabla u\|_p^p-(r-q)t^{q+\gamma-1}\|\nabla u\|_{q,w}^q\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

因为$1-\gamma<p<q$，我们有 $\lim_{t\to0^+}g_u'(t)=+\infty,\ \lim_{t\to+\infty}g_u'(t)=0$；且当 t 充分大时， $g_u'(t)<0$。

令

$$g_*(t)=(r+\gamma-1)\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-(r-p)t^{p+\gamma-1}\|\nabla u\|_p^p-(r-q)t^{q+\gamma-1}\|\nabla u\|_{q,w}^q,$$

那么

$$g_*'(t)=-(r-p)(p+\gamma-1)t^{p+\gamma-2}\|\nabla u\|_p^p-(r-q)(q+\gamma-1)t^{q+\gamma-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q<0.$$

因此存在唯一 $t_{u,2}>0$，使得

$$g_u\left(t_{u,2}\right)=\max_{t>0}g_u(t)>0,\quad g_u'\left(t_{u,2}\right)=0,$$

且当 $0<t<t_{u,2}$ 时， $g_u'(t)>0$；当 $t>t_{u,2}$ 时， $g_u'(t)<0$。

因为$g_u(t)\ge f_u(t)$，所以由(3.9)可知对任意$\lambda\in(0,\lambda_2^*)$，有

$$g_u(t_{u,2})>\lambda\|u\|_{r,b}^r>0.$$

另外，由于$\lim\limits_{t\to 0^+}g_u(t)=-\infty$，故存在唯一$t_{u,3}\in(0,t_{u,2})$，使得

$$g_u(t_{u,3})=\lambda\|u\|_{r,b}^r,\ g_u'(t_{u,3})>0. \tag{3.11}$$

接下来我们考虑纤维映射$h_u(t)=I_\lambda(tu)$，$t\ge 0$，$u\in W_0^{1,H}(\Omega)\setminus\{0\}$。

首先，因为$h_u(t)\in C^2(0,+\infty)$，那么

$$h_u'(t)=t^{p-1}\|\nabla u\|_p^p+t^{q-1}\|\nabla u\|_{q,w}^q-t^{-\gamma}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-\lambda t^{r-1}\|u\|_{r,b}^r,$$

$$h_u''(t)=(p-1)t^{p-2}\|\nabla u\|_p^p+(q-1)t^{q-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q+\gamma t^{-\gamma-1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-\lambda(r-1)t^{r-2}\|u\|_{r,b}^r. \tag{3.12}$$

利用(3.11)得到

$$\gamma t_{u,3}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p+\gamma t_{u,3}^{q-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q-\gamma\lambda t_{u,3}^{r-2}\|u\|_{r,b}^r=\gamma t_{u,3}^{-\gamma-1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x \tag{3.13}$$

和

$$-(r-1)t_{u,3}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p-(r-1)t_{u,3}^{q-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q+(r-1)t_{u,3}^{-\gamma-1}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x=-\lambda(r-1)t_{u,3}^{r-2}\|u\|_{r,b}^r. \tag{3.14}$$

把(3.13)代入(3.12)得

$$\begin{aligned}h_u''(t_{u,3})&=(p+\gamma-1)t_{u,3}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)t_{u,3}^{q-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)t_{u,3}^{r-2}\|u\|_{r,b}^r\\&=t_{u,3}^{-2}\left[(p+\gamma-1)t_{u,3}^p\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)t_{u,3}^q\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)t_{u,3}^r\|u\|_{r,b}^r\right].\end{aligned} \tag{3.15}$$

把(3.14)代入(3.12)，并借助(3.11)可得

$$\begin{aligned}h_u''(t_{u,3})&=(p-r)t_{u,3}^{p-2}\|\nabla u\|_p^p+(q-r)t_{u,3}^{q-2}\|\nabla u\|_{q,w}^q+(r+\gamma-1)t_{u,3}^q\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x\\&=t_{u,3}^{1-r}g_u'(t_{u,3})>0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

结合(3.15)和(3.16)，我们有

$$(p+\gamma-1)t_{u,3}^p\|\nabla u\|_p^p+(q+\gamma-1)t_{u,3}^q\|\nabla u\|_{q,w}^q-\lambda(r+\gamma-1)t_{u,3}^r\|u\|_{r,b}^r>0,$$

故对于任意$\lambda\in(0,\lambda_2^*)$，有$t_{u,3}u\in N_\lambda^+$，所以$N_\lambda^+\ne\varnothing$。

(2) 对此部分证明分为两步。

第一步，证明$\inf_{N_\lambda^+}I_\lambda=m_\lambda^+<0$。

假设$u\in N_\lambda^+$，由于$N_\lambda^+\subseteq N_\lambda$，因此

$$-\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x=-\|\nabla u\|_p^p-\|\nabla u\|_{q,w}^q+\lambda\|u\|_{r,b}^r. \tag{3.17}$$

另一方面，由N_λ^+的定义可得

$$\lambda\|u\|_{r,b}^r<\frac{p+\gamma-1}{r+\gamma-1}\|\nabla u\|_p^p+\frac{q+\gamma-1}{r+\gamma-1}\|\nabla u\|_{q,w}^q. \tag{3.18}$$

由(3.17)和(3.18)，注意到$p<q<r$，$0<\gamma<1$，我们有

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{q}\|\nabla u\|_{q,w}^q - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{r}\|u\|_{r,b}^r \\ &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\|\nabla u\|_p^p + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\|\nabla u\|_{q,w}^q + \lambda\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{r}\right)\|u\|_{r,b}^r \\ &\le -\frac{(p+\gamma-1)(r-p)}{(1-\gamma)pr}\|\nabla u\|_p^p - \frac{(q+\gamma-1)(r-q)}{(1-\gamma)qr}\|\nabla u\|_{q,w}^q \\ &< 0, \end{aligned}$$

故 $m_\lambda^+ < 0$。

第二步，证明存在 u^*，使得 $I_\lambda(u^*) = m_\lambda^+$。

首先选取 $I_\lambda(u)$ 极小化序列 $\{u_n\} \subset N_\lambda^+$，即

$$I_\lambda(u_1) \ge I_\lambda(u_2) \ge \cdots \ge I_\lambda(u_n) \ge \cdots,$$

且当 $n \to \infty$，有

$$I_\lambda(u_n) \to m_\lambda^+ < 0. \tag{3.19}$$

由引理 3.1 知 $\{u_n\}$ 是有界的。因此，存在 $\{u_n\}$ 的子列(仍记为其本身)和 $u^* \in W_0^{1,H}(\Omega)$，成立

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u^* \left(\text{在} W_0^{1,H}(\Omega)\text{中}\right), \\ u_n \to u^* \left(\text{在} L^r(\Omega)\text{中}\right), r \in [1, p^*), \\ u_n \to u^* \ a.e.\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

由(3.19)和(3.20)知

$$I_\lambda(u^*) \le \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) < 0 = I_\lambda(0).$$

故 $u^* \ne 0$。

为了证明 $\liminf\limits_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u^*)$，只需要证明：

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left(|\nabla u_n|^p + w(x)|\nabla u_n|^q\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega\left(|\nabla u^*|^p + w(x)|\nabla u^*|^q\right)\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

用反证法。假设

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left(|\nabla u_n|^p + w(x)|\nabla u_n|^q\right)\mathrm{d}x > \int_\Omega\left(|\nabla u^*|^p + w(x)|\nabla u^*|^q\right)\mathrm{d}x. \tag{3.22}$$

如果(3.22)成立，那么

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x > \int_\Omega|\nabla u^*|^p\,\mathrm{d}x$$

与

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega w(x)|\nabla u_n|^q\,\mathrm{d}x > \int_\Omega w(x)|\nabla u^*|^q\,\mathrm{d}x$$

至少一个成立。不妨设

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x > \int_\Omega|\nabla u^*|^p\,\mathrm{d}x$$

成立。利用下极限的性质和范数的弱下半连续性，对任意正常数 A，B，成立

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left(A|\nabla u_n|^p+Bw(x)|\nabla u_n|^q\right)\mathrm{d}x\\
&\geq\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left(A|\nabla u_n|^p\right)\mathrm{d}x+\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left(Bw(x)|\nabla u_n|^q\right)\mathrm{d}x\\
&=A\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x+B\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega w(x)|\nabla u_n|^q\,\mathrm{d}x\\
&>A\int_\Omega\left|\nabla u^*\right|^p\mathrm{d}x+B\int_\Omega w(x)\left|\nabla u^*\right|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

另外，对于 $u^*\in W_0^{1,H}(\Omega)$，根据(3.11)，存在唯一 $t_{u^*,3}>0$，使得

$$g_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)=\lambda\left\|u^*\right\|_{r,b}^r,\quad g'_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)>0.\tag{3.24}$$

利用(3.23)和(3.24)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}h'_{u_n}\left(t_{u^*,3}\right)\\
&=\liminf_{n\to\infty}\left[\left(t_{u^*,3}\right)^{p-1}\|\nabla u_n\|_p^p+\left(t_{u^*,3}\right)^{q-1}\|\nabla u_n\|_{q,w}^q-\left(t_{u^*,3}\right)^{-\gamma}\int_\Omega a(x)|u_n|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x-\lambda\left(t_{u^*,3}\right)^{r-1}\|u_n\|_{r,b}^r\right]\\
&>\left(t_{u^*,3}\right)^{p-1}\left\|\nabla u^*\right\|_p^p+\left(t_{u^*,3}\right)^{q-1}\left\|\nabla u^*\right\|_{q,w}^q-\left(t_{u^*,3}\right)^{-\gamma}\int_\Omega a(x)\left|u^*\right|^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\lambda\left(t_{u^*,3}\right)^{r-1}\left\|u^*\right\|_{r,b}^r\\
&=h'_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)=\left(t_{u^*,3}\right)^{r-1}\left[g_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)-\lambda\left\|u^*\right\|_{r,b}^r\right]=0,
\end{aligned}$$

故存在 $n_0\in\mathbb{N}$，对于任意 $n>n_0$ 有

$$h'_{u_n}\left(t_{u^*,3}\right)>0.\tag{3.25}$$

因为 $u_n\in N_\lambda^+\subset N_\lambda$，故

$$h'_{u_n}(t)=t^{r-1}\left[g_{u_n}(t)-\lambda\|u_n\|_{r,b}^r\right],\quad h'_{u_n}(1)=0,$$

这样便有

$$g_{u_n}(1)=\lambda\|u_n\|_{r,b}^r,$$

即有 $t_{u_n,3}=1$。由于 $0<t_{u_n,3}\leq t_{u_n,2}$，根据对函数 $g_{u_n}(t)$ 的讨论知，当 $0<t<t_{u_n,2}$ 时，我们有 $g'_{u_n}(t)>0$，所以对于任意 $t\in(0,1)$，有 $h'_{u_n}(t)<0$ 和 $h'_{u_n}(1)=0$，因此 $t_{u^*,3}>1$。

由于

$$h'_{u^*}(t)=t^{r-1}\left[g_{u^*}(t)-\lambda\left\|u^*\right\|_{r,b}^r\right],\quad g_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)=\lambda\left\|u^*\right\|_{r,b}^r.$$

从而 $h'_{u^*}\left(t_{u^*,3}\right)=0$。注意到 $1<t_{u^*,3}\leq t_{u^*,2}$ 和当 $0<t<t_{u^*,2}$ 时有 $g'_{u^*}(t)>0$，这样我们得到当 $0<t<t_{u^*,3}$ 时有 $h'_{u^*}(t)<0$，故 $h_{u^*}(t)$ 在 $\left[1,t_{u^*,3}\right]$ 上单调递减，结合(3.22)便有

$$I_\lambda\left(t_{u^*,3}u^*\right)\leq I_\lambda\left(u^*\right)<m_\lambda^+.\tag{3.26}$$

另一方面，因为 $t_{u^*,3}u^*\in N_\lambda^+$，又可以得到

$$m_\lambda^+=\inf_{N_\lambda^+}I_\lambda\leq I_\lambda\left(t_{u^*,3}u^*\right).\tag{3.27}$$

显然(3.26)与(3.27)是矛盾的。所以(3.21)成立。

由(3.21)知，我们可以找到一个子序列(仍记为其本身)满足

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p + w(x)|\nabla u_n|^q \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |\nabla u^*|^p + w(x)|\nabla u^*|^q \,\mathrm{d}x.$$

由 Brezis-Lieb 引理知在 $W_0^{1,H}(\Omega)$ 中 $u_n \to u^*$。所以 $I_\lambda(u_n) \to I_\lambda(u^*)$。故 $I_\lambda(u^*) = m_\lambda^+$。

由于 $u_n \in N_\lambda^+$，因此对于任意 $n \in \mathbb{N}$，有

$$(p+\gamma-1)\|\nabla u_n\|_p^p + (q+\gamma-1)\|\nabla u_n\|_{q,w}^q - \lambda(r+\gamma-1)\|u_n\|_{r,b}^r > 0.$$

令 $n \to +\infty$ 得

$$(p+\gamma-1)\|\nabla u^*\|_p^p + (q+\gamma-1)\|\nabla u^*\|_{q,w}^q - \lambda(r+\gamma-1)\|u^*\|_{r,b}^r \ge 0. \tag{3.28}$$

由引理 3.2 知(3.28)不能取等号，所以 $u^* \in N_\lambda^+$。因为 $|u^*|$ 也满足(3.28)，所以我们可以认为 $u^* \ge 0$ $a.e.$ $x \in \Omega$ 且 $u^* \ne 0$。证毕。

引理 3.4 假设条件(H)成立，则下列结论成立：

(1) 令 $u \in N_\lambda^+$，则存在 $\varepsilon > 0$ 和连续函数 $\theta : B_\varepsilon(9) \to (0,\infty)$，对任意 $y \in B_\varepsilon(0)$，有 $\theta(0) = 1$ 和 $\theta(y)(u+y) \in N_\lambda^+$ 成立，其中 $B_\varepsilon(0) = \left\{u \in W_0^{1,H}(\Omega) : \|u\|_{1,H} < \varepsilon\right\}$。

(2) 令 $h \in W_0^{1,H}(\Omega)$，$\lambda \in (0, \lambda_2^*)$，则存在 $b > 0$，对于任意 $t \in [0,b]$，有 $I_\lambda(u^*) \le I_\lambda(u^* + th)$，其中 u^* 由引理 3.3 中给出。

(3) 当 $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$，则 u^* 是问题(1.1)的正解，并且 $I_\lambda(u^*) < 0$。

证 (1) 首先给定函数 $\zeta : W_0^{1,H}(\Omega) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\zeta(y,t) = t^{p+\gamma-1}\|\nabla(u+y)\|_p^p + t^{q+\gamma-1}\|\nabla(u+y)\|_{q,w}^q - \int_\Omega a(x)|u+y|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - \lambda t^{r+\gamma-1}\|u+y\|_{r,b}^r,$$

因为 $u \in N_\lambda^+ \subset N_\lambda$，所以 $\zeta(0,1) = 0$。又因为 $u \in N_\lambda^+$，成立

$$\zeta_t'(0,1) = (p+\gamma-1)\|\nabla u\|_p^p + (q+\gamma-1)\|\nabla u\|_{q,w}^q - \lambda(r+\gamma-1)\|u\|_{r,b}^r > 0.$$

然后，由隐函数定理(见[14])知，存在 $\varepsilon > 0$ 和连续函数 $\theta : B_\varepsilon(0) \to (0,\infty)$，满足 $\theta(0) = 1$，且对于任意 $y \in B_\varepsilon(0)$，成立

$$\theta(y)(u+y) \in N_\lambda.$$

最后，选择 ε 足够小时，对于任意 $y \in B_\varepsilon(0)$，也成立

$$\theta(0) = 1 \text{ 和 } \theta(y)(u+y) \in N_\lambda^+.$$

(2) 给定函数 $\eta_h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta_h(t) = &(p-1)\|\nabla u^* + t\nabla h\|_p^p + (q-1)\|\nabla u^* + t\nabla h\|_{q,w}^q \\ &+ \gamma\int_\Omega a(x)|u^* + th|^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x - \lambda(r-1)\|u^* + th\|_{r,b}^r. \end{aligned} \tag{3.29}$$

因为 $u^* \in N_\lambda^+ \subset N_\lambda$，有

$$\int_\Omega a(x)(u^*)^{1-\gamma}\,\mathrm{d}x = \|\nabla u^*\|_p^p + \|\nabla u^*\|_{q,w}^q - \lambda\|u^*\|_{r,b}^r \tag{3.30}$$

和

$$(p+\gamma-1)\|\nabla u^*\|_p^p + (q+\gamma-1)\|\nabla u^*\|_{q,w}^q - \lambda(r+\gamma-1)\|u^*\|_{r,b}^r > 0, \tag{3.31}$$

结合(3.29)，(3.30)和(3.31)，有 $\eta_h(0)>0$。又因为 $\eta_h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是连续函数，由连续函数的局部保号性知，存在 b_0 大于零，使得对于任意 $t\in[0,b_0]$，存在 $\theta(t)>0$ 成立

$$\theta(t)(u^*+th)\in N_\lambda^+$$

和

$$\text{当}\, t\to 0^+ \,\text{时}\, \theta(t)\to 1. \tag{3.32}$$

因此，由 m_λ^+ 的定义知，对任意 $t\in[0,b_0]$，有

$$m_\lambda^+=I_\lambda(u^*)\le I_\lambda\left(\theta(t)(u^*+th)\right). \tag{3.33}$$

由 $h''_{u^*}(1)>0$，$h''_{u^*+th}(1)$ 关于 t 的连续性可知，存在 $t\in[0,b]$，其中 $b\in[0,b_0]$，有 $h''_{u^*+th}(1)>0$。由(3.33)知，对于任意的 $t\in[0,b]$，成立

$$m_\lambda^+=I_\lambda(u^*)\le I_\lambda\left(\theta(t)(u^*+th)\right)=h_{u^*+th}\left(\theta(t)\right)\le h_{u^*+th}(1)=I_\lambda(u^*+th).$$

(3) 对此部分证明分为三步。

第一步，证明对于任意 $h\in W_0^{1,H}(\Omega)$，成立

$$a(x)(u^*)^{-\gamma}h\in L^1(\Omega) \tag{3.34}$$

和对于任意 $h\in W_0^{1,H}(\Omega)$，$h\ge 0$，成立

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\left|\nabla u^*\right|^{p-2}\nabla u^*+w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2}\nabla u^*\right)\cdot\nabla h\mathrm{d}x\\&\ge\int_\Omega a(x)(u^*)^{-\gamma}h\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega b(x)(u^*)^{r-1}h\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.35}$$

令 $h\in W_0^{1,H}(\Omega)$，$h\ge 0$。给定一个递减序列 $\{t_n\}\subseteq(0,1]$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$。记

$$\phi_n(x)=a(x)\frac{\left(u^*(x)+t_nh(x)\right)^{1-\gamma}-u^*(x)^{1-\gamma}}{t_n},$$

我们知道 $\phi_n(x)$ 是非负可测的，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\phi_n(x)\to(1-\gamma)a(x)u^*(x)^{-\gamma}h(x)\quad a.e.\ x\in\Omega.$$

利用 Fatou 引理得到

$$\int_\Omega a(x)(u^*)^{-\gamma}h\mathrm{d}x\le\frac{1}{1-\gamma}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\phi_n\mathrm{d}x. \tag{3.36}$$

借助引理 3.4 (2)可知，当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}&\frac{I_\lambda(u^*+t_nh)-I_\lambda(u^*)}{t_n}\\&=\int_\Omega\frac{1}{p}\frac{\left|\nabla u^*+t_n\nabla h\right|^p-\left|\nabla u^*\right|^p}{t_n}\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{w(x)}{q}\frac{\left|\nabla u^*+t_n\nabla h\right|^q-\left|\nabla u^*\right|^q}{t_n}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega\phi_n\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{r}\frac{\left\|u^*+t_nh\right\|_{r,b}^r-\left\|u^*\right\|_{r,b}^r}{t_n}\\&\ge 0.\end{aligned}$$

结合(3.36)，有

$$\int_{\Omega}a(x)\left(u^{*}\right)^{-\gamma}h\mathrm{d}x\le\int_{\Omega}\left|\nabla u^{*}\right|^{p-2}\nabla u^{*}\nabla h\mathrm{d}x+\int_{\Omega}w(x)\left|\nabla u^{*}\right|^{q-2}\nabla u^{*}\nabla h\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}b(x)\left(u^{*}\right)^{r-1}h\mathrm{d}x.$$

这就证明(3.34)和(3.35)。

第二步，证明 $u^{*}(x)>0$， $a.e.\ x\in\Omega$。

由引理 3.3 (2)知 $u^{*}(x)>0$，$a.e.\ x\in\Omega$，并且 $I_{\lambda}\left(u^{*}\right)<0$。定义 $D=\left\{u^{*}(x)=0,\ a.e.\ x\in\Omega\right\}$，并假设 $|D|>0$。令 $h\in W_{0}^{1,H}(\Omega)$，且 $h>0$，设 b 由引理 3.4 (2)给出。由引理 3.4 (2)可得，对于任意 $0<t<b$，有

$$\frac{I_{\lambda}\left(u^{*}+th\right)-I_{\lambda}\left(u^{*}\right)}{t}\ge 0. \tag{3.37}$$

另一方面，我们又可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{I_{\lambda}\left(u^{*}+th\right)-I_{\lambda}\left(u^{*}\right)}{t}\\&=\frac{1}{p}\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla u^{*}+t\nabla h\right|^{p}-\left|\nabla u^{*}\right|^{p}}{t}\mathrm{d}x+\frac{1}{q}\int_{\Omega}w(x)\frac{\left|\nabla u^{*}+t\nabla h\right|^{q}-\left|\nabla u^{*}\right|^{q}}{t}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{(1-\gamma)t^{\gamma}}\int_{D}a(x)h^{1-\gamma}\mathrm{d}x-\frac{1}{1-\gamma}\int_{\Omega\setminus D}a(x)\frac{\left(u^{*}+th\right)^{1-\gamma}-\left(u^{*}\right)^{1-\gamma}}{t}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{\lambda}{r}\int_{\Omega}\frac{b(x)\left(\left(u^{*}+th\right)^{r}-\left(u^{*}\right)^{r}\right)}{t}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.38}$$

由于

$$\lim_{t\to0^{+}}\frac{1}{p}\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla u^{*}+t\nabla h\right|^{p}-\left|\nabla u^{*}\right|^{p}}{t}\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\left|\nabla u^{*}\right|^{p-2}\nabla u^{*}\nabla h\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{t\to0^{+}}\frac{1}{q}\int_{\Omega}w(x)\frac{\left|\nabla u^{*}+t\nabla h\right|^{q}-\left|\nabla u^{*}\right|^{q}}{t}\mathrm{d}x=\int_{\Omega}w(x)\left|\nabla u^{*}\right|^{q-2}\nabla u^{*}\nabla h\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{t\to0^{+}}\frac{\lambda}{r}\int_{\Omega}\frac{b(x)\left(\left(u^{*}+th\right)^{r}-\left(u^{*}\right)^{r}\right)}{t}\mathrm{d}x=\lambda\int_{\Omega}b(x)\left(u^{*}\right)^{r-1}h\mathrm{d}x$$

及由第一步证明知

$$0\le\lim_{t\to0^{+}}\frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{t}\int_{\Omega}a(x)\left(\left(u^{*}+th\right)^{1-\gamma}-\left(u^{*}\right)^{1-\gamma}\right)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}a(x)\left(u^{*}\right)^{-\gamma}h\mathrm{d}x<\infty,$$

再根据条件(H-3)，从(3.38)便可以得到

$$\lim_{t\to0^{+}}\frac{I_{\lambda}\left(u^{*}+th\right)-I_{\lambda}\left(u^{*}\right)}{t}=-\infty.$$

这与(3.37)矛盾，所以 $u^{*}(x)>0$， $a.e.\ x\in\Omega$。

第三步，证明 u^{*} 是问题(1.1)的正解。

令 $y\in W_{0}^{1,H}(\Omega)$， $\varepsilon>0$。取 $h=\left(u^{*}+\varepsilon y\right)_{+}$ 作为(3.36)测试函数，结合 $u^{*}\in N_{\lambda}^{+}\subset N_{\lambda}$ 和 $u^{*}>0$，有

$$
\begin{aligned}
0 \le & \int_\Omega \left(\left|\nabla u^*\right|^{p-2} \nabla u^* + w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2} \nabla u^* \right) \cdot \nabla \left(u^* + \varepsilon y\right)_+ \mathrm{d}x \\
& - \int_\Omega a(x)\left(u^*\right)^{-\gamma} \left(u^* + \varepsilon y\right)_+ \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega b(x)\left(u^*\right)^{r-1} \left(u^* + \varepsilon y\right)_+ \mathrm{d}x \\
\le & \varepsilon \left\{ \int_\Omega \left(\left|\nabla u^*\right|^{p-2} \nabla u^* + w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2} \nabla u^* \right) \cdot \nabla y \mathrm{d}x \right. \\
& - \int_\Omega a(x)\left(u^*\right)^{-\gamma} y \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega b(x)\left(u^*\right)^{r-1} y \mathrm{d}x \\
& \left. - \int_{\left\{u^* + \varepsilon y < 0\right\}} \left(\left|\nabla u^*\right|^{p-2} \nabla u^* + w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2} \nabla u^* \right) \cdot \nabla y \mathrm{d}x \right\}.
\end{aligned}
$$

因为$\left|\left\{u^* + \varepsilon y < 0\right\}\right| \to 0$ （$\varepsilon \to 0$），从而对上面不等式同时除以$\varepsilon > 0$，并令$\varepsilon \to 0$，得到

$$
\begin{aligned}
0 \le & \int_\Omega \left|\nabla u^*\right|^{p-2} \nabla u^* \cdot \nabla y \mathrm{d}x + \int_\Omega w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2} \nabla u^* \cdot \nabla y \mathrm{d}x \\
& - \int_\Omega a(x)\left(u^*\right)^{-\gamma} y \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega b(x)\left(u^*\right)^{r-1} y \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

用$-y$代替y，重复上述证明过程可以得到相反的不等式，故

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega a(x)\left(u^*\right)^{-\gamma} y \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega b(x)\left(u^*\right)^{r-1} y \mathrm{d}x \\
= & \int_\Omega \left|\nabla u^*\right|^{p-2} \nabla u^* \cdot \nabla y \mathrm{d}x + \int_\Omega w(x)\left|\nabla u^*\right|^{q-2} \nabla u^* \cdot \nabla y \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此，u^*是问题(1.1)的正解，且$I_\lambda\left(u^*\right) < 0$。证毕。

引理 3.5 假设条件(H)成立，则下列结论成立：

(1) 当$\lambda \in \left(0, \lambda_2^*\right)$时，$N_\lambda^- \ne \varnothing$，其中$\lambda_2^*$由引理 3.3 给出。

(2) 存在$\lambda_3^* \in \left(0, \lambda_2^*\right)$，当$\lambda \in \left(0, \lambda_3^*\right)$时，存在$v^* \in N_\lambda^-$，使得$I_\lambda\left(v^*\right) = m_\lambda^- > 0$，其中$m_\lambda^- = \inf_{N_\lambda^-} I_\lambda(v)$。

证 (1) 设$u \in W_0^{1,H}(\Omega) \setminus \{0\}$，然后从引理 3.3 (1)的证明过程可知，对任意$\lambda \in \left(0, \lambda_2^*\right)$，有

$$
g_u\left(t_{u,2}\right) > \lambda \|u\|_{r,b}^r > 0,
$$

且当$0 < t < t_{u,2}$时，$g_u(t)$单调递增；当$t > t_{u,2}$时，$g_u(t)$单调递减。

又由于$\lim\limits_{t \to +\infty} g_u(t) = 0$，故存在唯一$t_{u,4} \in \left(t_{u,2}, +\infty\right)$，使得

$$
g_u\left(t_{u,4}\right) = \lambda \|u\|_{r,b}^r, \quad g_u'\left(t_{u,4}\right) < 0. \tag{3.39}
$$

利用(3.39)得到

$$
\gamma t_{u,4}^{p-2} \|\nabla u\|_p^p + \gamma t_{u,4}^{q-2} \|\nabla u\|_{q,w}^q - \gamma \lambda t_{u,4}^{r-2} \|u\|_{r,b}^r = \gamma t_{u,4}^{-\gamma-1} \int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma} \mathrm{d}x \tag{3.40}
$$

和

$$
\begin{aligned}
& -(r-1) t_{u,4}^{p-2} \|\nabla u\|_p^p - (r-1) t_{u,4}^{q-2} \|\nabla u\|_{q,w}^q + (r-1) t_{u,4}^{-\gamma-1} \int_\Omega a(x)|u|^{1-\gamma} \mathrm{d}x \\
& = -\lambda (r-1) t_{u,4}^{r-2} \|u\|_{r,b}^r.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

把(3.40)代入(3.41)得

$$
\begin{aligned}
h_u''\left(t_{u,4}\right) & = (p+\gamma-1) t_{u,4}^{p-2} \|\nabla u\|_p^p + (q+\gamma-1) t_{u,4}^{q-2} \|\nabla u\|_{q,w}^q - \lambda (r+\gamma-1) t_{u,4}^{r-2} \|u\|_{r,b}^r \\
& = t_{u,4}^{-2} \left[(p+\gamma-1) t_{u,4}^p \|\nabla u\|_p^p + (q+\gamma-1) t_{u,4}^q \|\nabla u\|_{q,w}^q - \lambda (r+\gamma-1) t_{u,4}^r \|u\|_{r,b}^r \right].
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

把(3.42)代入(3.12)，并借助(3.39)可得

$$\begin{aligned} h_u''\left(t_{u,4}\right) &= \left(p-r\right)t_{u,4}^{p-2}\left\|\nabla u\right\|_p^p + \left(q-r\right)t_{u,4}^{q-2}\left\|\nabla u\right\|_{q,w}^q + \left(r+\gamma-1\right)t_{u,4}^{q}\int_\Omega a\left(x\right)\left|u\right|^{1-\gamma}\mathrm{d}x \\ &= t_{u,4}^{1-r}g_u'\left(t_{u,4}\right) < 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

结合(3.42)和(3.43)，我们有

$$\left(p+\gamma-1\right)t_{u,4}^p\left\|\nabla u\right\|_p^p + \left(q+\gamma-1\right)t_{u,4}^q\left\|\nabla u\right\|_{q,w}^q - \lambda\left(r+\gamma-1\right)t_{u,4}^r\left\|u\right\|_{r,b}^r < 0,$$

故对于任意 $\lambda\in\left(0,\lambda_2^*\right)$，有 $t_{u,4}u\in N_\lambda^-$，所以 $N_\lambda^-\neq\varnothing$ 。

(2) 此部分的证明与引理 3.3 中类似，此处省略，证毕。

引理 3.6 假设条件(H)成立，那么有下列结论成立：

(1) 令 $v\in N_\lambda^-$，则存在 $\varepsilon>0$ 和连续函数 $\theta: B_\varepsilon\left(0\right)\to\left(0,\infty\right)$，对任意 $y\in B_\varepsilon\left(0\right)$ 有 $\theta\left(0\right)=1$ 和 $\theta\left(y\right)\left(v+y\right)\in N_\lambda^-$ 成立，其中 $B_\varepsilon\left(0\right)=\left\{v\in W_0^{1,H}\left(\Omega\right):\left\|v\right\|_{1,H}<\varepsilon\right\}$ 。

(2) 令 $h\in W_0^{1,H}\left(\Omega\right)$，$\lambda\in\left(0,\lambda_3^*\right)$，则存在 $b>0$，对于任意 $t\in\left[0,b\right]$，有 $I_\lambda\left(v^*\right)\le I_\lambda\left(\theta\left(t\right)\left(v^*+th\right)\right)$ 。

(3) 当 $\lambda\in\left(0,\lambda_3^*\right)$，则 v^* 是问题(1.1)的正解，并且 $I_\lambda\left(v^*\right)>0$ 。

该引理的证明与引理 3.4 完全类似，此处不再重复。

定理 1.1 的证明：取 $\lambda^*=\lambda_3^*$，由于 $0<\lambda^*<\lambda_2^*<\lambda_1^*$，因此当 $\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$ 时，根据引理 3.3~3.6 知问题(1.1)存在两个正解 u^* 和 v^*，并且满足 $I_\lambda\left(u^*\right)<0<I_\lambda\left(v^*\right)$ 。

参考文献

[1] Battal, T., Bain, C.D., Weiss, M. and Darton, R.C. (2003) Surfactant Adsorption and Marangoni Flow in Liquid Jets: I. Experiments. *Journal of Colloid and Interface Science*, **263**, 250-260. https://doi.org/10.1016/S0021-9797(03)00253-4

[2] Benouhiba, N. and Benouhiba, Z. (2013) On the Solutions of the (*p*, *q*)-Laplacian Problem at Resonance. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **77**, 74-81. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.09.012

[3] Tanaka, M. (2014) Uniqueness of a Positive Solution and Existence of a Sign-Changing Solution for (*p*, *q*)-Laplace Equation. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, **2014**, 1-15.

[4] Liu, W. and Dai, G. (2018) Existence and Multiplicity Results for Double Phase Problems. *Journal of Differential Equations*, **265**, 4311-4334. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.006

[5] Papageorgiou, N.S., Vetro, C. and Vetro, F. (2020) Multiple Solutions for Parametric Double Phase Dirichlet Problems. *Communications in Contemporary Mathematics*, **23**, Article ID: 2050006. https://doi.org/10.1142/S0219199720500066

[6] Liu, W., Dai, G., Papageorgiou, N.S. and Winkert, P. (2020) Existence of Solutions for Singular Double Phase Problems via the Nehari Manifold Method. https://arxiv.org/abs/2101.00593

[7] do Ó, J.M. and Moameni, A. (2010) Solutions for Singular Quasilinear Schrödinger Equations with One Parameter. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **9**, 1011-1023. https://doi.org/10.3934/cpaa.2010.9.1011

[8] Liu, J., Liu, D. and Zhao, P. (2017) Soliton Solutions for a Singular Schrödinger Equation with Any Growth Exponents. *Acta Applicandae Mathematicae*, **148**, 179-199. https://doi.org/10.1007/s10440-016-0084-z

[9] Wang, L.L. (2018) Existence and Uniqueness of Solutions to Singular Quasilinear Schrödinger Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**, 1-9.

[10] Bai, Y., Motreanu, S. and Zeng, S. (2020) Continuity Results for Parametric Nonlinear Singular Dirichlet Problems. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 372-387. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0005

[11] Papageorgiou, N.S. and Smyrlis, G.A. (2015) Bifurcation Type Theorem for Singular Nonlinear Elliptic Equations. *Methods and Applications of Analysis*, **22**, 147-170. https://doi.org/10.4310/MAA.2015.v22.n2.a2

[12] Papageorgiou, N.S., Vetro, C. and Zhang, Y.P. (2020) Positive Solutions for Parametric Singular Dirichlet (*p*-*q*) Equations. *Nonlinear Analysis*, **198**, Article ID: 111882. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111882

[13] Colasuonno, F. and Squassina, M. (2016) Eigenvalues for Double Phase Variational Integrals. *Annali di Matematica*

Pura ed Applicata, **195**, 1917-1959. https://doi.org/10.1007/s10231-015-0542-7

[14] Papageorgiou,, N.S., Repovš, D.D. and Vetro, C. (2021) Positive Solutions for Singular Double Phase Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **501**, Article ID: 123896. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.123896