

# 基于一类Bazykin型功能反应扩散捕食模型解的性质分析

韩炎哲, 孙福芹\*

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2023年5月9日; 录用日期: 2023年6月12日; 发布日期: 2023年6月20日

## 摘要

考虑了一维空间域中基于Bazykin型功能反应的自我记忆扩散当时间延迟  $\tau=0$  时候的捕食者反应扩散模型。研究该模型其经典局部解的存在性和  $L^1$  边界估计, 进一步讨论了整体经典解的存在性以及有界性。重点分析其解的  $L^\infty$  边界估计, 通过半群参数的方法证明了其解  $L^\infty$  边界有界。

## 关键词

自记忆扩散, Bazykin型功能反应, 反应扩散, 全局存在性, 有界性

# Property Analysis of Prey-Predator Model Based on Bazykin Functional Response Diffusion

Yanzhe Han, Fuqin Sun\*

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: May 9<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jun. 12<sup>th</sup>, 2023; published: Jun. 20<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This article considers a predator-prey response diffusion model based on Bazykin type functional response in a one-dimensional spatial domain for self memory diffusion with time delay  $\tau=0$ . The existence and  $L^1$  boundary estimation of the classical local solutions are studied, and the existence and boundedness of the global classical solutions are further discussed. The solution  $L^\infty$

\*通讯作者。

boundary estimation is analyzed and the solution  $L^\infty$  boundary is proved to be bounded by semigroup parameter method.

## Keywords

Self-Memory Diffusion, Bazykin Type Functional Response, Response Diffusion, Global Existence, Boundedness

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自然界中捕食者与被捕食者之间的相互作用是复杂生态系统丰富多样性的主要原因。最初, Lotka 和 Volterra 在 [1] 和 [2] 中提出了描述捕食者 - 食饵相互作用的相同模型, 它被命名为 Lotka Volterra 模型。之后, Holling [3] 提出了不同的功能反应函数, 对该模型进行了改进, 更加准确地描述了捕食者和被捕食者的动态行为。而 Bazykin 功能反应可以描述捕食者饱和的不稳定力量与猎物竞争的稳定力量, 对于它的研究更有实际意义。

除捕食在生态学中能产生影响外, 人们也考虑到扩散和趋化对其产生的影响。在空间捕食者 - 被捕食者相互作用中, 捕食者和被捕食者的运动一般为随机行走, 这由扩散方程表示。除了捕食者的随机扩散外, 捕食者和食饵之间的空间运动也可能具有定向性。生命系统在化学刺激下的定向运动称为趋化作用 [4], 此类系统已经被进行了很多研究。此外, 一些聪明的捕食者还会具有记忆效应和认知行为, 比如蓝鲸是靠记忆迁徙的。在文献 [5] 中, 提出了描述具有空间记忆的单个种群运动的模型, 研究结果表明基于记忆的扩散可能对种群的分布产生很大的影响。而后文献 [6] 将基于记忆的扩散纳入了经典的扩散模型来描述两个物种的相互作用。此时通常有两种类型的记忆和认知: 基于交叉记忆的扩散和自我记忆的扩散。文献 [7] 研究了基于交叉记忆的扩散的捕食模型, 目前对于自记忆扩散的捕食模型研究较少。从数学的角度看, 这类模型具有丰富的结构, 对于这类系统的研究具有现实的生物学意义。可能会对种群的分布产生很大的影响。因此本文在研究 Bazykin 功能反应扩散的基础上加入记忆扩散项来研究该系统解的相关性质。

## 2. 模型建立

本文针对一维空间域上  $\Omega = (0, l\pi)$ ,  $l \in R^+$  上的如下反应扩散捕食模型进行解的研究。

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{uv}{(1 + \alpha u)(1 + \beta v)}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ v_t = d_2 v_{xx} + d_3 (vv_x(x, t - \tau))_x - c \frac{v^2}{(1 + \alpha u)(1 + \beta v)} + \gamma v, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ u_x(x, t) = 0, v_x(x, t) = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x, t) = u_0(x) \geq 0, v(x, t) = v_0(x) \geq 0, & x \in [0, l\pi]. \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u = u(x, t)$  和  $v = v(x, t)$  分别表示食饵和捕食者在位置  $x$  和时间  $t$  时的群体密度。 $ru(1 - u/K)$  表示食饵的 logistic 增长, 其中  $r$  表示食饵的出生率;  $K$  表示环境承载率;  $c$  表示食饵到捕食者的转化率

( $0 < c < 1$ );  $d_1, d_2, d_3$  表示空间扩散项,  $d_3(vv_x(x, t))_x, d_3 > 0$  是捕食者的记忆扩散项, 表示捕食者离开其过去分布的较高密度位置转向低密度位置。

为了简化分析, 对系统(1)作尺度伸缩变换, 令:

$$\hat{u} = \frac{u}{K}, \hat{v} = \frac{1}{r}v, \hat{t} = rt.$$

设

$$\hat{d}_1 = \frac{d_1}{r}, \hat{d}_2 = \frac{d_2}{r}, \hat{d}_3 = d_3, \hat{\gamma} = \frac{1}{r}\gamma, \hat{\alpha} = K\alpha, \hat{\beta} = r\beta.$$

代入原系统, 可得到关于新的变量关系式。为简化系统, 可去掉^标志, 系统(1)可化为以下形式:

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + u(1-u) - \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ v_t = d_2 v_{xx} + d_3 (vv_x(x, t-\tau))_x - c \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} + \gamma v, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ u_x(x, t) = 0, v_x(x, t) = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x, t) = u_0(x) \geq 0, v(x, t) = v_0(x) \geq 0, & x \in [0, l\pi]. \end{cases} \quad (2)$$

式中所有参数均为负。

### 3. 问题(2)当 $\tau = 0$ 时的模型研究

**定义 1** 定义实值 Sobolev 空间

$$\chi = \left\{ (u, v) \in H^2(0, l\pi) \times H^2(0, l\pi) : (u_x, v_x)|_{x=0, l\pi} = 0 \right\}.$$

首先给出系统(2)在空间  $\chi$  的经典解的局部间存在性以及有界性结论。

#### 3.1. 系统(2)经典解的局部间存在性以及有界性

**命题 2.1** 已知系统(2)的初值函数  $(u_0(x), v_0(x)) \in \chi$ 。则存在一个最大存在时间  $T_{\max} > 0$ , 使得系统有一个非负的唯一经典解  $(u(x, t), v(x, t))$ , 满足

$$(u(x, t), v(x, t)) \in \left( C([0, T_{\max}); H^2(0, l\pi)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \right)^2.$$

且  $u(x, t), v(x, t)$  有界。其中

$$0 \leq u(x, t) \leq 1, v(x, t) \geq 0.$$

$x \in \bar{\Omega}, t \in (0, T_{\max})$ 。并且若  $(u, v)$  满足

$$\|u(t), v(t)\|_{L^\infty} \leq c(T), 0 \leq t \leq T < \infty, t < T_{\max},$$

则

$$T_{\max} = \infty.$$

证明: 令  $U = (v, u)$ , 则系统(2)可写为

$$\begin{cases} U_t = (A(U)U_x)_x + f(U), & x \in \Omega, t > 0, \\ U_x = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ U(\cdot, 0) = (u_0, v_0) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$A(U) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_2 & d_3 v \end{pmatrix}, f(U) = \begin{pmatrix} u(1-u) - \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \\ -c \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} + \gamma v \end{pmatrix}.$$

满足文献[8]中的第 17 页定理假设, 可知系统(2)存在一个局部的时间解

$$U(\cdot, U_0) \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, t^+(U_0))) \cap C([0, t^+(U_0)]; H^2(\Omega)).$$

其中  $0 < t^+(U_0) \leq \infty$ 。

令  $t^+(U_0) = T_{\max}$ , 则

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \cap C([0, T_{\max}]; H^2(\Omega)). \\ v(x, t) &\in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \cap C([0, T_{\max}]; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

对于系统(2)的食饵密度  $u$ , 其满足

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = u(1-u) - \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \leq u(1-u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u_x(x, t) = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

已知如下系统

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = u(1-u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u_x(x, t) = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

的解  $u^*(x, t)$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u^*(x, t) = 1.$$

由抛物型方程的比较原理, 可得系统(4)的解  $u(x, t)$  满足

$$u(x, t) \leq 1.$$

对于系统(2)的捕食者密度  $v$  所满足的系统, 由于  $v=0$  是它的一个下解, 由抛物型方程的极大值原理可得  $v(x, t) \geq 0$ 。同理可得  $u(x, t) \geq 0$ 。即

$$0 \leq u(x, t) \leq 1, v(x, t) \geq 0.$$

若  $(u, v)$  满足

$$\|u(t), v(t)\|_{L^\infty} \leq c(T), 0 \leq t \leq T < \infty, t < T_{\max},$$

由文献[9]的定理 15.5 可得

$$T_{\max} = \infty.$$

**引理 2.2** 如果满足  $\beta(1+\alpha) < c/\gamma$ , 系统(2)的解分量  $v(x, t)$  满足如下估计:

$$\|v(x, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{\gamma(1+\alpha)}{c - \beta\gamma(1+\alpha)}, \text{ 对于所有的 } t \in (0, T_{\max}).$$

证明: 由于

$$\gamma v - c \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \leq v \frac{\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon)) - [c - \beta\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon))]}{[1+\alpha(1+\varepsilon)](1+\beta v)},$$

设  $v^1(t)$  是以下系统的解

$$\begin{cases} v_t = d_2 v_{xx} + d_3 (v v_x)_x + v \frac{\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon)) - [c - \beta\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon))]}{[1+\alpha(1+\varepsilon)](1+\beta v)}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ v_x(x, t) = 0, & x = 0, l\pi, t > 0. \end{cases}$$

其中

$$0 < \varepsilon < \frac{c - \gamma\beta(1+\alpha)}{\gamma\alpha\beta},$$

当  $t \rightarrow +\infty$  时, 有

$$v^1(t) \rightarrow \frac{\gamma[1+\alpha(1+\varepsilon)]}{c - \beta\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon))}.$$

由抛物型方程的比较原理可得对于上述给定的  $\varepsilon$ , 当时间  $T \rightarrow T_{\max}$  时有

$$v(t) \leq \frac{\gamma[1+\alpha(1+\varepsilon)]}{c - \beta\gamma(1+\alpha(1+\varepsilon))} + \varepsilon,$$

由  $\varepsilon$  的任意性可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\Omega} v(x, t) \leq \frac{\gamma(1+\alpha)}{c - \beta\gamma(1+\alpha)}.$$

即可得

$$\|v(x, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{\gamma(1+\alpha)}{c - \beta\gamma(1+\alpha)},$$

对于所有的  $t \in (0, T_{\max})$ 。

注: 在  $\beta(1+\alpha) < c/\gamma$  条件的限制下, 才能得出捕食者  $v(x, t)$  的  $L^1$  边界估计。以下讨论都假设满足此条件。

### 3.2. 系统(2)的全局存在性以及有界性

首先推导一些先验估计。由文献[10]的 Lemma 3.1 可知, 对捕食者密度的  $L^\infty$  有界性估计, 只要证明它的  $L^p$  ( $p > n/2$ ,  $n$  为系统的维数) 的有界性估计即可。所以对于捕食者密度  $u(x, t)$ , 对其在空间  $L^{2n}(\Omega)$  建立一个一致界。其建立方法可以参考文献[11], 其主要思想是通过构造合适的有界权函数来实现。下面在进行有界性估计时使用与文献[12] [13]中类似的权重函数。这里, 需要两个重要的引理。

**引理 3.1 [14]** 假设  $y(t) \geq 0$  满足

$$\begin{cases} y'(t) \leq -a_1 y^b(t) + a_2 y(t) + a_3, & t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

其中  $a_1, a_2, a_3 > 0$ ,  $b > 1$ 。则存在常数  $b_1(y_0)$  和  $b_2(a_1, a_2, a_3, b)$  使得

$$y(t) \leq \max \{b_1(y_0), b_2(a_1, a_2, a_3, b)\}. \tag{5}$$

**引理 3.2 [15]** 假设  $m=0,1$ 。  $p \in [1, \infty]$ ,  $q \in (1, \infty)$ , 则存在常数  $D_1$ , 有

$$\|v\|_{m,p} \leq D_1 \|(-\Delta + 1)^\theta v\|_q, \tag{6}$$

对于任意  $v \in D((-\Delta + 1)^\theta)$ ,  $\theta \in (0,1)$  满足  $m - n/p < 2\theta - n/q$ 。

1) 若  $p \leq q$ , 则存在  $D_2 > 0$ ,  $\zeta > 0$ , 使得

$$\|(-\Delta + 1)^\theta e^{t(\Delta-1)} v\|_q \leq D_2 t^{-\theta-n/2(1/p-1/q)} e^{-\zeta t} \|v\|_p, \tag{7}$$

对于任意的  $v \in L^p(\Omega)$ 。

2) 对于任何  $p \in (1, \infty)$ ,  $\varepsilon > 0$ , 存在  $D_3 > 0$ ,  $\mu > 0$ , 使得

$$\|(-\Delta + 1)^\theta e^{t\Delta} \nabla v\|_p \leq D_3 t^{-\theta-1/2-\varepsilon} e^{-\mu t} \|v\|_p, \tag{8}$$

对于任意的  $v \in L^p(\Omega)$ 。

下面我们给出  $v(x,t)$  的  $L^{2n}$  估计。

**引理 3.3** 系统(2)的解分量  $v(x,t)$  满足

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^{2n}} \leq D. \tag{9}$$

对于  $t \in (0, T_{\max})$ 。

证明: 记  $k := 2n$ 。 定义权重函数  $\varphi(u)$ :

$$\varphi(u) := e^{(au)^2}, \tag{10}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{2d_1(k-1)}{k[4(d_1+d_2)^2-d_2]}}, 0 \leq u \leq 1.$$

则可得

$$1 \leq \varphi(u) \leq e^{a^2}, 0 \leq u \leq 1. \tag{11}$$

根据系统(2)计算可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx = \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} (v^k \varphi(u))_t dx = \int_0^{l\pi} v^{k-1} v_t \varphi(u) dx + \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_t dx \\ & = \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) \left[ d_2 v_{xx} + d_3 (v v_x)_x - c \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} + \gamma v \right] dx \\ & \quad + \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) \left[ d_1 u_{xx} + u(1-u) - \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} \right] dx \\ & = d_2 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) v_{xx} dx + d_3 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) (v v_x)_x dx - c \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx + \gamma \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) v dx \\ & \quad + \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_{xx} dx + \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u(1-u) dx - \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx. \end{aligned} \tag{12}$$

由于

$$d_2 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) v_{xx} dx = -d_2 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx - d_2 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi'(u) u_x v_x dx. \tag{13}$$

$$d_3 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) (v v_x)_x dx = -d_3 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) |v_x|^2 dx - d_3 \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_x v_x dx. \tag{14}$$

$$\frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_{xx} dx = -d_1 \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi'(u) u_x v_x dx - \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx. \tag{15}$$

把(13), (14), (15)代入(12)化简可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx &= -(d_2 + d_1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi'(u) u_x v_x dx - d_3 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) |v_x|^2 dx \\ &\quad - d_3 \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_x v_x dx - d_2 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx - \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx \\ &\quad - c \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx + \gamma \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) v dx \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u(1-u) dx - \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx. \end{aligned} \tag{16}$$

由于

$$\begin{aligned} c \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) \frac{v^2}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx &\geq 0, \\ \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u(1-u) dx &\leq \frac{2a^2}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx, \\ \frac{1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) \frac{uv}{(1+\alpha u)(1+\beta v)} dx &\geq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx &\leq -(d_2 + d_1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi'(u) u_x v_x dx - d_3 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) |v_x|^2 dx \\ &\quad - d_3 \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_x v_x dx - d_2 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx \\ &\quad - \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx + \left( \frac{2a^2}{k} + \gamma \right) \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx. \end{aligned} \tag{18}$$

通过使用杨氏不等式, 可得(18)式中的

$$-(d_2 + d_1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi'(u) u_x v_x dx \leq \frac{d_2 (k-1)}{4} \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx + \frac{(d_2 + d_1)^2}{k-1} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx. \tag{19}$$

$$-d_3 (k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-1} \varphi(u) |v_x|^2 dx \leq \frac{d_2 (k-1)}{4} \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx + \frac{d_3^2 (k-1)}{d_2} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) |v_x|^2 dx. \tag{20}$$

$$-d_3 \int_0^{l\pi} v^k \varphi'(u) u_x v_x dx \leq \frac{d_2}{4(k-1)} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx + \frac{d_3^2 (1-k)}{d_2} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) |v_x|^2 dx. \tag{21}$$

把(19), (20), (21)上述三个不等式代入(18)式可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx + d_2(k-1) \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx + \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx \\
& \leq \frac{d_2(k-1)}{2} \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx + \frac{(d_2+d_1)^2}{k-1} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx \\
& \quad + \frac{d_2}{4(k-1)} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx + \left( \frac{2a^2}{k} + \gamma \right) \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx.
\end{aligned} \tag{22}$$

化简(22)得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx + \frac{d_2(k-1)}{2} \int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx + \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx \\
& \leq \frac{4(d_2+d_1)^2 - d_2}{4(k-1)} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx + \left( \frac{2a^2}{k} + \gamma \right) \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx.
\end{aligned} \tag{23}$$

令

$$F_1(u) = \frac{4(d_2+d_1)^2 - d_2}{4(k-1)} \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)}, F_2(u) = \frac{d_1}{k} \varphi''(u). \tag{24}$$

已知

$$\varphi(u) = e^{(au)^2}, a = \sqrt{\frac{2d_1(k-1)}{k[4(d_1+d_2)^2 - d_2]}}, 0 \leq u \leq 1.$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} &= \frac{(2a^2 u e^{(au)^2})^2}{e^{(au)^2}} = 4a^4 u^2 e^{(au)^2}. \\
\varphi''(u) &= 2a^2 e^{(au)^2} + 4a^4 u^2 e^{(au)^2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

由(24)和(25)可得

$$\begin{aligned}
\frac{F_1(u)}{F_2(u)} &= \frac{\frac{4(d_2+d_1)^2 - d_2}{4(k-1)} \cdot 4a^4 u^2 e^{(au)^2}}{\frac{d_1}{k} [2a^2 e^{(au)^2} + 4a^4 u^2 e^{(au)^2}]} \leq \frac{\frac{4(d_2+d_1)^2 - d_2}{k-1} \cdot a^4 u^2 e^{(au)^2}}{\frac{2d_1}{k} a^2 e^{(au)^2}} \\
&= \frac{k[4(d_2+d_1)^2 - d_2]}{2d_1(k-1)} a^2 u^2 = u^2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{26}$$

即

$$F_1(u) \leq F_2(u).$$

上式两边同乘  $v^k |u_x|^2$  并在  $(0, l\pi)$  上积分可得

$$\frac{4(d_2+d_1)^2 - d_2}{4(k-1)} \int_0^{l\pi} v^k \frac{\varphi'^2(u)}{\varphi(u)} |u_x|^2 dx \leq \frac{d_1}{k} \int_0^{l\pi} v^k \varphi''(u) |u_x|^2 dx. \tag{27}$$



把(27)代入(23)得

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{t\pi} v^k \varphi(u) dx + \frac{d_2(k-1)}{2} \int_0^{t\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx \leq \left( \frac{2a^2}{k} + \gamma \right) \int_0^{t\pi} v^k \varphi(u) dx. \tag{28}$$

对于  $t \in (0, T_{\max})$ 。

由(11)可得

$$\int_0^{t\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx \geq \int_0^{t\pi} v^{k-2} |v_x|^2 dx = \frac{4}{k^2} \int_0^{t\pi} |v^{k/2}_x|^2 dx. \tag{29}$$

$$\int_0^{t\pi} v^k \varphi(u) dx \leq e^{a^2} \int_0^{t\pi} v^k dx = e^{a^2} \|v^{k/2}\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{30}$$

由[15] Gagliardo-Nirenberg 插值不等式

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \kappa \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}^b \|v\|_{L^r(\Omega)}^{1-b}, \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{31}$$

其中  $p, q \geq 1, p(n-q) < nq, r \in (0, p)$  且

$$b = \frac{n/r - n/p}{1 - n/q + n/r} \in (0, 1).$$

取  $v \in H^2(\Omega)$ , 则  $p=2$ , 令  $q=2$ , 取  $r=2/k \in (0, 2)$ , 则

$$b = \frac{k/2 - 1/2}{1 - 1/2 + k/2} \in (0, 1).$$

即

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \kappa \|v\|_{H^2(\Omega)}^b \|v\|_{L^{2/k}(\Omega)}^{1-b}. \tag{32}$$

两边平方得

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \kappa^2 \|v\|_{H^2(\Omega)}^{2b} \|v\|_{L^{2/k}(\Omega)}^{2(1-b)}.$$

由[15]庞加莱不等式的推导式

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \eta \left( \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)} \right), \forall v \in W^{1,p}(\Omega), \forall p > 1, q > 0. \tag{33}$$

可得

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \eta \left( \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{2/k}(\Omega)} \right).$$

即

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^{2b} \leq \eta^{2b} \left( \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{2/k}(\Omega)} \right)^{2b}. \tag{34}$$

则

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^{2b} \leq \eta^{2b} \left( \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^{2/k}(\Omega)} \right)^{2b}. \tag{35}$$

把(35)代入(30)可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx &\leq e^{a^2} \int_0^{l\pi} v^k dx = e^{a^2} \|v^{k/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq e^{a^2} c_1 \left( c_2 \left( \frac{k}{2} \right) \right)^{2b} \left( \|\nabla v^{k/2}\|_{L^2(\Omega)} + \|v^{k/2}\|_{L^{2k}(\Omega)} \right)^{2b} \cdot \|v^{k/2}\|_{L^{k/2}(\Omega)}^{2(1-b)} \\
 &= C_1 \left( \|\nabla v^{k/2}\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\Omega)}^{k/2} \right)^{2b} \|v\|_{L^1(\Omega)}^{k(1-b)} \\
 &\leq C_2 \left( \|\nabla v^{k/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right)^b.
 \end{aligned} \tag{36}$$

其中  $b = \frac{k/2 - 1/2}{1 - 1/2 + k/2} \in (0, 1)$ 。

把(36)代入(29)得

$$\int_0^{l\pi} v^{k-2} \varphi(u) |v_x|^2 dx \geq \int_0^{l\pi} v^{k-2} |v_x|^2 dx = C_3 \left( \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx \right)^{\frac{1}{b}} - \frac{4}{k^2}. \tag{37}$$

把(37)代入(28)得

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx \leq -\frac{d_2(k-1)}{2} \left( C_3 \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx \right)^{\frac{1}{b}} + \left( \frac{2a^2}{k} + \gamma \right) \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx + \frac{2d_2(k-1)}{k^2}. \tag{38}$$

由引理 3.1 可得存在一个常数  $D > 0$ , 使得

$$\int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx \leq D. \tag{39}$$

由(39)和(11)即可得结果

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^k} = \int_0^{l\pi} v^k dx \leq \int_0^{l\pi} v^k \varphi(u) dx \leq D.$$

下面证明系统存在全局解需要分别对食饵密度和捕食者密度进行  $L^\infty$  边界估计。对于食饵密度  $u(x, t)$  的  $L^\infty$  边界估计可以参考文献[10]的方法, 对于  $v(x, t)$  的估计要用到引理 3.3 的结果。

**定理 3.1** 假设系统(2)的参数都为正, 则任意给定的非负初值函数  $(u_0, v_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ , 其中  $u_0, v_0 \geq 0$  且不恒等于 0, 则系统(2)存在一个唯一的全局经典解:

$$(u(x, t), v(x, t)) \in \left( C([0, \infty); H^2(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)) \right)^2,$$

并且  $(u(x, t), v(x, t))$  在  $\Omega \times (0, \infty)$  是一致有界的, 即存在一个常数  $C > 0$ , 使得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \tag{40}$$

对于任意的  $t \in (0, +\infty)$ 。

证明: 由[10]可以得到  $u(x, t)$  的  $L^\infty$  边界估计如下:

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\tau), \tau \in (0, T_{\max}).$$

考虑  $v$  上的  $L^\infty$  边界估计, 利用[16]中半群参数方法来建立  $v$  上的  $L^\infty$  边界估计。

通过常数变易公式可得

$$\begin{aligned}
 v(\cdot, t) &= V_1(\cdot, t) + V_2(\cdot, t) + V_3(\cdot, t) \\
 &= e^{d_2 t(\Delta-1)} v_0 + d_3 \int_0^t e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} (v v_x)_x ds \\
 &\quad + \int_0^t e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} (d_2 v(x, t) - c v^2 / (1 + \alpha u)(1 + \beta v) + \gamma v) ds.
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(\cdot, t) &= e^{d_2 t(\Delta-1)} v_0, \\ V_2(\cdot, t) &= d_3 \int_0^t e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} (v v_x)_x \, ds, \\ V_3(\cdot, t) &= \int_0^t e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} \left( d_2 v(x, t) - cv^2 / (1 + \alpha u)(1 + \beta v) + \gamma v \right) ds. \end{aligned}$$

下面对  $V_1, V_2, V_3$  进行估计:

1)  $V_1$  的  $L^\infty$  边界估计如下:

由引理 3.2, 令  $m=0, p=\infty, g=2n, g \leq q, \omega=\theta+n/2(1/g-1/q)$ , 则存在常数  $D_1, D_2, E$  使得

$$\begin{aligned} \|V_1\|_{L^\infty} &\leq D_1 \|(\Delta-1)^\theta V_1\|_q \\ &\leq D_2 t^{-\theta-n/2(1/g-1/q)} e^{-\zeta t} \|v\|_g \\ &= D_2 t^{-\omega} e^{-\zeta t} \|v\|_g \\ &\leq E t^{-\omega}. \end{aligned} \tag{41}$$

对于所有的  $t \in (\tau, T_{\max})$ 。其中  $\zeta > 0, \theta \in (0, 1)$  且满足  $2\theta - n/q > 0$ 。即  $\omega \in (n/2g, 1)$ 。

2)  $V_2$  的  $L^\infty$  边界估计如下:

由引理 3.2, 令  $m=0, p=\infty, q=2n$ , 则存在常数  $D_1, D_4, D_5, D_6$  使得

$$\begin{aligned} \|V_2\|_{L^\infty} &\leq D_1 \|(\Delta-1)^\sigma V_2\|_q \leq d_3 D_1 \left\| \int_0^t (\Delta-1)^\sigma e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} (v v_x)_x \, ds \right\|_q \\ &\leq d_3 D_1 \int_0^t e^{d_2(t-s)} \|(\Delta-1)^\sigma e^{d_2(t-s)\Delta} (v v_x)_x\|_q \, ds \\ &\leq D_4 \int_0^t (t-s)^{-\sigma-1/2-\varepsilon} e^{(d_2-\mu)(t-s)} \|v v_x\|_q \, ds \\ &\leq D_5 \int_0^t (t-s)^{-\sigma-1/2-\varepsilon} e^{(d_2-\mu)(t-s)} \, ds \\ &\leq D_5 \int_0^\infty \gamma^{-\sigma-1/2-\varepsilon} e^{(d_2-\mu)\gamma} \, ds \\ &\leq D_6 \Gamma(1/2 - \varepsilon - \sigma). \end{aligned} \tag{42}$$

对于所有的  $t \in (\tau, T_{\max})$ 。其中  $\sigma \in (0, 1)$  且满足  $2\sigma - n/q > 0, \varepsilon > 0, \Gamma(1/2 - \varepsilon - \sigma)$  为伽马函数, 即  $\varepsilon \in (0, 1/2 - \sigma)$ 。

3)  $V_3$  的  $L^\infty$  边界估计如下:

由引理 3.2, 令  $m=1, q=2n, p \in (n, \infty]$ 。则存在常数  $D_1, D_7, D_8, D_9, D_{10}$  使得

$$\begin{aligned} \|V_3\|_{W^{1,p}} &\leq D_1 \|(\Delta-1)^\rho V_3\|_q \\ &= D_1 \left\| \int_0^t (\Delta-1)^\rho e^{d_2(t-s)(\Delta-1)} \left( d_2 v(x, t) - cv^2 / (1 + \alpha u)(1 + \beta v) + \gamma v \right) ds \right\|_q \\ &\leq D_7 \int_0^t (t-s)^{-\rho} e^{-\theta(t-s)} \|d_2 v(x, t) - cv^2 / (1 + \alpha u)(1 + \beta v) + \gamma v\|_q \, ds \\ &\leq D_8 \int_0^t (t-s)^{-\rho} e^{-\theta(t-s)} \|v(x, t)\|_q \, ds \\ &\leq D_9 \int_0^t (t-s)^{-\rho} e^{-\theta(t-s)} \, ds \\ &\leq D_{10} \Gamma(1 - \rho). \end{aligned} \tag{43}$$

对于所有的  $t \in (\tau, T_{\max})$ 。且满足  $1 - n/p < 2\rho - n/q$ 。即  $\rho \in (1 - n/p + n/q, 1)$ 。  $\alpha > 0$ , 且对于  $p$ , 由索

伯列夫嵌入理论, 有

$$\|V_3\|_{L^\infty} \leq D_{11}\Gamma(1-\rho). \quad (44)$$

由(41)、(42)和(44)可得

$$\|V(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq I.$$

对于  $t \in (\tau, T_{\max})$ 。

又因为  $T_{\max} = +\infty$ ,  $\tau \in (0, T_{\max})$ , 所以上式对  $t \in (0, \infty)$  成立。

即存在  $C = I + C(\tau)$ , 使得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

对于任意的  $t \in (0, \infty)$ 。

#### 4. 结语

本文首先考虑了基于 Bazykin 型功能反应的具有记忆扩散项的捕食者 - 食饵相互作用的扩散模型, 首先证明了食饵和捕食者其解的局部稳定性  $L$  有界性, 其中捕食者的  $L$  有界性受到了一定参数条件的限制, 更进一步对捕食者进行了  $2n$  次边界估计, 最后得到了捕食者的  $L^\infty$  边界估计。然后证明了系统其全局有界性和稳定性, 结果表明在有记忆扩散捕食者和被捕食者相互作用下, 在一维域  $x \in (0, l\pi)$  中且受到诺依曼边界条件的影响, 具有 Bazykin 型功能反应扩散作用的捕食系统的全局解存在且一致有界, 这与生物学直观感觉一致, 并且有助于后续对于具有记忆扩散的系统其解的稳定性和分支研究。

#### 参考文献

- [1] Lotka, A.J. (1925) Elements of Physical Biology. Williams & Wilkins, Philadelphia.
- [2] Volterra, V. (1927) Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Società anonima tipografica "Leonardo da Vinci".
- [3] Holling, C.S. (1965) The Functional Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population Regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, **97**, 5-60. <https://doi.org/10.4039/entm9745fv>
- [4] Lee, J.M., Hillen, T. and Lewis, M.A. (2009) Pattern Formation in Prey-Taxis Systems. *Journal of Biological Dynamics*, **3**, 551-573. <https://doi.org/10.1080/17513750802716112>
- [5] Shi, J., Wang, C. and Wang, H. (2019) Diffusive Spatial Movement with Memory and Maturation Delays. *Nonlinearity*, **32**, 3188-3208. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab1f2f>
- [6] Li, S., Li, Z. and Dai, B. (2022) Stability and Hopf Bifurcation in a Prey-Predator Model with Memory-Based Diffusion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, **27**, 6885-6906. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022025>
- [7] Dung, L. (1998) Global Estimates for a Class of Reaction-Diffusion Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **217**, 72-94. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5702>
- [8] Amann, H. (1990) Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations. II. Reaction-Diffusion Systems. *Differential Integral Equations*, **3**, 13-75. <https://doi.org/10.57262/die/1371586185>
- [9] Amann, H. (1993) Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. In: Schmeisser, H.-J. and Triebel, H., Eds., *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin, 9-126. [https://doi.org/10.1007/978-3-663-11336-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-663-11336-2_1)
- [10] Jin, H.Y. and Wang, Z.A. (2017) Global Stability of Prey-Taxis Systems. *Journal of Differential Equations*, **262**, 1257-1290. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.010>
- [11] Winkler, M. (2010) Absence of Collapse in a Parabolic Chemotaxis System with Signal-Dependent Sensitivity. *Mathematische Nachrichten*, **283**, 1664-1673. <https://doi.org/10.1002/mana.200810838>
- [12] Tao, Y. (2011) Boundedness in a Chemotaxis Model with Oxygen Consumption by Bacteria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **381**, 521-529. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.041>
- [13] Wu, S., Shi, J. and Wu, B. (2016) Global Existence of Solutions and Uniform Persistence of a Diffusive Predator-Prey

- Model with Prey-Taxis. *Journal of Differential Equations*, **260**, 5847-5874. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.024>
- [14] Tao, Y. and Winkler, M. (2016) Blow-Up Prevention by Quadratic Degradation in a Two-Dimensional Keller-Segel-Navier-Stokes System. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **67**, Article No. 138. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0732-1>
- [15] Horstmann, D. and Winkler, M. (2005) Boundedness vs. Blow-Up in a Chemotaxis System. *Differential Equations*, **215**, 52-107. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.022>
- [16] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Mode. *Differential Equations*, **248**, 2889-2905. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008>