Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1689-1695
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136172

不含相邻三角形平面图的全群可选性

张 帆，刘静茹，常 建*
内蒙古师范大学，内蒙古自治区数学与应用数学中心，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2023年5月19日；录用日期：2023年6月20日；发布日期：2023年6月28日

摘 要

如果对于阶数至少为k的阿贝尔群A和任意k列表分配$L:V \to 2^A$，G都是(A,L)可染的，则称图G是k群可选的。G的群选择数是使得G是k群可选的数k的最小值。图G的全图$T(G)$的群选择数称为G的全群选择数。本文主要研究平面图的全群列表染色，利用结构分析法和Discharging方法，得到了两类不含相邻三角形的特殊平面图的全群选择数的上界。

关键词

平面图，圈，全群可选性，全群选择数

Total Group Choosability of Planar Graphs without Adjacent Triangles

Fan Zhang, Jingru Liu, Jian Chang*
Inner Mongolia Center for Mathematics and Applied Mathematics, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: May 19th, 2023; accepted: Jun. 20th, 2023; published: Jun. 28th, 2023

Abstract

If for any group A of order at least k and any k-list assignment $L:V \to 2^A$, G is (A,L)-colorable, then we say that G is k-group choosable. The group choice number of G is the smallest k such that G is k-group choosable. The group choice number of the total graph $T(G)$ of the graph G is called the total group choice number of G. In this paper, we mainly study the total group list coloring of planar graphs. By using the structural analysis and the Discharging method, we obtained upper bounds on the number of total group choices for two classes of special planar graphs without adjacent triangles.

*通讯作者。

文章引用: 张帆, 刘静茹, 常建. 不含相邻三角形平面图的全群可选性[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1689-1695.
DOI: 10.12677/pm.2023.136172

Keywords

Planar Graphs, Cycle, Total Group Choosability, Total Group Choice Number

1. 引言

本文所考虑的图均为有限简单图，未定义的术语和符号参见文献[1]。设 G 是一个图，分别用 $V(G)$、$E(G)$、$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ (或简单地用 V、E、Δ 和 δ)表示图 G 的顶点集、边集、最大度和最小度。有向图 G 的定向 D 是指赋予 G 的每条边一个方向。如果图 G 可以画在平面上，使它的边仅在端点处相交，则称 G 为平面图，且用 $F(G)$(或简单地用 F)表示 G 的面集。设 $v\in V(G)$，与 v 相关联的边的数目叫做 v 的度，记作 $d(v)$。设 $f\in F(G)$，与 f 相关联的边的数目(每条割边计算两次)叫做 f 的度，记作 $d(f)$。k^+-点，k-点，k^--点分别指度不小于 k，等于 k 和不大于 k 的顶点。可类似定义 k^+-面，k-面，k^--面。长度为 k 的圈称为 k 圈。如果两个圈至少有一条公共边，则称它们是相邻的。一般情况下，3 圈也被称为三角形。

图 G 的 k 点染色是从 $V(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ (颜色集)的一个映射，使得任意两个相邻顶点的颜色不同。如果图 G 有 k 点染色，则称 G 是 k 可染的。G 的色数 $\chi(G)$ 是使得 G 是 k 可染的数 k 的最小值。列表染色是由点染色发展而来，Erdös 等人于 1979 年在文献[2]中给出了列表染色的定义。如果映射 L 为图 G 的每个顶点 v 提供可能的颜色列表 $L(v)$，则映射 L 被称为 G 的列表分配。G 的 k 列表分配 L 是指对于 G 的每个顶点均有 $|L(v)|=k$ 的列表分配。设 L 是图 G 的一个列表分配，如果存在 G 的点染色 c，使得对于 G 的每一个顶点 v 都有 $c(v)\in L(v)$，那么称 G 是 L 可染的。如果对于图 G 的每一个 k 列表分配 L，G 都是 L 可染的，则称 G 是 k 可选的。图 G 的选择数(或称列表色数) $\chi_l(G)$ 是使得 G 是 k 可选的数 k 的最小值。学者们对图的列表染色进行了广泛的研究，并取得了一系列的成果，可参见文献[3]-[8]。

图的群染色是由 Jaeger 等人于 1992 年在文献[9]中所提出的。设 G 是一个图，A 是一个阿贝尔群，记 $F(G,A)$ 为所有 E 到 A 的映射组成的集合，设 D 为 G 的一个定向，如果对于每一个 $f\in F(G,A)$，都存在顶点染色 $c:V\to A$，使得 $c(u)-c(v)\neq f(uv)$，其中边 uv 的方向是由 u 指向 v，则称图 G 是 A 可染的。设 A 是任意阶至少为 k 的阿贝尔群，使得 G 是 A 可染的数 k 的最小值称为 G 的群色数，记为 $\chi_g(G)$。

图的群列表染色是由列表染色和群染色进一步拓展而来。设 G 是一个图，A 是一个阶数至少为 k 的阿贝尔群，设 D 为 G 的一个定向，$L:V\to 2^A$ 为 G 的列表分配。对于 $f\in F(G,A)$，图 G 的 (A,L,f) 染色是指 G 的染色 $c:V\to A$ 满足对于 $\forall v\in V$ 有 $c(v)\in L(v)$ 且 $c(u)-c(v)\neq f(uv)$，其中边 uv 方向是由 u 指向 v。如果对于每个 $f\in F(G,A)$，都存在 G 的 (A,L,f) 染色，那么称 G 是 (A,L) 可染的。Král 等人在文献[10]中引入了群可选性的概念。如果对于阶数至少为 k 的阿贝尔群 A 和任意 k 列表分配 $L:V\to 2^A$，G 都是 (A,L) 可染的，则称图 G 是 k 群可选的。G 的群选择数是使得 G 是 k 群可选的数 k 的最小值，记为 $\chi_{gl}(G)$。群可选性受到学者们的广泛关注，并且已得到该领域的一些初步结果[11] [12] [13] [14] [15]。

图 G 的全图 $T(G)$ 是以 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 作为顶点集，即 $V(T(G))=V(G)\cup E(G)$。在 $T(G)$ 中顶点 u 和顶点 v 相邻当且仅当满足以下三种情形之一：

1) $u\in V(G)$，$v\in V(G)$，并且 $uv\in E(G)$，即在 G 中顶点 u 和顶点 v 相邻；

2) $u\in V(G)$，$v\in E(G)$，并且在 G 中边 v 关联顶点 u；

3) $u \in E(G)$，$v \in E(G)$，并且在 G 中边 u 和边 v 相邻。

图 G 的全色数 $\chi''(G)$ 是指全图 $T(G)$ 的色数，即 $\chi''(G) = \chi(T(G))$；图 G 的列表全色数 $\chi_l''(G)$ 是指全图 $T(G)$ 的列表色数，即 $\chi_l''(G) = \chi_l(T(G))$；图 G 的全图 $T(G)$ 的群色数称为 G 的全群色数，记为 $\chi_g''(G)$，即 $\chi_g''(G) = \chi_g(T(G))$。图 G 的全图 $T(G)$ 的群选择数是使得 $T(G)$ 是 k 群可选的数 k 的最小值，记为 $\chi_{gl}(T(G))$。图 G 的全图 $T(G)$ 的群列表色数称为 G 的全群列表色数，记为 $\chi_{gl}''(G)$，即有 $\chi_{gl}''(G) = \chi_{gl}(T(G))$。在文献[16]中，赖虹建等人将全染色和列表全染色的概念扩展到图的全群染色和列表全群染色，并研究了两种平面图的全群列表染色，证明了：设 G 是 $\Delta(G) \le k(k \ge 6)$ 的平面图，若 G 不包含 4 圈或 5 圈，则 $\chi_{gl}''(G) \le k+2$；设 G 是 $\Delta(G) \le k(k \ge 5)$ 的平面图，若 G 不包含 4 圈和 5 圈，则 $\chi_{gl}''(G) \le k+2$。

2. 主要结果及证明

在本文定理的证明中，我们采用反证法，通过构造极小反例，分析极小反例的结构性质，利用 Discharging 方法进行证明。首先对欧拉公式进行变形，得到顶点和面的初始权值 $ch(x)$ $(x \in V \cup F)$，且有 $\sum_{x \in V \cup F} ch(x) < 0$。其次构建权转移规则，对顶点和面的权值进行转移，使得顶点和面的新权值 $ch'(x)$ 均非负，即 $ch'(x) \ge 0$ $(x \in V \cup F)$，从而 $\sum_{x \in V \cup F} ch'(x) \ge 0$。这与权转移过程中权的总量保持不变相矛盾，说明极小反例不存在，从而完成证明。

如果面 f 的边界是一个圈，那么称 f 是简单面。我们用 $m_v(f)$ 表示面 f 按顺时针方向通过顶点 v 的次数。显然，如果顶点 v 不是割点，或者面 f 是一个简单面，那么 $m_v(f)=1$。若顶点 v 是一个与非简单面 f 相关联的割点，则 v 的权转移过程等价于 v 与 $m_v(f)$ 个 $d(f)$ 面相关联的情形；类似地，若面 f 是与割点 v 相关联的非简单面，则 f 的权转移过程等价于 f 与 $m_v(f)$ 个 $d(v)$ 点关联的情形。因此，在下文计算新权的过程中，我们总假定 v 不是割点，并且面 f 是简单面。

定理 2.1 设 G 是 $\Delta \le k$ ($k \ge 8$)且不含相邻三角形的平面图，则 $\chi_{gl}''(G) \le k+2$。

证明反证法。设 G 是满足定理 2.1 条件的 $|V|+|E|$ 最小的反例，则存在阿贝尔群 $A(|A| \ge k+2)$，$(k+2)$ 列表分配 $L: V(T(G)) \to 2^A$ 和 $f \in F(T(G), A)$，使得 $T(G)$ 不是 (A, L, f) 可染的。容易得到 G 具有以下性质：

1) G 的每一个顶点 v 至多与 $\left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$ 个三角形相关联；

2) $\delta \ge 3$；

3) 若边 $uv \in E$ 且 $\min\{d(u), d(v)\} \le \frac{k}{2}$，则 $d(u)+d(v) \ge k+3$。

由于 G 不含相邻三角形，所以性质(1)显然成立。下面证明性质(2)和(3)。首先证明(2)，用反证法。假设 v 是 G 的一个 2^--点且 e 是关联点 v 的一条边。令 $G' = G - e$。根据 G 的极小性，得 $T(G')$ 有一个 (A, L', f') 染色 c(其中 L' 为 L 在 $T(G')$ 上的限制，f' 为 f 在 $T(G')$ 上的限制)。c 可看作是 $T(G)$ 的一个部分 (A, L, f) 染色，欲将 c 拓展为 $T(G)$ 的 (A, L, f) 染色。现擦除这个染色中点 v 的颜色，因而在 $T(G)$ 中只有顶点 v 和点 e 未染色。先对点 e 进行染色，设 $e_1, e_2, \cdots, e_n, v$ 是 e 在 $T(G)$ 中的所有邻点。根据全图的定义和 $d(u)+d(v) \le k+2$ 有 $n = d_G(u)+d_G(v)-1 \le k+1$。不失一般性，假设 ee_i 的方向为由 e 指向 e_i $(1 \le i \le n)$，易得到 $\left| L(e) - \bigcup_{i=1}^{n} \{c(e_i) + f(ee_i)\} \right| \ge (k+2)-(k+1) = 1$，因而至少有一种颜色可以对 e 进行染色。再对点 v 进行染色，设 $e, v_2, v_3, \cdots, v_m$ 是 v 在 $T(G)$ 中的所有邻点。根据全图的定义和 $d(v) \le 2$ 有 $m = 2d_G(v) \le 4$，则

$\left|L(v)-\{c(e)+f(ve)\}-\bigcup_{i=2}^{m}\{c(v_i)+f(vv_i)\}\right|\ge(k+2)-4>1$，所以至少有一种颜色可以对 v 进行染色。因此，$T(G')$ 的 (A,L',f') 染色可拓展到 $T(G)$ 的 (A,L,f) 染色。这与 $T(G)$ 不是 (A,L,f) 可染的矛盾，从而(2)成立。

其次证明性质(3)。用反证法。假设 G 中存在边 $e=uv$ 且 $\min\{d(u),d(v)\}\le\frac{k}{2}$，使得 $d(u)+d(v)\le k+2$。不妨设 $d(u)\le\frac{k}{2}$。令 $G'=G-e$。根据 G 的极小性，得 $T(G')$ 有一个 (A,L',f') 染色 c (其中 L' 为 L 在 $T(G')$ 上的限制，f' 为 f 在 $T(G')$ 上的限制)。c 可看作是 $T(G)$ 的一个部分 (A,L,f) 染色，欲将 c 拓展为 $T(G)$ 的 (A,L,f) 染色。现擦除这个染色中点 u 的颜色，因而在 $T(G)$ 中只有顶点 u 和点 e 未染色。先对点 e 进行染色，假设 $e_1,e_2,\cdots,e_n,u$ 是 e 在 $T(G)$ 中的所有邻点。那么根据全图的定义和 $d(u)+d(v)\le k+2$，有 $n=d_G(u)+d_G(v)-1\le k+1$。不失一般性，假设 ee_i 的方向为由 e 指向 e_i $(1\le i\le n)$，易得到 $\left|L(e)-\bigcup_{i=1}^{n}\{c(e_i)+f(ee_i)\}\right|\ge(k+2)-(k+1)=1$，因而至少有一种颜色可以对 e 进行染色。再对点 u 进行染色，设 $e,u_2,u_3,\cdots,u_m$ 是 u 在 $T(G)$ 中的所有邻点。根据全图的定义和 $d(u)\le\frac{k}{2}$ 有 $m=2d_G(u)\le k$，则 $\left|L(u)-\{c(e)+f(ue)\}-\bigcup_{i=2}^{m}\{c(u_i)+f(uu_i)\}\right|\ge(k+2)-k>1$，所以至少有一种颜色可以对 u 进行染色。因此，$T(G')$ 的 (A,L',f') 染色可拓展到 $T(G)$ 的 (A,L,f) 染色。这与 $T(G)$ 不是 (A,L,f) 可染的矛盾，从而(3)成立。

由 G 是平面图可知欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 成立。等式 $|V|-|E|+|F|=2$ 两端同时乘 -6，得 $-6|V|+6|E|-6|F|=-12$，变形为：

$$\sum_{v\in V}(d(v)-6)+\sum_{f\in F}(2d(f)-6)=-12.$$

对于任意 $x\in V\cup F$，定义 x 的初始权值：如果 $x\in V$，则 $ch(x)=d(x)-6$；如果 $x\in F$，则 $ch(x)=2d(x)-6$。那么有

$$\sum_{x\in V\cup F}ch(x)=-12<0.$$

我们将利用权转移规则重新分配顶点和面的权值，用 $ch'(x)$ 表示 x 的新的权值 $(x\in V\cup F)$，权转移规则如下：

R1 每个 4^+-面 f 向其关联的 4^--点 v 转移 $m_v(f)$，向其关联的 5-点 v 转移 $\frac{1}{3}m_v(f)$。

R2 若 3-面 f 与 3-点 v 关联，则 f 关联的另外两个点分别向 v 都转移 $\frac{1}{2}$。

下面计算点和面的新权值。首先考虑点的新权值。设 $d(v)=3$，根据性质(1)，v 至多与 1 个 3-面关联。若 v 只与 1 个 3-面 f 关联，由权转移规则 R2 知，f 所关联的另外两个点分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$；由权转移规则 R1 知，v 关联的两个 4^+-面分别向 v 转移 1，故有 $ch'(v)=ch(v)+2\times1+2\times\frac{1}{2}=0$；若 v 不与 3-面关联，由权转移规则 R1 知，v 关联的每个面分别向 v 转移 1，故 $ch'(v)=ch(v)+3\times1=0$。设 $d(v)=4$，根据性质(1)，v 至多与 2 个 3-面关联。由权转移规则 R1 得，$ch'(v)\ge ch(v)+2\times1=0$。设 $d(v)=5$，则 v 至多与 2 个 3-面关联，由 R1 得 $ch'(v)\ge ch(v)+3\times\frac{1}{3}=0$。设 $6\le d(v)\le7$，由 R1 和 R2 知 v 既不转出权值，也不转入权值，故 $ch'(v)=ch(v)\ge0$。设 $d(v)\ge8$，由 v 至多与 $\left\lfloor\frac{d(v)}{2}\right\rfloor$ 个 3-面关联及 R2 得

$$ch'(v)\ge ch(v)-\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{d(v)}{2}\right\rfloor\ge ch(v)-\frac{1}{2}\times\frac{d(v)}{2}=\frac{3}{4}d(v)-6\ge 0.$$

其次考虑面的新权值。设 $d(f)=3$，由权转移规则知 f 既不转出权值，也不转入权值，故 $ch'(f)=ch(f)=0$。设 $d(f)=4$，若 f 关联 4^--点，由性质(3)知 f 至多关联 2 个 4^--点，由 R1 得 $ch'(f)\ge ch(f)-\max\left\{2\times 1,1+\frac{1}{3}\right\}=2d(f)-8=0$；若 f 不关联 4^--点，由 R1 得 $ch'(f)\ge ch(f)-\frac{1}{3}\times 4>0$。设 $d(f)\ge 5$，用 n 表示 f 关联的 4^--点个数，由性质(3)知 $n\le\frac{d(f)}{2}$，根据权转移规则 R1 可得

$$ch'(f)\ge ch(f)-1\times n-\frac{1}{3}(d(f)-n)=\frac{5}{3}d(f)-\frac{2}{3}n-6\ge\frac{4}{3}d(f)-6>0.$$

综上所述，对于 $\forall x\in V\cup F$，都有 $ch'(x)\ge 0$，得到矛盾，从而完成了定理 2.1 的证明。

定理 2.2 设 G 是 $\Delta\le k\ \ (k\ge 6)$ 的平面图，如果 G 中的 3 圈与 3 圈、4 圈、5 圈均不相邻，则 $\chi''_{gl}(G)\le k+2$。

证明 反证法。设 G 是满足定理 2.2 条件的 $|V|+|E|$ 最小的反例，则存在阿贝尔群 $A(|A|\ge k+2)$，$(k+2)$ 列表分配 $L:V(T(G))\to 2^A$ 和 $f\in F(T(G),A)$，使得 $T(G)$ 不是 (A,L,f) 可染的。类似于定理 2.1 的证明我们可以证明 G 具有以下性质：

1) G 的每一个顶点 v 至多与 $\left\lfloor\frac{d(v)}{2}\right\rfloor$ 个三角形相关联；

2) $\delta\ge 3$；

3) 若边 $uv\in E$ 且 $\min\{d(u),d(v)\}\le\frac{k}{2}$，则 $d(u)+d(v)\ge k+3$。

由 G 是平面图可知欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 成立。类似定理 2.1 的证明，可在 $|V|-|E|+|F|=2$ 的两端同乘−10，并变形为：

$$\sum_{v\in V}(2d(v)-10)+\sum_{f\in F}(3d(f)-10)=-20.$$

对于任意 $x\in V\cup F$，定义 x 的初始权值：如果 $x\in V$，则 $ch(x)=2d(x)-10$；如果 $x\in F$，则 $ch(x)=3d(x)-10$。那么有

$$\sum_{x\in V\cup F}ch(x)=-20<0.$$

我们将利用权转移规则重新分配顶点和面的权值，用 $ch'(x)$ 表示 x 的新的权值 $(x\in V\cup F)$，权转移规则如下：

R1 每个 6^+-点向其相邻的 3-点转移 $\frac{1}{3}$。

R2 每个 4^+-面 f 向其关联的 3-点 v 转移 $m_v(f)$，向其关联的 4-点 v 转移 $\frac{1}{2}m_v(f)$。

R3 每个 6^+-面 f 向其关联的 3-点 v 转移 $\frac{3}{2}m_v(f)$，向其关联的 4-点 v 转移 $m_v(f)$。

R4 每个 6^+-面 f 向其相邻的 3-面转移 $\frac{1}{3}$。

下面计算点和面的新权值。首先考虑点的新权值。设 $d(v)=3$，根据性质(1)，v 至多与 1 个 3-面相关联。若 v 只与 1 个 3-面 f 关联，由权转移规则 R1 知，每个 6^+-点向其相邻的 3-点转移 $\frac{1}{3}$；由权转移规则

R3 知，v 关联的两个 6^+-面分别向 v 转移 $\frac{3}{2}$，故有 $ch'(v)=ch(v)+3\times\frac{1}{3}+2\times\frac{3}{2}=0$；若 v 不与 3-面关联，由权转移规则 R1 知，每个 6^+-点向其相邻的 3-点转移 $\frac{1}{3}$；由权转移规则 R2 知，v 关联的每个面分别向 v 转移 1，故有 $ch'(v)=ch(v)+3\times\frac{1}{3}+3\times1=0$。设 $d(v)=4$，根据性质(1)，点 v 至多与 2 个 3-面相关联。若 v 与 3-面 f 关联，由权转移规则 R3 知，v 关联的两个 6^+-面分别向 v 转移 1，故有 $ch'(v)\ge ch(v)+2\times1=0$；若 v 不与 3-面关联，由权转移规则 R2 知，v 关联的每个面分别向 v 转移 $\frac{1}{2}$，故 $ch'(v)\ge ch(v)+4\times\frac{1}{2}=0$。设 $d(v)=5$，由权转移规则知 v 既不转出权值，也不转入权值，故 $ch'(v)=ch(v)=0$。设 $d(v)\ge6$，根据权转移规则 R1 知，每个 6^+-点向其相邻的 3-点转移 $\frac{1}{3}$，可得

$$ch'(v)\ge ch(v)-\frac{1}{3}d(v)=\frac{5}{3}d(v)-10\ge0.$$

其次考虑面的新权值。设 $d(f)=3$，由条件可知面 f 与 3 个 6^+-面相邻，根据权转移规则 R4 知，每个 6^+-面 f 向其相邻的 3-面转移 $\frac{1}{3}$，故 $ch'(f)\ge ch(f)+3\times\frac{1}{3}=0$。设 $4\le d(f)\le5$，若 f 关联 3-点，根据权转移规则 R2 得 $ch'(f)\ge ch(f)-2\times1=3d(f)-10-2\ge0$；若 f 不关联 3-点，即面 f 关联的点均为 4^+-点，由 R2 得 $ch'(f)\ge ch(f)-\frac{1}{2}\times d(f)=3d(f)-10-\frac{1}{2}d(f)=\frac{5}{2}d(f)-10\ge0$。设 $d(f)\ge6$，用 n 表示 f 关联的 3-点的个数，由性质(3)知 $n\le\frac{d(f)}{2}$，根据权转移规则可得

$$ch'(f)\ge ch(f)-\frac{1}{3}d(f)-\frac{3}{2}n-\big(d(f)-2n\big)\ge\frac{5}{3}d(f)-10\ge0.$$

综上所述，对于 $\forall x\in V\cup F$，都有 $ch'(x)\ge0$，得到矛盾，从而完成定理 2.2 的证明。

3. 总结

本文给出了全群列表染色的结构性质，进一步揭示了全群列表染色可约构型的特点。利用结构性质，借助 Discharging 方法得到了两类不含相邻三角形的特殊平面图的全群选择数的上界，从而推进了平面图全群列表染色的研究。

基金项目

内蒙古自然科学基金项目(2022MS01007)；内蒙古自治区高等学校科学研究项目(NJZY22599, NJZY22600)；内蒙古师范大学基本科研业务费专项资金项目(2022JBTD007)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. MacMillan, London.

[2] Erdös, P., Rubin, A.L. and Taylor, H. (1979) Choosability in Graphs. *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Arcata, 5-7 September 1979, 125-157.

[3] Hou, J., Liu, G. and Cai, J. (2006) List Edge and List Total Colorings of Planar Graphs without 4-Cycles. *Theoretical Computer Science*, **369**, 250-255. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2006.08.043

[4] 许洋, 朱晓颖, 陈藏. 关于 Reed 列表染色猜想的一些结果[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(4): 556-559+564.

[5] 董爱君，李国君，邹青松. 含相邻三角形的平面图的列表边和列表全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2009, 44(10): 17-20.

[6] Li, R. and Xu, B. (2011) Edge Choosability and Total Choosability of Planar Graphs with No 3-Cycles Adjacent

4-Cycles. *Discrete Mathematics*, **311**, 2158-2163. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.031

[7] Wang, H., Liu, B., Zhang, X., *et al*. (2016) List Edge and List Total Coloring of Planar Graphs with Maximum Degree 8. *Journal of Combinatorial Optimization*, **32**, 188-197. https://doi.org/10.1007/s10878-015-9870-1

[8] Wang, Y. and Wang, W. (2022) List-Edge and List-Total Colorings of Graphs Embedded on Surfaces of Negative Euler Characteristic. In: Srivastava, H.M. and Chen, C.-H., Eds., 2*nd International Conference on Applied Mathematics*, *Modelling*, *and Intelligent Computing* (*CAMMIC* 2022), Vol. 12259, SPIE, Bellingham, 148-153. https://doi.org/10.1117/12.2639672

[9] Jaeger, F., Linial, N., Payan, C. and Tarsi, M. (1992) Group Connectivity of Graphs—A Nonhomogeneous Analogue of Nowhere-Zero Flow Properties. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **56**, 165-182. https://doi.org/10.1016/0095-8956(92)90016-Q

[10] Král', D. and Nejedlý, P. (2004) Group Coloring and List Group Coloring Are Π_2^P-Complete. In: Fiala, J., Koubek, V. and Kratochvíl, J., Eds., *Mathematical Foundations of Computer Science* 2004. *MFCS* 2004. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3153, Springer, Berlin, 274-286. https://doi.org/10.1007/978-3-540-28629-5_19

[11] Omidi, G.R. (2011) A Note on Group Choosability of Graphs with Girth at Least 4. *Graphs and Combinatorics*, **27**, 269-273. https://doi.org/10.1007/s00373-010-0971-4

[12] Chuang, H., Lai, H.-J., Omidi, G.R., Wang, K. and Zakeri, N. (2014) On Group Choosability of Graphs, II. *Graphs and Combinatorics*, **30**, 549-563. https://doi.org/10.1007/s00373-013-1297-9

[13] Zhang, X. and Liu, G.Z. (2013) Group Edge Choosability of Planar Graphs without Adjacent Short Cycles. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **29**, 2079-2086. https://doi.org/10.1007/s10114-013-2531-3

[14] Khamseh, A. (2015) Edge Group Choosability of Planar Graphs with Maximum Degree at Least 11. *Proceedings of the* 46*th Annual Iranian Mathematical Conferences*, Yazd, 25-28 August 2015.

[15] Khamseh, A. (2020) A Note on Edge-Group Choosability of Planar Graphs without 5-Cycles. *Journal of Mathematics*, **2020**, Article ID: 4639260. https://doi.org/10.1155/2020/4639260

[16] Lai, H.J., Omidi, G.R. and Raeisi, G. (2013) On Group Choosability of Total Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **29**, 585-597. https://doi.org/10.1007/s00373-011-1114-2