Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1281-1288
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135131

函数项级数一致收敛性的判别与应用

郭智蕊

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年4月12日；录用日期：2023年5月15日；发布日期：2023年5月22日

摘 要

函数项级数一致收敛性的判别问题是分析学的重难点之一。关于函数项级数一致收敛问题在不同题设下判别方法各异，因此函数项级数往往是学生学习数学分析的困难点。为了深入研究函数项级数的一致收敛性，本文对函数项级数一致收敛性的判别法进行全面归纳，并给出每类判别法相对应下的典型例题。通过对比分析，Weierstrass判别法与柯西收敛准则相较于其它方法应用更广泛，故在做题时可优先考虑。

关键词

函数项级数，判别法，一致收敛性

Discrimination and Application of Uniform Convergence of Series of Function Terms

Zhirui Guo

College of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 12th, 2023; accepted: May 15th, 2023; published: May 22nd, 2023

Abstract

The discrimination of uniform convergence of series of function terms is one of the most difficult problems in mathematical analysis. The discriminant methods of uniform convergence of function term series vary under difficult sets, so the function term series is often the important and difficult point for students to learn mathematical analysis. In order to further study the uniform convergence of function term series, this paper summarizes the discriminant method of uniform convergence of function term series, and gives the typical examples corresponding to each type of discriminant. Through comparative analysis, Weierstrass criterion and Cauchy convergence criterion are more widely used than other methods, so they can be given priority when doing problems.

文章引用: 郭智蕊. 函数项级数一致收敛性的判别与应用[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1281-1288.
DOI: 10.12677/pm.2023.135131

Keywords

Function Term Series, Discriminant Method, Uniform Convergence

1. 引言

函数项级数一致收敛性的判别和应用在数学分析中处于核心地位。其中，书中常用的判别法有 Weierstrass 判别法、柯西判别法、余项准则等，而值得补充的是：文献[1]以数项级数 Rabbe 判别法为基础，将其推广到正项函数项级数中，研究正项函数项级数的一致收敛性；文献[2]主要探讨了 Dini 定理在函数项级数中的应用，通过研读发现 Dini 定理的局限性较强，只适用于定义在有界闭区间的函数项级数；Bendixon 判别法利用导函数的性质对函数项级数一致收敛进行判定等。由于函数项级数一致收敛性的多种判别方法加大了做题时的难度，为了让学生能够深刻理解和领会相关内容，本文基于以上研究背景，主要对函数项级数一致收敛性的判别法进行归纳，同时对每类判别法的应用进行整理，进而达到对比分析的目的，为我国数学行业的发展打下一定的基础[3]。

2. 函数项级数的一致收敛的判别方法与应用

2.1. 定义法

定理 1 [4]：若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)(x\in \mathrm{D})$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$，其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，则我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$。

例 1：试证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[-r,r]$ $(0<r<1)$上一致收敛。

证：不妨令 $u_n(x)=x^n$，显然得

$$S(x)=\frac{x}{1-x},S_n(x)=\frac{x(1-x^n)}{1-x} \tag{1}$$

由于

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{|x|^{n+1}}{1-x}\le\frac{r^{n+1}}{1-r} \tag{2}$$

对于任意的正数 ε，

$$\frac{r^{n+1}}{1-r}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{\lg(1-r)\varepsilon}{\lg r} \tag{3}$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{\lg(1-r)\varepsilon}{\lg r}\right]$，$\forall n>N$ 有 $\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{|x|^{n+1}}{1-x}<\varepsilon$ 成立。

即函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛。

2.2. Cauchy 判别法

定理 2 [4]：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是：对任给的正数 ε，总存在某

正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对一切 $x\in \mathrm{D}$ 和一切正整数 p，都有 $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$ 。

例 2：证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

证：由于

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right| &\le \frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\ &<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\end{aligned} \tag{4}$$

故对任意的正数 ε，取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，对任意的正数 p，都有

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right|<\varepsilon \tag{5}$$

于是，由 Cauchy 收敛准则知，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

注：1) Cauchy 一致收敛准则是判断函数项级数收敛的充要条件，学生在使用时需要灵活变通。

2) 常利用 Cauchy 一致收敛准则的逆否命题来判定非一致收敛。

2.3. Weierstrass 判别法

定理 3 [4]：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 D 上满足：$\left|u_n(x)\right|\le a_n$，$x\in \mathrm{D}$；正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛。

例 3：证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}\ (\alpha>1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

证：不妨令

$$u_n(x)=x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx} \tag{6}$$

则

$$u_n'(x)=x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx}(\alpha-nx) \tag{7}$$

因此，由导函数的性质，$u_n(x)=x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $x=\frac{\alpha}{n}$ 处取得最大值 $\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}$，

故对任意的 x 有 $0\le u_n(x)\le\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}$

由于 $\alpha>1$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，根据 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

注：1) 该方法是函数项级数与正项级数间的桥梁，由于其将函数项级数问题转化为正项级数的收敛判别，因此具有广泛应用。

2) 虽然该判别法对绝对一致收敛的函数项级数起有效作用，但仍存在绝对一致收敛的函数项级数，使得 M-判别法对其失效。

2.4. 余项准则

定理 4 [5]：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\left|S_n(x)-S(x)\right|\right\}=0 \tag{8}$$

例 4 [3]：讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的一致收敛性。

证：利用上确界判别法，$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，即 $S(x)=0$，因此得 $\left|S_n(x)-S(x)\right|=\dfrac{|x|}{1+n^2x^2}$ 之后对 x 求导，并令导数等于 0，得

$$\frac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{n^2}\Rightarrow|x|=\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

$$\sup\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty) \tag{10}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

注：1) 若能得到部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 的表达式，就可将函数项级数一致收敛转化为部分和函数列一致收敛问题。

2) 具体问题中，常常利用求导的方式来求得 $\left|S_n(x)-S(x)\right|$ 在定义域上的上确界或最大值。

3) 因为优势判别法是函数项级数一致收敛的充要条件，往往利用该方法来解决不一致收敛的问题。

4) 该方法使用起来具有一定的局限性，多数情况下，很难将函数项级数的部分和具体表示出来。

5) 注意区分优势判别法与 Weierstrass 判别法的不同，两者并无一定的直接关系。

6) 余项准则也称优势判别法，或上确界判别法。

2.5. Abel 判别法

定理 5 [5]：设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)(x\in\mathrm{D})$，其中函数列 $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调一致有界：$\left|a_n(x)\right|\le M$，$x\in\mathrm{D}$，$n\in\mathrm{N}_+$，同时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 D 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

例 5：证明：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

证：显然 $\{x^n\}$ 关于 n 单调，且 $\left|x^n\right|\le 1$，$x\in[0,1]$，对一切 n 成立。$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数，且该级数收敛，由 Abel 判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

注：Abel 判别法是函数项级数收敛的充要条件，并且只对能拆成两项相乘的函数项级数有效。

2.6. Dirichlet 判别法

定理 6 [6]：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 D 上一致有界；且对于每一个 $x\in\mathrm{D}$，$\{v_n(x)\}$ 是单调的；在 D 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0(n\to\infty)$，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

例 6：设 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nx$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛。

证：由题中所给，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0，即关于 x 一致收敛于 0；对于任意 $0<\delta<\pi$，当 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\cos kx\right|=\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \tag{11}$$

由 Dirichlet 判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nx$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛。

注：当固定 x 时，n 是不断变动的。

以上归纳的方法较为常见，下面给出读者较为陌生的判别方法。

2.7. Dini 判别法

定理 7 [5]：若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项(或 n 充分大的项)为有界闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，又知级数的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，则级数在 $[a,b]$ 上一致收敛。

例 7：讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x^p\ (p>1)$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性。

证：记

$$u_n(x)=x^n(\ln x)^p \tag{12}$$

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k(\ln x)^p \tag{13}$$

根据题意可知，$\forall x\in[0,1]$，$\forall n\in\mathrm{N}$，有 $u_n(x)\ge 0$，补充定义

$$u_n(0)=\lim_{x\to 0}x^n(\ln x)^p=0 \tag{14}$$

于是 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有 $S(0)=S(1)=0$

当 $x\in(0,1)$ 时，有 $S(x)=(\ln x)^p\sum_{n=1}^{\infty}x^n=(\ln x)^p\dfrac{x}{1-x}$，于是可得

$$S(x)=\begin{cases}0 & x=0,1\\ \ln x^p\dfrac{x}{1-x} & x\in(0,1)\end{cases} \tag{15}$$

由于 $p>1$，因此由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0^+}S(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^p\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\ln x)^p}{1-x}=\lim_{x\to 0^+}\left(-xp(\ln x)^{p-1}\right)=0 \tag{16}$$

同理，

$$\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(\ln x)^p}{1-x}=0 \tag{17}$$

所以 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由 Dini 定理可得 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x^p$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

注：Dini 定理对题中条件要求较高，其中若定义域不是有界闭区间，则结论不成立。例如：定义在 $(0,1]$ 上的函数列 $\{x^n\}$ 处处单调收敛于 0，但非一致收敛。因此，在使用 Dini 定理时，具有一定的局限性。

2.8. Bendixon (本迪克松)判别法

定理 8 [5]：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数项级数，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 的部分和函数列在 $[a,b]$ 上一致有界，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则必在 $[a,b]$ 上一致收敛。

注：1) 该判别法虽然对于学生来说较陌生，但在判别某些级数一致收敛时起到关键性作用。

2) 该判别法是利用导函数的性质来对函数项级数的一致收敛性进行判断。

2.9. Rabbe(拉贝)判别法

定理 9 [6]：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是区间 D 上的正项函数项级数且满足：

$\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=1-\dfrac{\alpha(x)}{n}+g(x)\cdot o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$g(x)$ 在 D 上有界，则有

若 $\inf \alpha(x)>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛

若 $\sup \alpha(x)<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上发散(不一致收敛)

定理 10 [6]：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是区间 D 上的正项函数项级数且满足：

$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=1-\frac{1}{n}-\frac{\lambda(x)}{n\ln n}+g(x)\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)$，$g(x)$ 在 D 上有界，则有

若 $\inf \lambda(x)>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上一致收敛

若 $\sup \lambda(x)<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 D 上发散(不一致收敛)

注：1) 拉贝判别法是用来判别正项函数项级数一致收敛的工具，与比值判别法，根式判别法相比，其应用范围更广。

2) 正项函数项级数中，以比式判别法为基础，以收敛速度更慢的级数作为比较标准，建立起拉贝判别法等一系列的判别法[1]。

3. 函数项级数非一致收敛的判别方法与应用

3.1. 定义法

定理 10 [7]：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 非一致收敛于 $S(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists n>N$，$\exists x_0 \in D$，有 $\left|S_n(x)-S(x)\right| \ge \varepsilon_0$ 成立，其中 $S_n(x)$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项和。

例 8 [8]：试证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上非一致收敛。

证：不妨令 $u_n(x)=x^n$，显然得

$$S(x)=\frac{x}{1-x}, S_n(x)=\frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} \tag{18}$$

$$\exists \varepsilon_0=\frac{1}{2\mathrm{e}}, \forall N, \exists n_0=2N, \exists x_0=\frac{2N-1}{2N} \in(-1,1) \tag{19}$$

故

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|\left(1-\frac{1}{2N}\right)^{2N}(2N-1)\right| \ge \frac{1}{2\mathrm{e}} \tag{20}$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上是非一致收敛的。

注：若通过题中所给条件无法得出和函数的形式，基本定义往往不作优先考虑。

3.2. Cauchy 收敛准则

定理 11 [9]：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上非一致收敛 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$，$\forall N \in \mathrm{N}^+$，$\exists m>n>N$，$\exists x_0 \in D$，有 $\left|u_{n+1}(x)+\cdots+u_m(x)\right| \ge \varepsilon_0$

例 9：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-nx}$ $(0<\alpha<1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致收敛。

证：由于

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)=x^\alpha \mathrm{e}^{-(n+1)x}+\cdots+x^\alpha \mathrm{e}^{-2nx} \ge n x^\alpha \mathrm{e}^{-2nx} \tag{21}$$

令 $0<\varepsilon_0<\mathrm{e}^{-2}$，取 $m=2n(n>N)$ 与 $x_n=\frac{1}{n} \in[0,+\infty)$，由于 $\alpha<1$，于是有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)=x^\alpha \mathrm{e}^{-(n+1)x}+\cdots+x^\alpha \mathrm{e}^{-2nx} \ge n x^\alpha \mathrm{e}^{-2nx} \ge \mathrm{e}^{-2}>\varepsilon_0 \tag{22}$$

由 Cauchy 收敛准则，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-nx}$ 在定义域上非一致收敛。

注：学生在解题时，若不能将问题归结为函数列研究，且有关函数项级数的和函数性质未知时，则利用柯西收敛准则是一个比较可行的方法。

3.3. 函数项级数非一致收敛的充分条件

定理 12 [9]：若函数列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 D 上非一致收敛于零，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上非一致收敛。

例 10：证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上非一致收敛。

证：利用函数项一致收敛必要条件的逆否命题，要证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛，则证 $u_n(x)$ 非一致收敛于 0。

取 $x_n=1-\frac{1}{n}$，其中 $x_n\in(-1,1)$，$u_n(x_n)=n\to\infty(n\to\infty)$，因此 $u_n(x)$ 非一致收敛于 0，即 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上非一致收敛。

3.4. 余项准则

定理 13：若存在数列 $\{x_n\}\subset D$，使得 $\lim_{n\to\infty}\left|S_n(x_n)-S(x_n)\right|\neq 0$，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 D 上非一致收敛于 $S(x)$。

例 11：证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上是非一致收敛。

证：不妨令 $u_n(x)=x^n$，显然得

$$S(x)=\frac{x}{1-x},S_n(x)=\frac{x(1-x^n)}{1-x} \tag{23}$$

令 $x_n=\frac{n}{n+1}\in(-1,1)$，且 $\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{|x|^{n+1}}{1-x}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\infty\neq 0 \tag{24}$$

故根据余项准则，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上是非一致收敛的。

注：由于余项准则是判定函数项级数一致收敛的充要条件，故常常能解决非一致收敛的问题。

3.5. 函数项级数的连续性

定理 14 [9]：若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的各项在 D 上都连续，而其和函数 $S(x)$ 在 D 上不连续，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上非一致收敛。

例 12：证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛。

证：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ 的和函数为 $S(x)=x$，$x\in[0,1)$，而 $S(1)=0$，它在点 $x=1$ 的左侧不连续，而函数项级数的每一项均在定义域上连续，故根据连续性定理，该级数在 $[0,1]$ 上非一致收敛。

注：在利用连续性命题的逆否命题时，需要保证和函数或极限函数具有某种性质。

4. 结语

本文只归纳了函数项级数判别方法一致收敛的判别法中的一部分，其中，Weierstrass 判别法与柯西收敛准则相较于其它应用更广泛，一般我们优先考虑。在讨论函数项级数一致收敛性时，由于判别方法多种多样，学生需注意区分每种判别法的差异性，从而做到灵活掌握。最后，学生们只有理解好每种判别法的概念及性质，才能在做题时信手拈来。

参考文献

[1] 张亦霄, 田黄佳. 正项函数项级数一致收敛的 Raabe 型判别法的推广[J]. 大学数学, 2015, 31(6): 61-66.

[2] 黄石生. Dini 定理在级数判敛中的应用[J]. 高等数学研究, 2005(3): 29-30.

[3] 黄弋钊. 关于函数项级数的一致收敛性再探[J]. 数学学习与研究, 2016(15): 145.

[4] 华东师范大学数学系. 数学分析: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[5] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[6] 徐家斌. 正项函数级数一致收敛 Raabe 判别法的推广[J]. 内江师范学院学报, 2011, 26(4): 14-17.

[7] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 下册[M]. 第 3 版. 北京: 高等育出版社, 2019.

[8] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第 3 版. 北京: 高等育出版社, 2006.

[9] 石会萍. 函数项级数非一致收敛判别方法的归纳分析[J]. 沧州师范学院学报, 2012, 38(3): 23-25+31.