Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 759-765
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134079

Hans汉斯

共振双相问题的周期解的存在性

杨艺豪，鄢兴业

江西理工大学理学院，江西 赣州

收稿日期：2023年3月5日；录用日期：2023年4月4日；发布日期：2023年4月12日

摘 要

本文研究了一维双相问题在共振条件下周期解的存在性。利用山路定理和变分法证明一维的双相问题在相关方程的第一特征值λ_1处共振，且非线性项 $f(x,u)$ 满足一些局部非线性条件时，存在至少一个周期解。

关键词

双相问题，共振，周期解，山路引理

Existence of Periodic Solution of Resonant Double Phase Problem

Yihao Yang, Xingye Yan

College of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: Mar. 5th, 2023; accepted: Apr. 4th, 2023; published: Apr. 12th, 2023

Abstract

In this paper, the existence of periodic solutions for one-dimensional double phase problem under resonance conditions is studied. By using the mountain pass theorem and the variational method, it is proved that the one-dimensional double phase problem resonates at the first eigenvalue λ_1 of the correlation equation, and there is at least one periodic solution when the nonlinear term $f(x,u)$ satisfies some local nonlinear conditions.

Keywords

Double Phase Problem, Resonance, Periodic Solution, Mountain Pass Lemma

文章引用：杨艺豪，鄢兴业．共振双相问题的周期解的存在性[J]．理论数学, 2023, 13(4): 759-765.
DOI: 10.12677/pm.2023.134079

1. 引言

含多个变量的双相算子表示为

$$div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u+a\left(x\right)\left|\nabla u\right|^{q-2}\nabla u\right)$$

其显著特点是根据函数 $a(x)\geq 0$ 的取值表现出两类不同类型的椭圆性。Zhikov 是最早引入此类算子来描述强各向异性材料模型的人之一，详细内容参阅文献[1]。在研究强各向异性材料的行为特性时，Zhikov 发现它们的硬化特性随着点的变化而急剧变化，为了描述这种现象他介绍了泛函

$$u\to\int\left(\left|\nabla u\right|^{p}+a\left(x\right)\left|\nabla u\right|^{q}\right)\mathrm{d}x$$

特别的，在集合 $\{x:a(x)>0\}$ 上，泛函表现出 (p,q) 相，具体表现为梯度多项式的次数为 q。当 $|\nabla u|$ 小的时候，$|\nabla u|^{p}$ 是主项，当 $|\nabla u|$ 大的时候，$|\nabla u|^{q}$ 是主项。而在集合 $\{x:a(x)=0\}$ 上，泛函表现出 p 相，梯度多项式的次数为 p。

双相问题在在跨音速流动理论[2]，量子物理学[3]，反应扩散系统[4]等方面均有所应用。许多学者研究双相问题的解。例如，Liu 和 Dai 等[5] [6] [7]，Gasiński 和 Winkert [8]，Zeng 和 Rădulescu 等[9]，最新有关双相问题解的研究有 Sciammetta 和 Tornatore [10]。对共振双相方程的研究，有 Papageorgiou 和 Rădulescu [11]。然而很少有文献对双相问题周期解的存在性有所讨论。本文通过山路定理证明了只含有一个变量的共振双相问题至少存在一个周期解，据我们所知，本文是第一个研究双相问题周期解的第一个结果。

本文后面的结构如下，第二部分为预备知识，这一部分为后面的计算及结果提供了理论基础，介绍了 Musielak-Orlicz Sobolev 空间；第三部分研究一维共振双相问题的周期解，在一定条件下利用山路定理和变分法证明一维共振双相问题的周期解的存在性。

2. 预备知识

这一节我们主要介绍 Musielak-Orlicz Sobolev 空间 $W^{1,\mathcal{H}}(T)$ 和双相算子 $L(u)$ 及会用到的一些其他引理。

2.1. Musielak-Orlicz Sobolev 空间

我们定义 Musielak-Orlicz Sobolev 空间 $L^{\mathcal{H}}(T)$ 为：

$$L^{\mathcal{H}}\left(T\right)=\left\{u\,|\,u:T\to R\text{是可测的, 且}\,\rho_{\mathcal{H}}\left(u\right)<+\infty\right\}$$

其 Luxemburg 范数定义为

$$\|u\|_{\mathcal{H}}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{\mathcal{H}}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$$

其中 $\rho_{\mathcal{H}}(u)=\int_{T}\mathcal{H}(t,|u|)\mathrm{d}t$ 被称为模函数，$L^{\mathcal{H}}(T)$ 是可分、自反的 Banach 空间。通过 $L^{\mathcal{H}}(T)$ 的定义我们也可以定义 Musielak-Orlicz Sobolev 空间 $W^{1,\mathcal{H}}(T)$：

$$W^{1,\mathcal{H}}(T)=\left\{u\in L^{\mathcal{H}}(T):u'\in L^{\mathcal{H}}(T)\right\}$$

其范数表示为

$$\|u\|=\|u\|_{\mathcal{H}}+\|u'\|_{\mathcal{H}},$$

同时定义空间 $W_T^{1,\mathcal{H}}$

$$W_T^{1,\mathcal{H}}(T)=\left\{u:u\in W^{1,\mathcal{H}}(T),u(0)=u(T)\right\}$$

其范数表示为

$$\|u\|_{1,\rho_{\mathcal{H}}}=\left(\|u\|_{\mathcal{H}}^2+\|u'\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$W^{1,\mathcal{H}}(T)$ 和 $W_T^{1,\mathcal{H}}$ 都是可分、自反、凸 Banach 空间，参阅文献[12]。

接下来我们介绍关于 $L^{\mathcal{H}}(T)$ 和 $W^{1,\mathcal{H}}(T)$ 空间的一些命题。

命题 1 [12] [13]令 $p^*:=\dfrac{Np}{N-p}$， $p_*:=\dfrac{(N-1)p}{N-p}$，则有以下嵌入定理：

1) $W^{1,\mathcal{H}}(T)\hookrightarrow L^r(T)$ 是连续且紧的，对所有 $r\in\left[1,p^*\right]$；
2) $L^q(T)\hookrightarrow L^{\mathcal{H}}(T)$ 是连续的；
3) $W^{1,\mathcal{H}}(T)\hookrightarrow L^{\mathcal{H}}(T)$ 是连续且紧的；
4) $W_T^{1,\mathcal{H}}(T)\hookrightarrow C\left(\left[0,T\right],R^N\right)$ 是连续且紧的。

命题 2 [13]若 H_0 成立，令 $u\in W^{1,\mathcal{H}}(T)$，则以下模函数 $\rho_{\mathcal{H}}(\cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的关系成立：

1) 若 $\|u\|<1$，则 $\|u\|^q\le\rho_{\mathcal{H}}(u)\le\|u\|^p$；
若 $\|u\|>1$，则 $\|u\|^p\le\rho_{\mathcal{H}}(u)\le\|u\|^q$；
2) $\|u\|<1$ (或 $>1,=1$)当且仅当 $\rho_{\mathcal{H}}(u)<1$ (或 $>1,=1$)；
3) $\|u\|\to 0$，当且仅当 $\rho_{\mathcal{H}}(u)\to 0$； $\|u\|\to+\infty$，当且仅当 $\rho_{\mathcal{H}}(u)\to+\infty$；
4) $u_n\to u$ in $L^{\mathcal{H}}(T)\Leftrightarrow\rho_{\mathcal{H}}(u_n)\to\rho_{\mathcal{H}}(u)$。

2.2. 双相算子

令 $L(u)=-\left(|u'|^{p-2}u'+a(t)|u'|^{q-2}u'\right)'$，我们可以定义泛函：

$$I(u)=\int_T\frac{1}{p}|u'|^p+\frac{a(t)}{q}|u'|^q\,\mathrm{d}t,$$

我们容易知道 $I\in C^1$ 且 $L=I':W_T^{1,\mathcal{H}}(T)\to W_T^{1,\mathcal{H}}(T)^*$ 是非线性映射，对 $\forall v\in W_T^{1,\mathcal{H}}(T)^*$ 定义

$$\langle L(u),v\rangle=\int_T\left(|u'|^{p-2}u'+a(t)|u'|^{q-2}u'\right)v'\mathrm{d}t$$

$W_T^{1,\mathcal{H}}(T)^*$ 被称为 $W_T^{1,\mathcal{H}}(T)$ 的对偶空间。对算子 $L(u)$ 我们有以下命题：

命题 3 [7]双相算子 $L(u)$ 是连续、有界和严格单调的(也是极大单调)；L 也是 $(S)_+$ 映射(即，若 $u_n\rightharpoonup u$ in $W^{1,\mathcal{H}}(T)$)且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle L(u_n),u_n-u\rangle\le 0$，则 $u_n\to u$ in $W^{1,\mathcal{H}}(T)$)且同胚。

2.3. 其他引理

引理 1 [14] (C-条件)令 X 是一个 Banach 空间， X^* 是其对偶空间，则 $\varphi\in C^1(X)$ 满足 C-条件，若对任意序列 $\{u_n\}_{n\ge1}\subseteq X$，使得 $\{\varphi(u_n)\}_{n\ge1}\subseteq R$ 是有界的且 $\varphi'(u_n)(1+\|u_n\|)\to 0$ in X^*，则 $\{u_n\}_{n\ge1}$ 有一个收敛

的子列。

引理 2 (山路引理)若 X 是一个 Banach 空间，$\varphi \in C^1(X,R)$，令 $U \subset X$ 是 X 的原点的一个邻域，$x_0 \notin U$，且存在常数 $\beta > 0$，使得 $\varphi(0)=0$，$\varphi(x_0) \le 0$，$\varphi|_{\partial U} \ge \beta$。令 $c = \inf_{f \to \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(f(t))$，其中 Γ 是 X 中联结 0 与 x_0 的道路的集合，即 $\Gamma = \{ f \in C([0,1],X) \mid f(0)=0, f(1)=x_0 \}$，那么 $c \ge \beta$，φ 关于 c 有临界序列，若 φ 再满足 C-条件，则 c 是 φ 的临界值。

令 λ_1 是以下对 a.e. $x \in [0,T]$ 的周期问题的第一特征值

$$\begin{cases} -\left(|u'(t)|^{p-2} u'(t) \right)' = \lambda_1 |u(t)|^{r-2} u(t) \\ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$p < r$。且其变分形式为

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_T |u'(t)|^p \,\mathrm{d}t}{\int_T |u(t)|^r \,\mathrm{d}t} : u \in W_T^{1,p}, u \ne 0 \right\}$$

令 φ_1 为 λ_1 所对应的特征泛函，由文献[15]可知，有 $\varphi_1 > 0$。

3. 共振双相问题的周期解

3.1. 问题陈述

本文研究以下非线性周期问题：

$$\begin{cases} -\left(|u|^{p-2} u' + a(t) |u|^{q-2} u' \right)' = \lambda_1 |u|^{r-2} u + g(t,u), \text{ a.e. } t \in [0,T], \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $1 < p < q < r < N$，$u(t) \in R^N$ 是一个以 T 为周期的函数，$a(t):[0,T] \to [0,+\infty]$ 是一个加权函数，满足以下假设：

$H_0 : a(t):[0,T] \to [0,+\infty]$ 是 Lipschitz 连续，$a(t) \in L^\infty(T)$，对所有 $t \in [0,T]$，有 $a(t) \ge 0$，且 $\frac{q}{p} < 1 + \frac{1}{N}$。

令 $f(t,x) = \lambda_1 |x|^{r-2} x + g(t,x)$，通过文献[12] [14]，我们将对扰动项 $f(x,y)$ 做以下假设：

令 $F(t,x) = \int_0^x f(t,s)\mathrm{d}s$，$G(t,x) = \int_0^x g(t,s)\mathrm{d}s$，且 $f: T \times R \to R$ 和 $g: T \times R$ 都是 Caratheodory 泛函，又对 a.a. $x \in R$，$g(t,0) = 0$，满足：

(f) $f: T \times R \to R$ 且 $f(t,0) = 0$ 有

(i) $\exists 0 < \mu < p$ 和 $M > 0$，使得对 $\forall |x| > M$ 和 a.e. $t \in I$，有

$$(f(t,x), x) \le \mu F(t,x);$$

(ii) $\lim_{|x| \to \infty} \frac{F(t,x)}{|x|^q} = +\infty$，关于 a.e. $t \in I$ 是一致的；

(iii) 存在一个函数 $\theta \in L^1(I)$，且 $\theta(t) \le 0$，对 a.e. $t \in I$，$\theta(t) \ne 0$，使得

$$\limsup_{x \to 0} \frac{rF(t,x)}{|x|^r} \le \theta(t).$$

(g) $g: T \times R \to R$ 且 $g(t,0) = 0$ 有

(i) 存在 $\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(t,x)}{|x|^{r-2}x}=0$，关于 a.e. $t\in I$ 是一致的；

(ii) 对每个 $M>0$，存在一个泛函 $g_M\in L^{r'}(I)$，使得对 $|t|\le M$ 和 a.e. $t\in I$，有 $|g(t,x)|\le g_M(x)$.

本文目标是找问题(2)的周期解，我们定义

定义 1 [12]泛函 $u(t)\in W_T^{1,\mathcal{H}}(T)$ 被称为方程(2)的弱周期解，若以下方程成立：

$$\int_T\left(|u'|^{p-2}u'+a(t)|u'|u'\right)v'\mathrm{d}t+\int_T f(t,u)v\mathrm{d}t=0$$

对所有 $v(t)\in W_T^{1,\mathcal{H}}(T)$。

我们也知道，方程(2)的能量泛函可以表示为

$$J(u)=\int_T\frac{1}{p}|u'|^p+\frac{a(t)}{q}|u'|^q\,\mathrm{d}t-\int_T F(t,u)\mathrm{d}t.$$

所以容易知道弱周期解问题等价于能量泛函的临界点问题。

3.2. 结论与证明

引理 3 若条件(f)、(g)成立，则 $J(u)$ 满足 C-条件。

证明设 $\{u_n\}_{n\ge1}\subset W_T^{1,\mathcal{H}}(I)$，$J(u_n)$ 有界，且

$$\lim_{n\to\infty}(1+\|u_n\|)\|J'(u_n)\|=0,$$

则存在一个常数 c_1，使得

$$|J(u_n)|\le c_1,\ (1+\|u_n\|)\|J'(u_n)\|\le c_1 \tag{3}$$

由条件(g)和(f) (i)得，对 $\forall\delta>0$，存在一个泛函 $g_\delta>0$，使得对所有的 $x\in R$ 和 a.e. $t\in I$ 有

$$|f(t,x)|\le\delta|x|^{r-1}+g_\delta(t). \tag{4}$$

这意味着，令

$$h(t)=(p+M)\left(\delta\max_{|x|\le M}b(|x|)+g_\delta(t)\right) \tag{5}$$

其中 $b(|x|)=|x|^{r-1}$，所以存在 $M_2>0$，使得 $0<h(t)<M_2$，且由式子(4)可得对所有 $x\in R$，a.e. $t\in I$ 有

$$(f(t,x),x)\le\mu F(t,x)+h(t) \tag{6}$$

由(3)得

$$(1+p)c_1\ge\|J'(u_n)\|(1+\|u_n\|)-pJ(u_n)\ge\langle J'(u_n),u_n\rangle-pJ(u_n) \tag{7}$$

又由(6)，对所有 $n\in N$，a.e. $t\in I$ 我们有

$$\begin{aligned}\langle J'(u_n),u_n\rangle-pJ(u_n)&=\int_T|u_n'|^p+a(t)|u_n'|^q\,\mathrm{d}t-\int_T f(t,u_n)u_n\mathrm{d}t\\&\quad-p\left(\int_T\frac{1}{p}|u_n'|^p+\frac{a(t)}{q}|u_n'|^q\,\mathrm{d}t-\int_T F(t,u_n)\mathrm{d}t\right)\\&\ge p\int_T F(t,u_n)\mathrm{d}t-\int_T f(t,u_n)u_n\mathrm{d}t\\&\ge p\int_T F(t,u_n)\mathrm{d}t-\mu\int_T F(t,u_n)\mathrm{d}t-\int_T h(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为 $0<\mu<p$，则对所有 $n\in N$，a.e. $t\in I$ 和某个常数 $c_2>0$，有

$$\int_T F(t,u_n)\mathrm{d}t \le c_2 \tag{8}$$

由(3)和(8)可得

$$c_1 \ge J(u_n) \ge \frac{1}{q}\int_T \left(|u_n'|^p + a(t)|u_n'|^q\right)\mathrm{d}t - c_2 \tag{9}$$

通过命题 2 可知，若 $\|u_n\| \to +\infty$，则

$$\int_T |u_n'|^p + a(t)|u_n'|^q \,\mathrm{d}t \to +\infty$$

与式子(9)矛盾。因此，$\|u_n\|$ 有界。取其一个子列，仍定义为 $\{u_n\}_{n\ge 1}$，并且假设

$$u_n \rightharpoonup u \in W_T^{1,\mathcal{H}}(I),\ u_n \to u \in C^1(I).$$

由(3)得，对所有 $v \in W_T^{1,\mathcal{H}}(I)$，$\xi_n \to 0^+$，我们有

$$\left|\int_T |u_n'|^{p-2} u_n'v' + a(t)|u_n'|^{q-2} u_n'v'\mathrm{d}t - \int_T f(t,u_n)v\mathrm{d}t\right| \le \frac{\xi_n\|v\|}{1+\|u_n\|}$$

令 $v = u_n - u$，则

$$\lim_{n\to\infty}\langle L(u_n), u_n - u\rangle = 0$$

通过命题 3，可知 $u_n \to u \in W_T^{1,\mathcal{H}}(I)$。因此，$J(u)$ 满足 C-条件。

由以上引理，下面我们用山路定理证明定理 1。

定理 1 若条件(f)、(g)成立，且 $2 < p < q < r$，则问题(2)存在至少一个非平凡周期解。

证明 由假设(f) (iii)可知，存在 $\varepsilon > 0$，和 $0 < \delta_\varepsilon < 1$，使得对所有 $|x| \le \delta_\varepsilon$，a.e. $t \in I$ 有

$$F(t,x) \le \frac{1}{r}(\theta(t)+\varepsilon)|x|^r.$$

让 $u \in W_T^{1,\mathcal{H}}(I)$，且 $\|u\|_T \le \delta_\varepsilon$，由文献[7]的引理 2.5 可得：

$$\begin{aligned} J(u) &\ge \frac{1}{r}\|u'\|^q - \int_T F(t,u)\mathrm{d}t \\ &\ge \frac{1}{r}\|u'\|^q - \frac{1}{r}\int_T \theta(t)|u|^r\,\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{r}\|u\|^r \\ &\ge \frac{\xi_0 - \varepsilon}{r}\|u\|^q \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \in (0,\xi_0)$，$\rho > 0$ 足够小，则我们有

$$\beta = \frac{\xi_0 - \varepsilon}{r}\rho^q > 0.$$

因此，$J(u)|_{\partial B_\rho} \ge \beta$，其中 B_ρ 是一个以原点为中心，ρ 为半径的圆形区域。

接下来，我们要找到一个 $u_1 \in W_T^{1,\mathcal{H}}(T)\setminus\{0\}$，使得 $J(u_1) \le 0$。令 φ_1 是方程(1)的第一特征值 λ_1 所对应的特征泛函，可知 $\varphi_1 > 0$。为方便计算，令 $\|\varphi_1\| = 1$。因此，对任意的 $m > 0$，我们考虑以下泛函

$$J(m\varphi_1) = \int_T \left(\frac{m^p}{p}|\varphi_1'|^p + \frac{m^q a(t)}{q}|\varphi_1'|^q - F(t,m\varphi_1)\right)\mathrm{d}t$$

通过假设(f) (ii)，当 $m \to +\infty$，我们有

$$J\left(m\varphi_1\right) \le \frac{m^q}{p}\left\|\varphi_1'\right\|^q - \int_T F\left(t, m\varphi_1\right)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{J\left(m\varphi_1\right)}{m^q} \le \frac{1}{p} - \frac{\int_T F\left(t, m\varphi_1\right)\mathrm{d}t}{m^q} \to -\infty .$$

即存在 $M > 1$，当 $m > M$ 时，有 $J\left(m\varphi_1\right) < 0$，令 $u_1 = m\varphi_1 \in W_T^{1,\mathcal{H}}\left(I\right)\left(m > M\right)$，则 $J\left(u_1\right) < 0$。并且，我们容易知道 $J\left(0\right) = 0$，由引理 3 的证明和山路引理(引理 2)可以得到，问题(2)至少存在一个非平凡周期解，证毕。

致谢

感谢各位审稿专家的指导！

参考文献

[1] Zhikov, V.V.E. (1987) Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **29**, 33-66.

[2] Bahrouni. A., Rădulescu, V.D. and Repovš, D.D. (2019) Double Phase Transonic Flow Problems with Variable Growth: Nonlinear Patterns and Stationary Waves. *Nonlinearity*, **32**, 2481-2495. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab0b03

[3] Benci, V., D'Avenia, P., Fortunato, D. and Pisani, L. (2000) Solitons in Several Space Dimensions: Derrick's Problem and Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **154**, 297-324. https://doi.org/10.1007/s002050000101

[4] Cherfils, L. and Il'yasov, Y. (2005) On the Stationary Solutions of Generalized Reaction Diffusion Equations with p&q-Laplacian. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **4**, 9-22. https://doi.org/10.3934/cpaa.2005.4.9

[5] Liu, W., Dai, G., Papageorgiou, N.S. and Winkert, P. sss(2022) Existence of Solutions for Singular Double Phase Problems via the Nehari Manifold Method. *Analysis and Mathematical Physics*, **12**, Article No. 75. https://doi.org/10.1007/s13324-022-00686-6

[6] Liu, W. and Dai, G. (2020) Multiplicity Results for Double Phase Problems in RN. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 091508. https://doi.org/10.1063/5.0020702

[7] Liu, W. and Dai, G. (2018) Existence and Multiplicity Results for Double Phase Problem. *Journal of Differential Equations*, **265**, 4311-4334. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.006

[8] Gasiński, L. and Winkert, P. (2021) Sign Changing Solution for a Double Phase Problem with Nonlinear Boundary Condition via the Nehari Manifold. *Journal of Differential Equations*, **274**, 1037-1066. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.11.014

[9] Zeng, S., Rădulescu, V.D. and Winkert, P. (2022) Double Phase Implicit Obstacle Problems with Convection and Multivalued Mixed Boundary Value Conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **54**, 1898-1926. https://doi.org/10.1137/21M1441195

[10] Sciammetta, A., Tornatore, E. and Winkert, P. (2023) Bounded Weak Solutions to Superlinear Dirichlet Double Phase Problems. *Analysis and Mathematical Physics*, **13**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s13324-023-00783-0

[11] Papageorgiou, N.S., Rădulescu, V.D. and Zhang, Y. (2022) Resonant Double Phase Equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **64**, Article ID: 103454. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103454

[12] Wang, Y. (2020) Existence of Periodic Solutions for Ordinary Differential Systems in Musielak-Orlicz-Sobolev Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **488**, Article ID: 124070. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124070

[13] Crespo-Blanco, Á, Gasiński, L., Harjulehto, P. and Winkert, P. (2022) A New Class of Double Phase Variable Exponent Problems: Existence and Uniqueness. *Journal of Differential Equations*, **323**, 182-228. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.03.029

[14] Papageorgioui, E.H. and Papageorgiou, N.S. (2013) Existence and Multiplicity of Solutions for Nonlinear Periodic Problems with the Scalar *p*-Laplacian and Double Resonance. *Journal of Differential Equations*, **255**, 3678-3702. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.07.053

[15] Sun, J., Ke, Y., Jin, C. and Yin, J. (2007) Existence of Positive Periodic Solutions for the *p*-Laplacian System. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 696-701. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.07.010