

具有等比例的猎物避难所的Holling I型捕食-食饵模型的全局动力学

罗丹

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2023年3月18日; 录用日期: 2023年4月19日; 发布日期: 2023年4月26日

摘要

在本文中, 通过引入阈值策略, 研究一类具有等比例的猎物避难所的Holling I型捕食-食饵模型并对其进行了全局分析, 以确定模型的全局动力学。现利用Filippov 理论, Lyapunov 函数法和格林公式等方法, 在两个子系统的全局动力学的基础上, 对阈值策略下的捕食-食饵模型, 我们研究其滑模动力学和全局动力学。最后通过数值模拟对理论结果进行验证。

关键词

非光滑系统, 捕食-食饵模型, 不连续, 平衡点, 稳定性

Global Dynamics of Holling Type I Predator-Prey Model with Equal Proportion of Prey Refuge

Dan Luo

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Mar. 18th, 2023; accepted: Apr. 19th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

In this paper, The objective of this paper is to investigate a Global dynamics of Holling type I predator-prey model with equal proportion of prey refuge by introducing threshold strategy. Here we provide a global qualitative analysis to determine the global dynamics of the model. Making use of Filippov theory, Lyapunov functions and Green formula, on the basis of global dynamics of two subsystems, for the predator-prey model under threshold strategy, we examine the sliding mode dynamics and the global dynamics. Finally, the theoretical results are verified by numerical simulation.

Keywords

Non-Smooth System, Predator-Prey Model, Discontinuous, Equilibrium, Stability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

了解捕食者和被捕食者之间的相互关系对自然中野生动物管理和生物多样性保护至关重要. 而研究捕食者-食饵模型的主要目的是描述和分析捕食者和猎物之间的相互作用, 从而反映真实的自然现象. 在现实生活中, 猎物庇护所以对捕食者和猎物种群的共存有重要影响. 根据最新的研究, 猎物使用的避难所可以通过增加环境复杂性、提高最小猎物密度和延长捕食者-猎物相互作用 [1-3]来提供避难, 猎物也可以通过快速蹦跑跳跃或减少猎物活动以及隐蔽 [4-6]等方式建立空间或时间的避难所以达到躲避捕食者的目的, 以此避免猎物的灭绝. 因此, 考虑猎物避难所是非常有用的. 以下模型是捕食者-食饵模型被用来研究恒定比例或恒定数量的猎物使用庇护所的影响 [1-5, 7, 8].

在1926年, Maynard [9]发表了一些关于猎物-捕食者种群的理论结果. 不久之后, 高斯在 [10]中通过实验验证了他们的预测. 有一个实验的捕食者-猎物系统是由草履虫(捕食者)和酵母细胞(猎物)组成的, 他们通过观察草履虫不能以低密度酵母细胞为食得出了以下结论: 当酵母细胞在低密度时, 它们在培养皿的底部形成了一个沉积物, 因此它们无法被栖息在水柱上的草履虫接触到. 因此, 猎物存在一个临界密度, 在这个密度下, 猎物实际上将在一个避难所以防止被捕食, 一旦猎物的密度超过了临界值, 猎物就会重新出现在培养皿的表面, 然后可以被捕食者捕食.

本文第二部分将文献 [10]中的连续的捕食者-食饵模型进行推广, 推广到分片光滑的捕食者-食饵模型, 并引入等比率的猎物避难所, 以研究等比率的猎物避难所对捕食者-食饵模型的影响以及分析了该模型的两个子系统的动力学及滑模动力学, 第三部分是全局动力学的分析. 在最后一节, 对所得到的结论进行了总结. 与连续微分动力系统相比该模型具有滑模动力学、伪平衡点、穿越极限环、滑模极限环等独特的性质, 其研究更具有挑战性.

2. 模型介绍及预备知识

在Gause et al. [10]和Maynard Smith [9]的捕食-食饵模型中引入了包含避难所的猎物种群数量 R_x , 我们修改了功能反应函数(Holling 1959), 使其变成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - c(x - R_x)y \\ \frac{dy}{dt} = ec(x - R_x)y - dy \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $x = x(t)$, $y = y(t)$ 分别表示猎物和捕食者在 t 时刻的数量, 而 r 表示猎物种群的内禀增长率, c 表示捕食者种群的捕获率, e 表示捕食者种群的转换率, d 表示捕食者种群的死亡率, k 表示猎物种群的最大环境容量.

其中 R_x 的数量可以从两个角度考虑 [4, 8]:

- (i) $R_x = mx$, 隐藏猎物的数量与猎物的密度成正比;
- (ii) $R_x = mx_c$, 隐藏猎物数量为常数, x_c 为猎物临界密度.

现在考虑第一种角度, 又因为捕食者与食饵之间的相互作用与食饵的数量也有密切关系, 当食饵的数量比较少的时候, 食饵会躲避起来, 这就使捕食者捕食食饵的难度加大. 我们可以得到以下这个具有第一类功能反应函数的不连续食饵-捕食模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - c(1 - m)xy \\ \frac{dy}{dt} = ec(1 - m)xy - dy \end{cases} \quad (2.2)$$

其中所有参数均是正数.

对系统(2.2)进行无量纲化和时间尺度变化, 令 $\tilde{x} = kx$, $\tilde{y} = ky$, $\tilde{t} = \frac{1}{r}t$. 得到

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{x}(1 - \tilde{x}) - \tilde{c}(1 - m)\tilde{x}\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = e\tilde{c}(1 - m)\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{d}\tilde{y} \end{cases}$$

令 $\frac{c\tilde{c}}{r} = \tilde{c}$, $\frac{d}{r} = \tilde{d}$, 即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - c(1 - \varepsilon m)xy \\ \frac{dy}{dt} = ec(1 - \varepsilon m)xy - dy \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 ε 为控制函数, $\sigma > 0$ 为控制阈值, 表示猎物小于控制阈值 σ 时, 猎物会隐藏起来, 否则不隐

藏.

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x < \sigma, \\ 0, & x > \sigma, \end{cases}$$

记 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, 将 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ 分为以下三个部分:

$$\Sigma = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x = \sigma\}$$

$$G_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x < \sigma\}$$

$$G_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x > \sigma\}$$

记

$$F_1(x, y) = (x(1-x) - c(1-m)xy, ec(1-m)xy - dy)$$

$$F_2(x, y) = (x(1-x) - cxy, ecxy - dy)$$

于是, 系统(2.3)可以写成下面的Filippov 系统:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \begin{cases} F_1(x, y), & (x, y) \in G_1 \\ F_2(x, y), & (x, y) \in G_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

由于向量场的不连续性, 本文将讨论(2.4)Filippov 意义下的解 [11], 其定义如下:

定义2.1. 若向量函数 $(x(t), y(t))$ 在 $(0, T)$ 的任意有界闭子区间 $[t_1, t_2]$ 上绝对连续 $(0 < T \leq +\infty)$, 满足 $x(0) = x_0$ 和 $y(0) = y_0$, 且存在可测函数 $\gamma = \gamma(t): [0, T] \rightarrow [0, 1]$ 使得对几乎所有的 $t \in [0, T)$ 有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - c(1-\gamma m)xy \\ \frac{dy}{dt} = ec(1-\gamma m)xy - dy \end{cases} \quad (2.5)$$

那么称向量函数 $(x(t), y(t))$ 是系统(2.3)过初始值 (x_0, y_0) 的解.

为了考虑模型(2.5)的生物学意义, 需要验证模型解的正性和有界性, 正性与有界性的证明由下面两个命题给出:

命题2.2. 令 $(x(t), y(t))$ 为系统(2.5)上满足初始条件 $x(0) = x_0 > 0$ 和 $y(0) = y_0 > 0$ 的解, 定义区间为 $[0, T)$, 其中 $T \in (0, +\infty]$, 则对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $x(t) > 0$ 和 $y(t) > 0$.

证明. 假设存在 t_1 , 使得 $x(t_1) < 0$, 则存在 $0 < t_* < t_1$, 使得 $x(t_*) = 0$, 且当 $t \in (0, t_*)$ 时, 有 $x(t) > 0$ 成立, 由系统(2.5)的第一个子方程可得.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - c(1-\gamma m)xy \\ &\geq x[-x - c(1-\gamma m)y] \end{aligned}$$

则当 $t \in (0, t_*)$ 有

$$x(t) \geq x_0 \exp\left(\int_0^t [-x - c(1-\gamma m)y] dt\right)$$

特别地, 当 $t = t_*$ 时有

$$x(t_*) \geq x_0 \exp\left(\int_0^{t_*} [-x - c(1 - \gamma m)y] dt\right) > 0$$

与 $x(t_*) = 0$ 矛盾, 故不存在 t_1 , 使得 $x(t_1) < 0$, 同理可得, 对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $y(t) > 0$. □

命题2.3. 系统(2.5)从 R_+^2 出发的解是有界的.

证明. 记 $W = x + \frac{1}{e}y$, 沿系统(2.5)对 W 求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{1}{e} \frac{dy}{dt} = x(1 - x) - \frac{d}{e}y \\ &\leq x\left(1 + \frac{d}{2} - x\right) - \frac{d}{2}W \\ &\leq \frac{\left(1 + \frac{d}{2}\right)^2}{4} - \frac{d}{2}W \end{aligned}$$

令 $\rho = \frac{\left(1 + \frac{d}{2}\right)^2}{4}$, $\phi = \frac{d}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} W(t) &< W(t_0) \exp(-\phi t) + \frac{\rho}{\phi}(1 - \exp(-\phi t)) \\ &\leq \max\left\{W(t_0), \frac{\rho}{\phi}\right\} \end{aligned}$$

和

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{\rho}{\phi}$$

因此, 系统(2.5)从 R_+^2 出发的解最终会留在区域 $\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \frac{1}{e}y \leq \frac{\rho}{\phi} + \theta\right\}$ 中, 证毕. □

在区域 G_1 上的模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - c(1 - m)xy \\ \frac{dy}{dt} = ec(1 - m)xy - dy \end{cases} \quad (2.6)$$

得到以下三个平衡点

$$E_0^+ = (0, 0), E_1^+ = (1, 0), E_2^+ = (x_2^+, y_2^+) = \left(\frac{d}{ec(1 - m)}, \frac{ec(1 - m) - d}{ec^2(1 - m)^2}\right)$$

在区域 G_2 上的模型为

$$\begin{cases} x(1 - x) - cxy \\ ecxy - dy \end{cases} \quad (2.7)$$

有三个平衡点, 分别为

$$E_0^- = (0, 0), E_1^- = (1, 0), E_2^- = (x_2^-, y_2^-) = \left(\frac{d}{ec}, \frac{ec - d}{ec^2}\right)$$

对于系统(2.5), 平衡点 E_0^+ E_0^- 为实(虚)平衡点; 对边界平衡点 E_1^+ E_1^- , 若 $1 < \sigma$ 则 E_1^+ E_1^- 为实(虚)平衡点, 若 $1 > \sigma$ 则 E_1^+ E_1^- 为虚(实)平衡点; 对地方性平衡点 E_2^+ E_2^- , 若 $x_2^+(x_2^-) < \sigma$ 则 E_2^+

E_2^- 为实(虚)平衡点, 若 $x_2^+(x_2^-) > \sigma$ 则 E_2^+ E_2^- 为虚(实)平衡点.

定理2.4. 在子系统(2.6)中平衡点 $E_0^+ = (0, 0)$, 平衡点 E_0^+ 是鞍点.

证明. 在子系统(2.6)在平衡点 $E_0^+ = (0, 0)$ 处的 *Jacobi* 矩阵为

$$J_{G_1}(E_0^+) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{vmatrix}$$

其中, 根据 $p-q$ 判别法, $q = -d < 0$, 故平衡点 E_0^+ 是鞍点. □

定理2.5. 若 $ec(1-m) < d$, 在 G_1 内, 边界平衡点 E_1^+ 是全局渐近稳定的, 而如果 $ec(1-m) > d$, 在 G_1 内, 地方性平衡点 E_2^+ 是全局渐近稳定的.

证明. 若 $ec(1-m) < d$, 考虑 *Lyapunov* 函数

$$V_1(x, y) = e(x-1-\ln x) + y$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(x, y)}{dt} &= e\left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \\ &= -e(x-1)^2 + (ec-d)y \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

根据 *LaSalle* 不变原理, 可得边界平衡点 E_1^+ 是全局渐近稳定的.

若 $ec(1-m) > d$, 考虑 *Lyapunov* 函数

$$V_2(x, y) = e[(x-x_2^+) - x_2^+ \ln \frac{x}{x_2^+}] + (y-y_2^+) - y_2^+ \ln \frac{y}{y_2^+}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(x, y)}{dt} &= e\left(\frac{x-x_2^+}{x}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{y-y_2^+}{y}\right) \frac{dy}{dt} \\ &= -e(x-x_2^+) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

根据 *LaSalle* 不变原理, 可得地方性平衡点 E_2^+ 是全局渐近稳定的. □

类似地, 子系统(2.7)的全局动力学可以通过下面的命题获得.

定理2.6. 在子系统(2.7)中平衡点 $E_0^- = (0, 0)$, 平衡点 E_0^- 是鞍点.

定理2.7. 若 $ec < d$, 在 G_2 内, 边界平衡点 E_1^- 是全局渐近稳定的, 而如果 $ec > d$, 在 G_2 内, 地方性平衡点 E_2^- 是全局渐近稳定的.

证明. 若 $ec < d$, 考虑 *Lyapunov* 函数

$$V_1(x, y) = e(x-1-\ln x) + y$$

由于

$$\frac{dV_1(x, y)}{dt} = -e(x-1)^2 + (ec-d)y \leq 0$$

根据LaSalle 不变原理, 可得边界平衡点 E_1^- 是全局渐近稳定的.

若 $ec > d$, 考虑Lyapunov 函数

$$V_2(x, y) = e[(x - x_2^-) - x_2^- \ln \frac{x}{x_2^-}] + (y - y_2^-) - y_2^- \ln \frac{y}{y_2^-}$$

由于

$$\frac{dV_2(x, y)}{dt} = -e(x - x_2^-) \leq 0$$

根据LaSalle 不变原理, 可得地方性平衡点 E_2^- 是全局渐近稳定的. □

让我们利用 [11]中的一些概念来分析Filippov 系统(2.5)的滑模动力学行为, 包括滑模域和伪平衡点的存在性等.

假设 ∇H 指向 G_1 . $L_{F_i}H = \langle \nabla H, F_i \rangle$ 表示向量 F_i 在 H 的方向导数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为标准内积, $L_{F_i}^m H = \langle \nabla (L_{F_i}^{m-1}H), F_i \rangle$ 表示 m 阶Lie 导数, 其中 $m \geq 2$. 通过简单的计算, 我们有

$$\begin{aligned} L_{F_1}H &= \langle \nabla H, F_1 \rangle = x(1-x) - c(1-m)xy \\ L_{F_2}H &= \langle \nabla H, F_2 \rangle = x(1-x-cy). \end{aligned}$$

由 $L_{F_1}H > 0$ 且 $L_{F_2}H < 0$ 可知,

$$\frac{1-\sigma}{c} < y < \frac{1-\sigma}{c(1-m)}$$

记 $y_1 = \frac{1-\sigma}{c}, y_2 = \frac{1-\sigma}{c(1-m)}$. 为了方便起见, 令 $T_1 = (\sigma, y_1), T_2 = (\sigma, y_2)$, 则 T_1 和 T_2 都是切点. 因此切换线 H 上的滑模域为

$$\Sigma_S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_1 < y < y_2\}$$

穿越区域为

$$\Sigma_{C_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 < y < y_1\}$$

和

$$\Sigma_{C_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_2 < y\}$$

使用如下Filippov凸方法 [11],

$$\frac{dZ}{dt} = F_S(Z) = (1-\lambda)F_{G_1}(Z) + \lambda F_{G_2}(Z),$$

系统(2.5)的滑模动力学方程可描述为

$$\frac{dZ}{dt} = F_S(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ ex(1-x) - dy \end{pmatrix}$$

其中 $x = \sigma$. 则方程只存在唯一的正根 $y_p = \frac{e\sigma(1-\sigma)}{d}$.

因此对于系统(2.5)可能存在唯一的伪平衡点为 $E_p = (\sigma, y_p)$, 根据 [11], E_p 存在当且仅当 $y_1 < y_p < y_2$, 又因为 $\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y_p} = -d < 0$, 因此若 E_p 存在, 必定是稳定的.

3. 主要结果及其证明

在这一节, 我们主要讨论系统(2.5)的实平衡点和伪平衡点的全局稳定性. 事实上, 为了证明平衡点的全局稳定性, 我们需要排除闭轨的存在.

定理3.1. 在系统(2.5)中, 不存在完全位于 $G_i(i = 1, 2)$ 区域内的闭合轨道.

证明. 利用Bendixon-Dulac 准则, 取 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, 得到

$$\frac{\partial B(x, y)f_{11}}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y)f_{12}}{\partial y} = -\frac{1}{y} \leq 0$$

$$\frac{\partial B(x, y)f_{21}}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y)f_{22}}{\partial y} = -\frac{1}{y} \leq 0$$

由此可知不存在完全位于 $G_i(i = 1, 2)$ 区域内的闭轨线. □

定理3.2. 在系统(2.5)中, 不存在包含部分滑动段 \overline{AB} 的极限环.

证明. 采用反证法来证明. 不失一般性, 不妨假设 E_2^+ 为实, E_2^- 为虚时, 系统(2.5)存在包含 Σ_S 的闭轨 Γ . 则 Γ 一定从切点 T_1 出发并且到达 Σ_S , 此时闭轨外面的解轨线不能进入闭轨内部(如图1所示), 这与 E_2^+ 在区域 G_1 的全局渐近稳定性是矛盾的. 因此从 T_1 出发的轨线不会到达 Σ_S . □

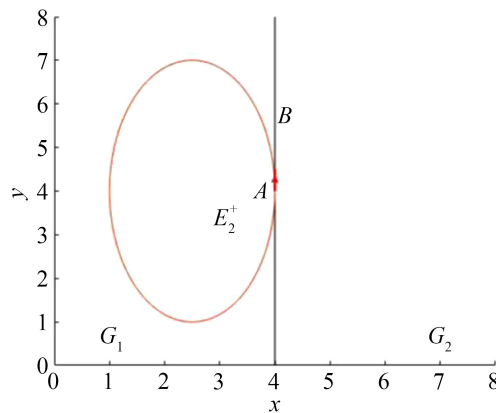


Figure 1. There is no sliding ring around the sliding segment AB

图 1. 滑动段 AB 周围没有滑模环

定理3.3. 在系统(2.5)中, 不存在围绕 $\overline{\Sigma_S}$ 闭合轨道, 这里 $\overline{\Sigma_S}$ 是 Σ_S 的闭包.

证明. 假设 $\overline{\Sigma_S}$ 周围存在闭轨线 $L = L_1 + L_2$, 其中 $L_1 = L \cap G_1, L_2 = L \cap G_2$. 用 K 表示由 L 围成的有界区域, 且 $K_1 \triangleq K \cap G_1, K_2 \triangleq K \cap G_2$ 用 $\widetilde{K}_i(i = 1, 2)$ 表示 L_i 和 P_i 所围成的有界区域(如图2), 满足 $\widetilde{K}_i \rightarrow K_i, (\varepsilon \rightarrow 0)$, 其中 P_1 和 P_2 分别表示直线 $I = \sigma - \varepsilon$ 和 $I = \sigma + \varepsilon(\forall \varepsilon)$ 令 $f^+ = (f_{11}, f_{12})$ 和 $f^- = (f_{21}, f_{22})$

$$\begin{aligned} \iint_K \left(\frac{\partial(Bf^+)}{\partial x} + \frac{\partial(Bf^-)}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_{i=1}^2 \iint_{K_i} \left(\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^2 \iint_{K_i} \left(-\frac{1}{y} \right) dx dy = -2 < 0 \end{aligned}$$

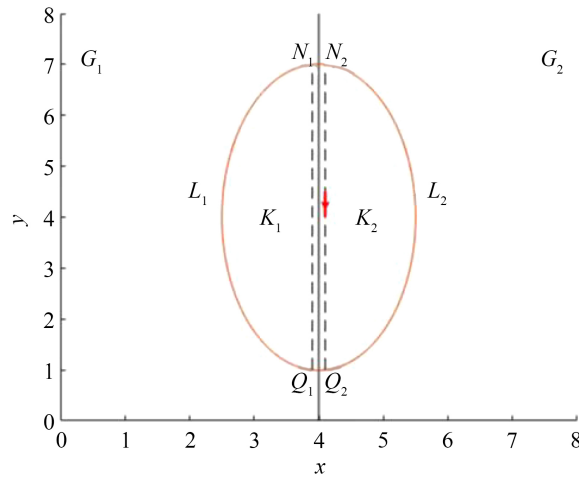


Figure 2. There is no limit cycle around the sliding segment AB

图 2. 滑动段 AB 周围没有极限环

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\widetilde{K}_i \rightarrow K_i$, 则

$$\iint_{K_i} \left[\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} \right] dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\widetilde{K}_i} \left(\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} \right) dx dy$$

沿着 L_1 时, $dx = f_{11}dt$, $dy = f_{12}dt$. 在区域 \widetilde{K}_1 应用 Green 公式可得

$$\begin{aligned} \iint_{\widetilde{K}_1} \left(\frac{\partial(Bf_{11})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{12})}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial \widetilde{K}_1} B(f_{11}dy - f_{12}dx) \\ &= \int_{L_1} (Bf_{11})dy - (Bf_{12})dx + \int_{p_1} (Bf_{11})dy - (Bf_{12})dx \\ &= \int_{p_1} (Bf_{11})dy - (Bf_{12})dx \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \iint_{\widetilde{K}_2} \left(\frac{\partial(Bf_{21})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{22})}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial \widetilde{K}_2} B(f_{21}dy - f_{22}dx) \\ &= \int_{p_2} (Bf_{21})dy - (Bf_{22})dx \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{i=1}^2 \iint_{K_i} \left(\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^2 \iint_{\widetilde{K}_i} \left(\frac{\partial(Bf_{i1})}{\partial x} + \frac{\partial(Bf_{i2})}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{p_1} (Bf_{11})dy - (Bf_{12})dx + \int_{p_2} (Bf_{21})dy - (Bf_{22})dx \right] \end{aligned}$$

设 N 和 Q 为闭轨 L 与直线 $I = \sigma$ 的上下两个交点的坐标. 设 N_1 和 Q_1 为闭轨 L_1 与直线 $I = \sigma$

$\varepsilon(\forall \varepsilon)$ 的上下两个交点的坐标, 设 N_2 和 Q_2 为闭轨 L_2 与直线 $I = \sigma + \varepsilon(\forall \varepsilon)$ 的上下两个交点的坐标, 其中 $N_2 = N + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} 0 &> \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{Q_1}^{N_1} (Bf_{11})dy - (Bf_{12})dx + \int_{N_2}^{Q_2} (Bf_{21})dy - (Bf_{22})dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{Q_1}^{N_1} \left[\frac{1-x}{y} - c(1-m) \right] dy - \int_{Q_2}^{N_2} \left(\frac{1-x}{y} - c \right) dy \right) \\ &= \int_Q^N c m dy > 0 \end{aligned}$$

此时产生矛盾, 从而排除了环绕 $\overline{\Sigma_S}$ 的闭轨的存在性, 证毕. □

情形1: $0 < \frac{d}{ec(1-m)} < \sigma < 1$.

在这种情形下, 平衡点 E_2^+ 是实平衡点, 平衡点 E_2^- 是虚平衡点, 伪平衡点 E_p 不存在.

定理3.4. 当 $0 < \frac{d}{ec(1-m)} < \sigma < 1$ 时, E_2^+ 全局渐近稳定.

证明. 平衡点 E_2^+ 为实, 是子系统(2.6)的局部渐近稳定的结点. 通过定理(3.2)和(3.3)的证明过程, 我们知道任何轨迹一旦接触滑模, 就会沿着滑动段 \overline{AB} 从下向上移动. 这时候根据定理(3.1), 没有完全位于区域 G_1 或 G_2 的极限环. 并且, 又由定理(3.2)和(3.3), 我们知道不存在包含部分滑动线或围绕滑动段 \overline{AB} 的极限环. 因此, 从区域 G_2 开始的轨迹要么直接走向 E_2^+ , 要么撞上滑动线, 沿着这条线从下端点 A 到上端点 B , 然后最终走向 E_2^+ (如图3所示). 因此, 所有的轨迹最终将趋向于平衡点 E_2^+ , 所以平衡点 E_2^+ 全局渐近稳定. 这就完成了证明. □

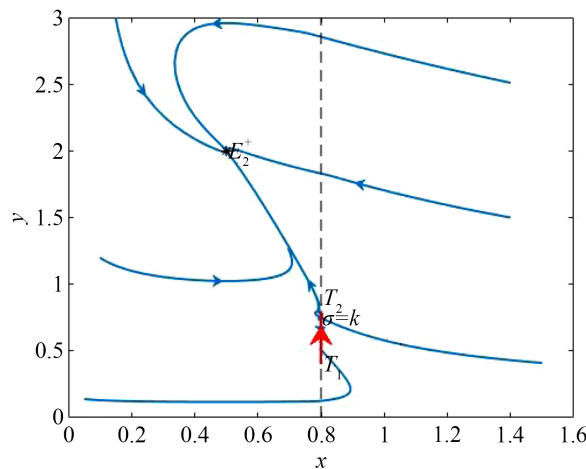


Figure 3. E_2^- is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.8, e = 0.8, c = 0.5, d = 0.1, m = 0.5$)

图 3. E_2^+ 在系统(2.3)中全局渐近稳定。其中取 $\sigma = 0.8, e = 0.8, c = 0.5, d = 0.1, m = 0.5$

情形2: $0 < \sigma < 1 < \frac{d}{ec}$.

在这种情形下, 平衡点 E_1^- 是实平衡点, 平衡点 E_2^+ 是虚平衡点, 伪平衡点 E_p 不存在.

定理3.5. 当 $0 < \sigma < 1 < \frac{d}{ec}$ 时, E_1^- 全局渐近稳定.

证明. 平衡点 E_1^- 为实, 是子系统(2.7)的局部渐近稳定的结点. 通过定理(3.2)和(3.3)的证明过程, 我们知道任何轨迹一旦接触滑模, 就会沿着滑动段 \overline{AB} 从下向上移动. 这时候根据定理(3.1), 没有完全位于区域 G_1 或 G_2 的极限环. 并且, 又由定理(3.2)和(3.3), 我们知道不存在包含部分滑动线或围绕滑动段 \overline{AB} 的极限环. 因此, 从区域 G_1 开始的轨迹要么直接走向 E_2^- , 要么撞上滑动线, 沿着这条线从下侧滑到上端点 B , 然后最终走向 E_1^- (如图 4 所示). 因此, 所有的轨迹最终将趋向于平衡点 E_1^- , 所以平衡点 E_1^- 全局渐近稳定. 这就完成了证明. \square

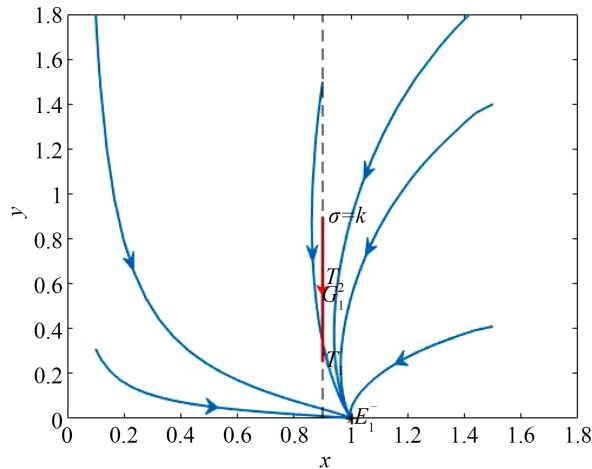


Figure 4. E_1^- is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.9, e = 0.5, c = 0.4, d = 0.8, m = 0.6$)

图 4. E_1^- 在系统(2.3)中全局渐近稳定. 其中取 $\sigma = 0.9, e = 0.5, c = 0.4, d = 0.8, m = 0.6$

情形3: $0 < \sigma < \frac{d}{ec} < 1$.

在这种情形下, 平衡点 E_2^- 是实平衡点, 平衡点 E_2^+ 是虚平衡点, 伪平衡点 E_p 不存在.

定理3.6. 当 $0 < \sigma < \frac{d}{ec} < 1$ 时, E_2^- 全局渐近稳定.

证明. 平衡点 E_2^- 为实, 是子系统(2.7)的局部渐近稳定的结点. 通过定理(3.2)和(3.3)的证明过程, 我们知道任何轨迹一旦接触滑模, 就会沿着滑动段 \overline{AB} 从下向上移动. 这时候根据定理(3.1), 没有完全位于区域 G_1 或 G_2 的极限环. 并且, 又由定理(3.2)和(3.3), 我们知道不存在包含部分滑动线或围绕滑动段 \overline{AB} 的极限环. 因此, 从区域 G_1 开始的轨迹要么直接走向 E_2^- , 要么撞上滑动线, 沿着这条线从下侧滑到上端点 B , 然后最终走向 E_2^- (如图 5 所示). 因此, 所有的轨迹最终将趋向于平衡点 E_2^- , 所以平衡点 E_2^- 全局渐近稳定. 这就完成了证明. \square

情形4: $0 < \frac{d}{ec} < \sigma < \frac{d}{ec(1-m)}$.

在这种情形下, 平衡点 E_2^+ 是虚平衡点, 平衡点 E_2^- 是虚平衡点, 伪平衡点 E_p 存在.

定理3.7. 当 $0 < \frac{d}{ec} < \sigma < \frac{d}{ec(1-m)}$ 时, E_p 全局渐近稳定.

证明. 当从 G_2 开始的轨迹从右接近 E_2^- 时, 它们撞击切换线, 沿着切换线滑动或进入区域 G_1 , 当从 G_1 开始的轨迹向上接近 E_2^+ 时, 它们撞击切换线, 沿着切换线滑动或进入区域 G_2 , 当两种轨迹在

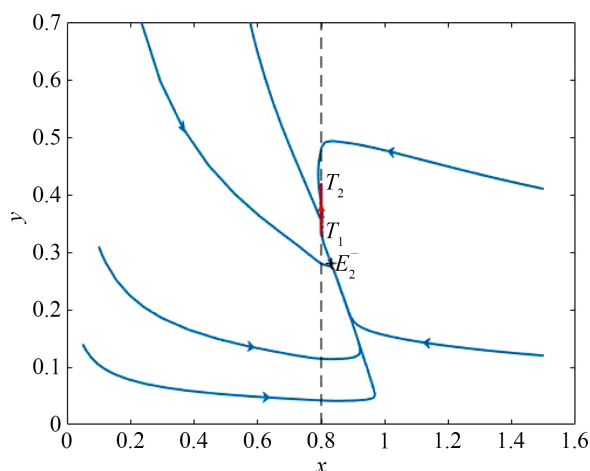


Figure 5. E_2^- is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.8, e = 0.8, c = 0.6, d = 0.4, m = 0.2$)

图 5. E_2^- 在系统(2.3)中全局渐近稳定。其中取 $\sigma = 0.8, e = 0.8, c = 0.6, d = 0.4, m = 0.2$

切换线上碰撞时, 出现了具有伪平衡的滑模段(如图 6 所示), 用定理(3.1), (3.2)和(3.3)排除极限环的存在, 又因为 E_p 是局部渐近稳定的, 可以很容易地推导出伪平衡 E_p 是全局渐近稳定的。 □

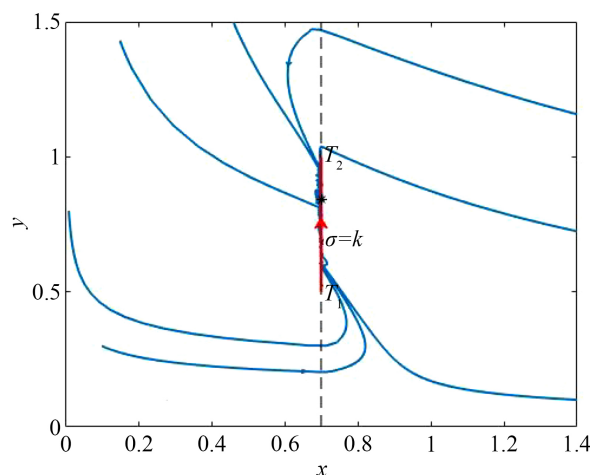


Figure 6. E_p is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.7, e = 0.8, c = 0.6, d = 0.2, m = 0.5$)

图 6. E_p 在系统(2.3)中全局渐近稳定。其中取 $\sigma = 0.7, e = 0.8, c = 0.6, d = 0.2, m = 0.5$

情形5: $\sigma = \frac{d}{ec} > 0$.

在这种情形下, 伪平衡点 E_p , 实平衡点 E_2^- 和可见开折点 T_1 重合, 变成一个边界平衡点 $E_1 = (\frac{d}{ec}, \frac{ec-d}{ec^2})$.

定理3.8. 当 $\sigma = \frac{d}{ec} > 0$ 时, E_1 全局渐近稳定.

证明. 若 $0 < \frac{d}{ec} = \sigma$, 通过定理(3.3)的证明过程, 我们知道不存在围绕 $\overline{\Sigma_s}$ 的闭轨, 虚平衡点 E_2^+ 和 E_2^- 分别在 G_1 和 G_2 中是全局渐近稳定的, 则具有正初值的解轨线要么直接进入 Σ_s , 要么先穿过 Σ , 然后在有限时间内到达 Σ_s , 要么轨线在滑模域 AB 上从上向下移动, 最终趋向边界平衡点 E_1 (如图7所示). 即 E_1 是全局渐近稳定的实平衡点, 证毕. \square

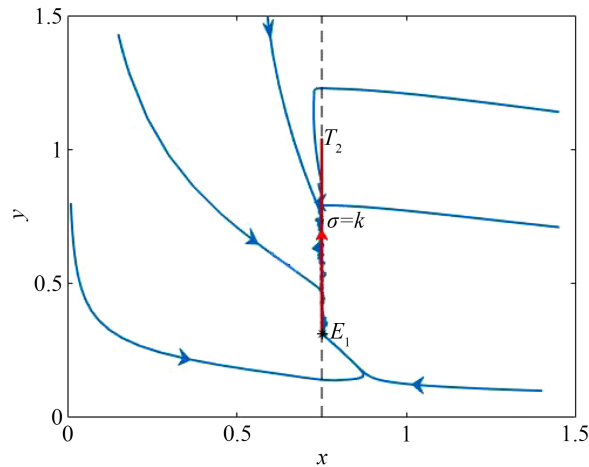


Figure 7. E_1 is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.75, e = 0.5, c = 0.8, d = 0.3, m = 0.7$)

图 7. E_1 在系统(2.3)中全局渐近稳定。其中取 $\sigma = 0.75, e = 0.5, c = 0.8, d = 0.3, m = 0.7$

情形6: $\sigma = \frac{d}{ec(1-m)} > 0$.

在这种情形下, 伪平衡点 E_p , 实平衡点 E_2^+ 和可见开折点 T_2 重合, 变成一个边界平衡点 $E_2 = (x_2^+, y_2^+) = \left(\frac{d}{ec(1-m)}, \frac{ec(1-m)-d}{ec^2(1-m)^2} \right)$.

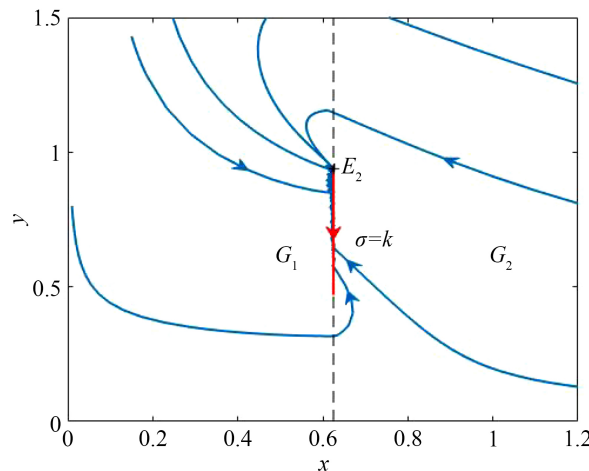


Figure 8. E_2 is globally asymptotically stable in the system (2.3) ($\sigma = 0.625, e = 0.8, c = 0.8, d = 0.2, m = 0.5$)

图 8. E_2 在系统(2.3)中全局渐近稳定。其中取 $\sigma = 0.625, e = 0.8, c = 0.8, d = 0.2, m = 0.5$

定理3.9. 当 $0 < \frac{d}{ec(1-m)} = \sigma$ 时, E_2 全局渐近稳定.

证明. 若 $0 < \frac{d}{ec(1-m)} = \sigma$, 通过定理(3.3)的证明过程, 我们知道不存在围绕 $\overline{\Sigma_s}$ 的闭轨, 虚平衡点 E_2^- 和 E_2^+ 分别在 G_2 和 G_1 中是全局渐近稳定的, 则具有正初值的解轨线要么直接进入 Σ_s , 要么先穿过 Σ , 然后在有限时间内到达 Σ_s , 要么轨线在滑模域 AB 上从上向下移动, 最终趋向边界平衡点 E_2 (如图 8 所示). 即 E_2 是全局渐近稳定的实平衡点, 证毕. \square

4. 结论

本文考虑了适当的阈值策略, 研究了具有等比例的猎物避难所的Holling I型捕食-食饵模型的全局动力学. 利用Lyapunov 函数法和格林公式, 研究了各类平衡点的全局渐近稳定性. 研究发现: 如果 $0 < \frac{d}{ec(1-m)} < \sigma < 1$ 时, 则实平衡点 E_2^+ 是全局渐近稳定的; 如果 $0 < \sigma < 1 < \frac{d}{ec}$ 时, 则实平衡点 E_1^- 全局渐近稳定; 当 $0 < \sigma < \frac{d}{ec} < 1$ 时, 则实平衡点 E_2^- 全局渐近稳定; 当 $0 < \frac{d}{ec} < \sigma < \frac{d}{ec(1-m)}$ 时, 伪平衡点 E_p 全局渐近稳定; 若 $\sigma = \frac{d}{ec} > 0$, 在这种情形下, 伪平衡点 E_p , 实平衡点 E_2^- 和可见开折点 T_1 重合, 重合成一个边界平衡点 E_1 , E_1 全局渐近稳定; 若 $0 < \frac{d}{ec(1-m)} = \sigma$, 在这种情形下, 伪平衡点 E_p , 实平衡点 E_2^+ 和可见开折点 T_2 重合, 重合成一个边界平衡点 E_2 , E_2 全局渐近稳定.

通过以上结论可知避难所以对猎物有一定的保护作用, 建立一定数量的避难所以对保护动物种群的多样性很有必要. 本文只研究了避难所以对Holling I型捕食-食饵模型的影响, 这是较简单的一类模型, 在之后的研究中可以考虑更加复杂的情况, 比如考虑避难所以对第二类功能反应函数的捕食-食饵模型的影响, 可能会得到不一样的结论.

参考文献

- [1] Eduardo, G.O. and Rodrigo, R.J. (2003) Dynamic Consequences of Prey Refuges in a Simple Model System: More Prey, Fewer Predators and Enhanced Stability. *Ecological Modelling*, **166**, 135-146. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00131-5](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00131-5)
- [2] Mcnair, J.N. (1987) Stability Effects of Prey Refuges with Entry-Exit Dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, **125**, 449-464. [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(87\)80213-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(87)80213-8)
- [3] Mcnair, J.N. (1986) The Effects of Refuges on Predator-Prey Interactions: A Reconsideration. *Theoretical Population Biology*, **29**, 38-63. [https://doi.org/10.1016/0040-5809\(86\)90004-3](https://doi.org/10.1016/0040-5809(86)90004-3)
- [4] Ko, W. and Ryu, K. (2006) Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response Incorporating a Prey Refuge. *Journal of Differential Equations*, **231**, 534-550. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.08.001>
- [5] Sih, A. (1987) Prey Refuges and Predator-Prey Stability. *Theoretical Population Biology*, **31**, 1-12. [https://doi.org/10.1016/0040-5809\(87\)90019-0](https://doi.org/10.1016/0040-5809(87)90019-0)
- [6] Wang, Y. and Wang, J.Z. (2012) Influence of Prey Refuge on Predator-Prey Dynamics. *Non-linear Dynamics*, **67**, 191-201. <https://doi.org/10.1007/s11071-011-9971-z>

- [7] Chen, L. and Chen, F. (2010) Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response Incorporating a Constant Prey Refuge. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 246-252. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.056>
- [8] Ma, Z.H., Li, W.L. and Zhao, Y. (2009) Effects of Prey Refuges on a Predator-Prey Model with a Class of Functional Responses: The Role of Refuges. *Mathematical Biosciences*, **218**, 73-79. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.12.008>
- [9] Maynard Smith, J. (1974) *Models in Ecology*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Gause, G.F., Smaragdova, N.P. and Witt, A.A. (1936) Further Studies of Interaction between Predators and Prey. *Journal of Animal Ecology*, **5**, 1-18. <https://doi.org/10.2307/1087>
- [11] Filippov, A.F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Springer, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9>