Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2744-2754
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310282

由Marcus型Lévy噪声驱动的随机Hartree方程的全局适定性

张朔霖

浙江理工大学理学院，浙江 杭州

收稿日期：2023年8月30日；录用日期：2023年9月30日；发布日期：2023年10月7日

摘 要

研究随机Hartree方程在Marcus型Lévy噪声扰动下的全局适定性。选择特定条件的噪声，利用噪声规范化，得到积分方程；通过Strichartz估计和压缩映射定理研究解的局部适定性；利用伊藤公式得到解的质量守恒；应用解的一致估计研究解的全局适定性。研究结论表明：初值在 L_x^2 空间中的随机Hartree方程在Marcus型Lévy噪声扰动下具有全局适定性和质量守恒。

关键词

Hartree方程，乘性Lévy噪声，噪声规范化，Itô公式，Strichartz估计，质量守恒，压缩映射定理，全局适定性

Global Well-Posedness of Stochastic Hartree Equation Driven by Lévy Noise in Marcus Form

Shuolin Zhang

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Aug. 30th, 2023; accepted: Sep. 30th, 2023; published: Oct. 7th, 2023

Abstract

In this paper, Global well-posedness of Hartree equation driven by Lévy noise in Marcus form was established. Choosing special noise, taking noise in canonical form, the integral equation was give. Through Strichartz estimate and contraction mapping, local well-posedness of solution was inves-

文章引用: 张朔霖. 由 Marcus 型 Lévy 噪声驱动的随机 Hartree 方程的全局适定性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2744-2754. DOI: 10.12677/pm.2023.1310282

tigating, and conservation law was given by Ito formula. Finally global well-posedness was given by consistent estimate. Result of our research indicated that the Stochastic Hartree equation driven by Lévy noise has unique global solution and conservative in time when the initial value was in L_x^2.

Keywords

Hartree Equation, Multiplicative Lévy Noise, Noise Normalization, Itô's Formula, Strichartz Estimates, Conservation of Mass, Contraction Mapping Theorem, Global Well-Posedness

1. 引言

本文考虑如下 $\mathbf{R}^n$ 中随机 Hartree 方程在 Marcus 型 Lévy 噪声扰动下的全局适定性：

$$\begin{cases} i\mathrm{d}u(t)+\left(\Delta u+\lambda V(u)u\right)\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{m} g_j(u)\lozenge \mathrm{d}L_j(\omega,t) \\ u(0,x)=u_0\in L_x^2 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$n\ge 1$，非线性项 $V(u)=|x|^{-\gamma}*|u|^2$，$0<\gamma<\min(2,n)$，$*$ 代表 x 在 $\mathbf{R}^n$ 上的卷积，g_j 是满足条件 1 的复变函数，$g_j(u)\lozenge \mathrm{d}L_j(\omega,t)$ 是 Marcus 型 Lévy 噪声，u_0 是解 u 的初值，且满足 $|u_0|_{L_x^2}^2=\int_{\mathrm{R}^n}|u_0|^2\,\mathrm{d}x<\infty$，$\lambda=\{-1,1\}$，其中 $\lambda=1$ 时，方程(1)为散焦型；$\lambda=-1$ 时，方程(1)为聚焦型。

通常把 Hartree 方程中带有噪声扰动的方程称为随机 Hartree 方程，把 Hartree 方程中不带有噪声扰动的方程称为确定 Hartree 方程或者 Hartree 方程。随机 Hartree 方程(1)的物理意义可以参考文献[1]中针对随机 Schrödinger 方程在跳跃噪声影响下的物理模型来推导，参考的合理性来源于 Hartree 方程和 Schrödinger 方程在结构上的相似性以及文献[2]中的随机波函数法。方程(1)中的跳跃噪声可以用来描述光纤材质的不均匀性，进而研究光纤中随机孤立位置产生的信号变化。

若去掉方程(1)右侧的噪声扰动，则得到确定 Hartree 方程如下：

$$\begin{cases} i\mathrm{d}u(t)+\left(\Delta u+\lambda V(u)u\right)\mathrm{d}t=0 \\ u(0,x)=u_0 \end{cases} \tag{2}$$

文献[3]指出该方程是描述量子力学中通过双体势能 $\left(|x|^{-\gamma}*|u|^2\right)$ 作用的多玻色子系统场方程的经典极限方程，也可用于描述量子半导体中的电子传输和电子与电子之间的相互作用。在多量子系统中，方程(2)可以演化成平均场极限方程。

方程(2)已经被充分研究，可以参考文献[4] [5] [6] [7]。类似于 Schrödinger 方程，方程(2)在空间 H_x^1 上具有时空平移、相位、伸缩和伽利略不变性。通过研究其伸缩不变性可以得到相应的临界指数 $s_c=\gamma/2-1$。另外，方程(2)具有质量守恒和能量守恒性质，其中质量和能量定义如下：

$$M(u)=|u|_{L_x^2}^2$$

$$E(u)=\frac{1}{2}|\nabla u|_{L_x^2}^2+\frac{\lambda}{4}\int_{\mathrm{R}^n}V(u)|u|^2\,\mathrm{d}x$$

当初值属于 H_x^s 空间时，Miao 等[5]建立了方程(2)在空间 $L_T^\infty H_x^s \cap L_T^p W_x^{s,r}$ （$s \ge \max(0, s_c)$）中的局部适定性；且在不同的临界情形下分别建立了 $\lambda > 0$ 和 $\lambda < 0$ 时在空间 $L_T^\infty H_x^1 \cap L_T^p W_x^{1,r}$ （$s = 1$）中的全局适定性；值得注意的是，当 $\lambda < 0$ 时，能量临界或次临界情形下建立全局适定性需要小初值条件。利用初值随机化，Chen 等[8]证明了超临界情形下方程(2)在空间 $L_T^\infty H_x^s \cap L_T^p W_x^{s,r}$ （$s < s_c$）中全局强解的存在唯一性。且在文献[8]中建立了初值在 H_x^1 空间中的随机 Hartree 方程在守恒 Gaussian 噪声 $u \circ \mathrm{d}W$ 扰动下的(局部)全局适定性：

$$\begin{cases} i\mathrm{d}u(t) + (\Delta u + \lambda V(u)u)\mathrm{d}t = u \circ \mathrm{d}W \\ u(0,x) = u_0 \in H_x^1 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\circ$ 代表 Stratonovich 符号。利用 Strichartz 引理和压缩映射定理证明了方程(3)在空间 $L_T^\infty H_x^s \cap L_T^p W_x^{s,r}$ 中全局强解的存在唯一性，其中存在空间指数 $(p,r) = (6/(\gamma - 2s), 6n/(3n + 4s - 2\gamma))$ 是一对 n 维容许对满足：

$$\frac{2}{p} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{4}$$

研究 Marcus 型 Lévy 噪声的动机源于其对偏微分方程的影响，这一动机的根源可以追溯到守恒 Gaussian 噪声对方程的扰动效应。有关守恒 Gaussian 噪声的详细特性和影响可在文献[8] [9] [10]中找到。Stratonovich 型 Gaussian 噪声是一种具有守恒性质的噪声，通过 Stratonovich 型积分引入，同时遵循传统微积分规则。其另一个重要特性是符合 Wong-Zakai 逼近，这使得它在建模方面具有重要意义。然而，对于跳跃噪声，高阶积分的引入导致这些性质不再成立。Brzeźniak 等在[11]中首次将 Marcus 积分形式应用于跳跃噪声的偏微分方程理论。这一积分形式最初由 Marcus [12]提出，因其在坐标变换下的不变性而成为 Stratonovich 型积分在跳跃噪声上的有效替代。在随后的研究中，Brzeźniak 等[13]运用 Faedo-Galerkin 逼近的方法，获得了在 Marcus 型 Lévy 噪声扰动下的 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程的鞅解，并在文献[14]中将相关的理论应用到了随机 Schrödinger 方程上，建立了次临界情形下随机非线性 Schrödinger 方程在 Marucs 型 Lévy 噪声扰动下的局部适定性，得到了解 u 的质量守恒：

$$M(u) = M(u_0) \tag{5}$$

其中：$M(u) = |u|_{L_x^2}^2$，并借助该结论将局部适定性推广到全局适定性。

相比于随机 Schrödinger 方程，随机 Hartree 方程在描述多粒子量子体系时是更为常见的数学模型，同时根据 Marcus 的理论[12]，Marcus 型 Levy 噪声能描述一类广泛的随机对象，包括连续分量、独立增量、有限二阶矩、零均值和无连续分量等常见齐次向量过程，因而由 Marcus 型 Levy 噪声驱动的随机 Hartree 方程可以能更好地描述在随机因素影响下的多量子运动的规律。据笔者所知，对于 Hartree 方程在噪声扰动下的全局适定性研究只有文献[13]，目前还没有关于 Marucs 型 Lévy 噪声在 Hartree 方程上的研究。

本文将要建立初值属于 L_x^2 空间时随机 Hartree 方程在 Marcus 型 Lévy 噪声扰动下的局部和全局适定性，得到当 $0 < \gamma < \min(2,n)$ 时，方程(1)在空间 $L_T^\infty H_x^s \cap L_T^p W_x^{s,r}$ （$s = 0$），即空间 $L_T^\infty L_x^2 \cap L_T^p L_x^r$ 中全局温和解的存在唯一性，其中 n 维容许对 $(p,r) = (8/\gamma, 4n/(2n-\gamma))$，$\gamma$ 满足的条件保证了方程(1)处于次临界情形。与之前对 Hartree 方程的研究不同，本文在建立局部适定性方面采用了 Brzeźniak 等[14]所证明的 Strichartz 估计的随机形式。相比于 Chen 等[8]的研究，本文研究的方程对于初始条件的选择和解的存在空间指数(p, r)的选择都不同。此外，我们考虑的 Lévy 噪声是 Gaussian 噪声的一种推广，因此具有更广泛的应用范围。我们建立局部适定性的主要方法基于 Strichartz 估计的压缩映射定理。为了建立全局适定性，我们需要利用 Marcus 型 Lévy 噪声的特殊性质，以确保解的质量守恒，从而建立解的一致估计。通过应用解的一致估计，我们将局部适定性推广到全局适定性。

2. 预备知识

2.1. Marcus 规范形式

为了方便建立方程(1)的局部适定性，需要将方程(1)表述为 Marcus 规范形式的随机 Hartree 方程。令 $\left(\Omega,\mathbb{F},F=\left(\mathbb{F}_t\right)_{t\geq 0},P\right)$ 是一个满足一般条件的滤性概率空间，其中 $\left(\mathbb{F}_t\right)_{t\geq 0}$ 是一个滤性 σ 代数。我们假定 Levy 噪声 $L(\omega,t)=\left(L_1,L_2,\cdots,L_m\right)=\int_0^t\int_B z\tilde{N}\left(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z\right)$ 的密度测度 ν 满足 $supp\,\nu\in B$，且 $\int_B|z|^2\nu\left(\mathrm{d}z\right)\leq 1$，其中 B 是 $\mathbf{R}^m$ 中的封闭单位球。用 N 表示与 ν 相关的时间齐次泊松随机测度。用 $\tilde{N}=N-\nu$ 表示相应的补偿时间齐次泊松随机测度。对于上述 Levy 噪声在随机微分方程中的应用，Marcus [12]提供了噪声规范化的基本框架。为此定义 $\Phi(1,z,x)=\Phi(z,x)$，$\Phi(0,z,x)=x$，其中 $\Phi(t,z,x)$ 满足下述常微分方程：

$$\frac{\partial\Phi(t,z,x)}{\mathrm{d}t}=i\sum_{i=1}^{m}z_jg_j\left(\Phi(t,z,x)\right)\tag{6}$$

由 Marcus [12]提出的理论，Marcus 型 Lévy 噪声 $\sum_{j=1}^{m}g_j\left(u(t)\right)\lozenge\mathrm{d}L_j(t)$ 可以表示为如下形式：

$$\int_B\left[\Phi\left(z,u(t-)\right)-u(t-)\right]\tilde{N}\left(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z\right)+\int_B\left[\Phi\left(z,u(t)\right)-u(t)+i\sum_{i=1}^{m}z_jg_j\left(u(t)\right)\right]\nu\left(\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t\tag{7}$$

令 $G(z,u)=\Phi(z,u)-u$，$I(z,u)=\Phi(z,u)-u+i\sum_{j=1}^{m}z_jg_j(u)$。将其结合(7)代入方程(1)得到方程(1)的 Marcus 规范形式如下：

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=i\left[\Delta u(t)+\lambda\left(|x|^{-\gamma}*|u|^2\right)u(t)\right]\mathrm{d}t+\int_B G\left(z,u(t-)\right)\tilde{N}\left(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z\right)+\int_B I\left(z,u(t)\right)\nu\left(\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t\\ u(0,x)=u_0\end{cases}\tag{8}$$

本文假定 g_j 满足下述条件：

条件 1

a) $g_j(y)$ 可以表示为 $r_j\left(|y|^2\right)y$，其中 r_j 是一个可微实值函数。

b) $\max_{1\leq j\leq m}\left|g_j(x)-g_j(y)\right|\leq L_1|x-y|$。

c) $\max_{1\leq j,k\leq m}\left|\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}x}(x)g_j(x)-\frac{\mathrm{d}g_j}{\mathrm{d}x}(x)g_k(y)\right|\leq L_2|x-y|$。

由上述条件容易得到 $\left|\Phi(t,z,x)\right|$ 随时间守恒。事实上，由 $\frac{\mathrm{d}|\Phi|^2}{\mathrm{d}t}=2\operatorname{Re}\Phi\bar{\Phi}$，式(6)和条件 1 a)得到：

$$\frac{\partial\left|\Phi(t,z,x)\right|^2}{\partial t}=2\operatorname{Re}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bar{\Phi}=2\operatorname{Re}i\sum_{i=1}^{m}z_jg_j(\Phi)\bar{\Phi}=2\sum_{i=1}^{m}z_jr_j\left(|\Phi|^2\right)\operatorname{Re}i\Phi\bar{\Phi}$$

再由 $\operatorname{Re}i\Phi\bar{\Phi}=0$ 得到 $\frac{\partial\left|\Phi(t,z,x)\right|^2}{\partial t}=0$，即：

$$\left|\Phi(z,x)\right|=\left|\Phi(1,z,x)\right|=\left|\Phi(0,z,x)\right|=|x|\tag{9}$$

通过式(9)，Brzeźniak 等[14]进一步研究了噪声的性质：

引理 1 设 $g_j(u)$ 满足条件 1，$\exists C_m^1,C_m^2,C_m^3,C_m^4>0$，使得对于 $\forall y,y_1,y_2\in\mathbf{C}$ 和 $\forall z\in\mathbf{R}^m$，$|z|\leq 1$，$G(z,y)$ 和 $H(z,y)$ 满足下列不等式：

1) $\left|G(z,y)\right| \le C_m^1 |z||y|$
2) $\left|G(z,y_1)-G(z,y_2)\right| \le C_m^2 |z||y_1-y_2|$
3) $\left|H(z,y)\right| \le C_m^3 |z|^2 |y|$
4) $\left|H(z,y_1)-H(z,y_2)\right| \le C_m^4 |z|^2 |y_1-y_2|$

2.2. 解的存在空间与构造

为了构造方程(8)的局部和全局温和解，需要给出方程(8)解的存在空间 Y_T，$M_{\mathbb{F}}(Y_T)$。令 $(p,r)=(8/\gamma,4n/(2n-\gamma))$，$Y$ 为两个空间的交集 $Y_{[t_1,t_2]}=Y_{[t_1,t_2]}^1 \cap Y_{[t_1,t_2]}^2$，其中：$Y_{[t_1,t_2]}^1=L_{[t_1,t_2]}^\infty L_x^2$，$Y_{[t_1,t_2]}^2=L_{[t_1,t_2]}^p L_x^r$。因此 $Y_{[t_1,t_2]}$ 是一个 Banach 空间。若 $u(t,x)\in Y_{[t_1,t_2]}$，根据定义得到 u 的 $Y_{[t_1,t_2]}$ 范数为：

$$|u|_{Y_{[t_1,t_2]}}=|u|_{Y_{[t_1,t_2]}^1}+|u|_{Y_{[t_1,t_2]}^2}=\sup_{t\in[t_1,t_2]}|u|_{L_x^2}+\left(\int_{t_1}^{t_2}|u|_{L_x^r}^p\,\mathrm{d}t\right)^p \tag{10}$$

其中 $|u|_{Y_{[t_1,t_2]}}$ 表示 u 在空间 $Y_{[t_1,t_2]}$ 中的范数。本文用 $|u|_Y$ 表示 u 在 Banach 空间 Y 中的范数，特别的，用 $|\cdot|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示空间 L_x^2 上的范数和内积。定义 $Y_T=Y_{[0,T]}$，在这个基础上定义 Banach 空间 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 如下：

$$M_{\mathbb{F}}(Y_T)=\left\{u:|u|_{M_{\mathbb{F}}(Y_T)}^p=\mathrm{E}|u|_{Y_T}^p=\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}|u|_{L_x^2}^p+\mathrm{E}\left(\int_0^T|u|_{L_x^r}^p\,\mathrm{d}t\right)<\infty\right\} \tag{11}$$

其中 E 表示均值。由定义容易得到：对于任意 $0<T_1\le T_2$，$Y_{T_1}\subseteq Y_{T_2}$，$M_{\mathbb{F}}(Y_{T_1})\subseteq M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})$。

根据方程(8)和 Banach 空间 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 的定义，给出方程(8)局部和全局温和解的定义：

定义 1 $\mathbb{F}$ 可测过程 $u(t)$是方程(8)的局部温和解当且仅当存在 τ，$u(t),t\in[0,\tau)$ 满足下述条件：

a) $|u(t)|_{L_x^2}$ 是 $[0,\tau)$ 上的左极右连函数。
b) $u(t)\in M_{\mathbb{F}}(Y_\tau)$。
c) 对于任意 $t\in[0,\tau)$，如下积分方程成立：

$$\begin{aligned}u(t)=&S_tu_0+i\int_0^tS_{t-s}\lambda V(u)u\mathrm{d}s+\int_0^t\int_BS_{t-s}G(z,u(s-))\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\\&+\int_0^t\int_BS_{t-s}I(z,u(s))\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{12}$$

其中：S_t 是方程(1)的解算子半群。特别地，$u(t)$ 是方程(8)的全局温和解如果存在 τ_n，$u(t)$，$t\in[0,\tau_n)$ 使得上述条件满足，且对于任意 $T>0$，$\tau_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 满足：

$$P(\tau_\infty\wedge T=T)=1 \tag{13}$$

可以将定义 1 c)中的积分方程右端看成作用在 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 上的算子 $\Gamma(u(t))$，由压缩映射定理可知构造方程(8)局部温和解的问题等价于证明 $\Gamma(u(t))$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 是压缩映射算子，为此我们需要 Strichartz 估计。

Strichartz 估计是一种用于研究非线性发展方程解的数学工具，它的主要目标是估计非线性发展方程解在时间和空间上的行为，下面我们介绍经典的 Strichartz 估计：

引理 2 (p,r) 和 (γ,ρ) 是 n 维容许对，γ' 和 ρ' 是 γ 和 ρ 的共轭数，则下述命题成立：

a) 对于任意 $\phi\in L_x^2$，函数 $t\to S_t\phi\in L_T^pL_x^r$，且存在常数 C 满足：$|S_t\phi|_{L_T^pL_x^r}\le C|\phi|_{L_x^2}$。
b) 对于任意 $f\in L_T^{\gamma'}L_x^{\rho'}$，函数 $\Gamma_f(t)=\int_0^tS_{t-s}f(s)\mathrm{d}s\in L_T^pL_x^r$，且存在常数 C 满足：

$$|\Gamma_f(t)|_{L_T^pL_x^r}\le C|f|_{L_T^{\gamma'}L_x^{\rho'}},\quad |\Gamma_f(t)|_{L_T^\infty L_x^2}\le C|f|_{L_T^{\gamma'}L_x^{\rho'}}$$

Strichartz 估计能对解在不同频域上的分布进行分析，从而为我们寻找合适的解存在空间。例如我们研究(12)中解的部分 S_tu_0。由定义(4)容易验证 $(8/\gamma,4n/(2n-\gamma))$ 和 $(\infty,2)$ 均是 n 维容许对，设 $u_0\in L_x^2$，令

$(p,r)=(8/\gamma,4n/(2n-\gamma))$，由式(10)和引理 2 a)得到 $|S_t u_0|_{Y_T}\le C|u_0|_{L_x^2}$。再由定义式(11)得到：

$$|S_t u_0|_{M_{\mathbb{F}}(Y_T)}^p=\mathrm{E}|S_t u_0|_{Y_T}^p\le C\mathrm{E}|u_0|_{L_x^2}^p=C|u_0|_{L_x^2}^p<\infty \tag{14}$$

因而我们得到一个自映射的结论：

$$S_t u_0\in M_{\mathbb{F}}(Y_T) \tag{15}$$

n 维容许对的选取则主要依赖于 Hartree 方程的非线性项，细节可见定理 1 的证明。

观察(12)式我们发现引理 2 不能估计泊松积分项，为此我们还需要 Brzeźniak 等[14]建立的随机 Strichartz 估计：

引理 3 (p,r) 和 (γ,ρ) 是 n 维容许对，γ' 和 ρ' 是 γ 和 ρ 的共轭数，则下述命题成立：

a) 对于任意 $\mathbb{F}$ 可料过程 G 满足 $G:[0,T]\times\Omega\times B\to L^2(\mathrm{R}^n;\mathbb{C})$，如果 $q\ge 2$ 时，$G\in L^q\left(\Omega,L^2\left(([0,T\times B]);L^r(\mathrm{R}^n)\right)\cap L^q\left(([0,T]\times B);L^2(\mathrm{R}^n)\right)\right)$，则存在常数 C_q：

$$\left|\int_0^t\int_Z S_{t-s}G(s,z)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\right|_{L_\omega^q L_T^p L_x^r}^q\le C_q\mathrm{E}\left(\int_0^t\int_{L_x^2}|G(s,z)|_{L_x^2}^2\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right)^{\frac{q}{2}}+C_q\mathrm{E}\int_0^t\int_{L_x^2}|G(s,z)|_{L_x^2}^q\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$$

3. 随机 Hartree 方程的全局适定性

3.1. 方程的局部适定性

这一部分建立随机 Hartree 方程(8)的局部适定性，即证明方程(8)局部温和解的存在唯一性。先将积分方程(12)改写为截断方程(16)：

$$\begin{aligned}u(t)=&S_t u_0+i\int_0^t S_{t-s}\theta_{Y_t}^R(u)\lambda V(u)u\mathrm{d}s+\int_0^t\int_B S_{t-s}G(z,u(s-))\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\\&+\int_0^t\int_B S_{t-s}I(z,u(s))\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{16}$$

其中截断函数 $\theta_{Y_T}^R(u)=\theta\left(\frac{|u|_{Y_T}}{R}\right)$，其中 $1_{[0,1]}\le\theta(x)\le 1_{[0,2]}$，$|\theta(x)-\theta(y)|\le C|x-y|$。需要证明 $\Gamma(u(t))$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 是压缩映射算子。为了方便，将 $\Gamma(u(t))$ 分为 $S_t u_0$，$\Gamma_1(u(t))$，$\Gamma_2(u(t))$ 和 $\Gamma_3(u(t))$ 四个部分，其中：

$$\Gamma_1(u(t))=+i\int_0^t S_{t-s}\theta_{Y_t}^R(u)\lambda V(u)u\mathrm{d}s \tag{17}$$

$$\Gamma_2(u(t))=+\int_0^t\int_B S_{t-s}G(z,u(s-))\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) \tag{18}$$

$$\Gamma_3(u(t))=+\int_0^t\int_B S_{t-s}I(z,u(s))\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s \tag{19}$$

只需证明 $\Gamma_i(u(t)),i=\{1,2,3\}$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 是压缩映射算子：

引理 3 $\exists T_i>0$，使 $\Gamma_i(u(t))$，$i=\{1,2,3\}$ 在空间 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_i})$ 中是压缩映射。

证明

1) 证明 $\Gamma_1(u(t))$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_1})$ 中是压缩映射。令 $(p,r)=(8/\gamma,4n/(2n-\gamma))$，$\theta=8/(4-\gamma)$，则 $\frac{1}{q'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta}$，$\frac{1}{r'}=\frac{\gamma}{2n}+\frac{1}{r}$。设 $u\in M_{\mathbb{F}}(Y_{T_1})$，类似式(12)的证明：由 Strichartz 引理得到 $|\Gamma_1(u)|_{Y_{T_1}}\le C|V(u)u|_{L_{T_1}^{p'}L_x^{r'}}$，再由 Holder 不等式得到 $|\Gamma_1(u)|_{Y_{T_1}}\le C|u|_{Y_{T_1}}|V(u)|_{L_{T_1}^{\frac{4}{4-\gamma}}L_x^{\frac{2n}{\gamma}}}$，最后由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式得到：

$$\left|\Gamma_1(u)\right|_{Y_{T_1}} \le C\left|u^2\right|_{L_{T_1}^{\frac{4}{4-\gamma}}L_x^{\frac{r}{2}}}\left|u\right|_{Y_{T_1}} \le C\left|u\right|_{L_{T_1}^{\theta}L_x^{r}}^2\left|u\right|_{Y_{T_1}} \le CT_1^{1-\frac{\gamma}{2}}\left|u(t)\right|_{Y_{T_1}}^3 \tag{20}$$

因此$\Gamma_1\left(u(t)\right)$是$M_{\mathbb{F}}\left(Y_{T_1}\right)$上的自映射算子。设另有$v\in M_{\mathbb{F}}\left(Y_{T_1}\right)$，则$u-v\in M_{\mathbb{F}}\left(Y_{T_1}\right)$。令停时$\tau_1=\inf\left\{t\in[0,T_1]:|u|_{Y_t}>R\right\}$，$\tau_2=\inf\left\{t\in[0,T_1]:|v|_{Y_t}>R\right\}$，不失一般性，设$\tau_1\le\tau_2$。由截断函数、停时的定义和引理2得到：

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_1(u)-\Gamma_1(v)\right|_{Y_{T_1}} &\le \left|\left(\theta_{Y_t}^R(u)-\theta_{Y_t}^R(v)\right)V(v)v\right|_{L_{T_1}^{p'}L_x^{r'}}+\left|\theta_{Y_t}^R(u)\left(V(u)u-V(v)v\right)\right|_{L_{T_1}^{p'}L_x^{r'}}\\ &\le C\left|u-v\right|_{Y_{T_1}}\left|V(v)v\right|_{L_{\tau_2}^{p'}L_x^{r'}}+\left|V(u)u-V(v)v\right|_{L_{\tau_1}^{p'}L_x^{r'}}\end{aligned}$$

类似于式(20)的证明过程，可得：

$$\left|V(v)v\right|_{L_{\tau_2}^{p'}L_x^{r'}} \le CT_1^{1-\frac{\gamma}{2}}\left|v(t)\right|_{Y_{\tau_2}}^3 \tag{21}$$

对于$\left|V(u)u-V(v)v\right|_{L_{\tau_1}^{p'}L_x^{r'}}$，利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 Holder 不等式得到：

$$\begin{aligned}\left|V(u)u-V(v)v\right|_{L_{\tau_1}^{p'}L_x^{r'}} &\le \left|V(u)\right|_{L_{\tau_1}^{\frac{4}{4-\gamma}}L_x^{\frac{2n}{\gamma}}}\left|u-v\right|_{Y_{T_1}}+\left|x^{-\gamma}*\left(|u|^2-|v|^2\right)\right|_{L_{\tau_1}^{2}L_x^{\frac{2n}{\gamma}}}\left|v\right|_{L_{\tau_1}^{\theta}L_x^{\frac{2n}{\gamma}}}\\ &\le CT_1^{1-\frac{\gamma}{2}}\left(\left|u\right|_{L_{\tau_1}^{p}L_x^{r}}^2+\left|v\right|_{L_{\tau_1}^{p}L_x^{r}}^2\right)\left|u-v\right|_{Y_{T_1}}\end{aligned} \tag{22}$$

由停时定义得到$|u|_{L_{\tau_1}^pL_x^r}\le|u|_{Y_{\tau_1}}\le R$，$|v|_{L_{\tau_2}^pL_x^r}\le|v|_{Y_{\tau_2}}\le R$，$|v|_{L_{\tau_1}^pL_x^r}\le|v|_{Y_{\tau_2}}\le|v|_{Y_{\tau_2}}\le R$，结合式(21)，(22)，得到：

$$\left|\Gamma_1(u)-\Gamma_1(v)\right|_{Y_{T_1}} \le CT_1^{1-\frac{\gamma}{2}}\left(2R^2+R^3\right)\left|u-v\right|_{Y_{T_1}}$$

取$T_1>0$，使得$CT_1^{1-\frac{\gamma}{2}}\left(2R^2+R^3\right)<1/2$，即：

$$\mathrm{E}\left|\Gamma_1(u)-\Gamma_1(v)\right|_{Y_{T_1}}^p \le \frac{1}{2}\mathrm{E}\left|u-v\right|_{Y_{T_1}}^p \tag{23}$$

式(20)和式(23)表明$\Gamma_1\left(u(t)\right)$是$M_{\mathbb{F}}\left(Y_{T_1}\right)$上的压缩映射。

2) 证明$\Gamma_2\left(u(t)\right)$在$M_{\mathbb{F}}\left(Y_{T_2}\right)$中是压缩映射。类似于$\Gamma_1\left(u(t)\right)$的证明，利用引理3和引理1，得到：

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_2(u)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})}^p &\le C_p\mathrm{E}\left(\int_0^{T_2}\int_B\left|G(z,u)\right|_{L_x^2}^2\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}+C_q\mathrm{E}\int_0^{T_2}\int_B\left|G(z,u)\right|_{L_x^2}^p\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\\ &\le C_p\mathrm{E}\left(\int_0^{T_2}\int_B|z|^2|u|_{L_x^2}^2\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}+C_q\mathrm{E}\int_0^{T_2}\int_B|z|^p|u|_{L_x^2}^p\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

再由 Holder 不等式得到：

$$\left|\Gamma_2(u)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})}^p \le C_p\left(T_2^{\frac{p}{2}}+T_2\right)\mathrm{E}|u|_{Y_{T_2}^1}\left(\left(\int_B|z|^p\nu(\mathrm{d}z)\right)^{\frac{p}{2}}+\int_B|z|^2\nu(\mathrm{d}z)\right) \tag{24}$$

考虑到$\int_B|z|^p\nu(\mathrm{d}z)\le\int_B|z|^2\nu(\mathrm{d}z)\le1$，$Y_T=Y_T^1\cap Y_T^2$于是下式成立：

$$\left|\Gamma_2(u)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})}^p \le C_p\left(T_2^{\frac{p}{2}}+T_2\right)\mathrm{E}|u|_{Y_{T_2}}^p \tag{25}$$

类似于式(25)的证明过程，可以得到：

$$\left|\Gamma_2(u)-\Gamma_2(v)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})}^p \le C_p\left(T_2^{\frac{p}{2}}+T\right)\mathrm{E}|u-v|_{Y_{T_2}}^p$$

取取 $T_2>0$，使得 $C_p\left(T_2^{\frac{p}{2}}+T_2\right)<1/2$，即：

$$\left|\Gamma_2(u)-\Gamma_2(v)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})}^p \le \frac{1}{2}\mathrm{E}\left|u-v\right|_{Y_{T_2}}^p \tag{26}$$

式(25)和式(26)表明 $\Gamma_2(u(t))$ 是 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})$ 上的压缩映射。

3) 证明 $\Gamma_3(u(t))$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})$ 中是压缩映射。由 Strichartz 引理，若 $u\in M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})$，则由引理 3 和和闵可夫斯基不等式得到：

$$\left|\Gamma_3(u(t))\right|_{Y_{T_3}} \le C\int_0^{T_3}\left|S_{t-s}\int_B I(z,u(s))\nu(\mathrm{d}z)\right|_{Y_{T_3}}\mathrm{d}s \le C\int_0^{T_3}\left|\int_B I(z,u(s))\nu(\mathrm{d}z)\right|_{L_x^2}\mathrm{d}s$$

再由引理 1 得到：

$$\left|\Gamma_3(u(t))\right|_{Y_{T_3}} \le C\int_0^{T_3}\left(\int_B |z|^2\nu(\mathrm{d}z)\right)|u|_{L_x^2}\,\mathrm{d}s \le CT_3|u|_{Y_{T_3}}$$

即：

$$\left|\Gamma_3(u(t))\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})} \le CT_3|u|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})} \tag{27}$$

同理，取 $0<CT_3<1/2$ 可得：

$$\left|\Gamma_3(u)-\Gamma_3(v)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})} \le \frac{1}{2}|u-v|_{M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})} \tag{28}$$

式(27)和式(28)表明 $\Gamma_3(u(t))$ 在 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})$ 中是压缩映射，证毕。

定理 1 方程(8)在空间 $M_{\mathbb{F}}(Y_{\tau_R})$ 上存在唯一局部温和解 $u^R(t)$，$t\in[0,\tau_R)$。

证明 首先证明方程(16)有全局温和解：

取 $T_0=\dfrac{\min(T_1,T_2,T_3)}{3}$，则当 $u(t)\in M_{\mathbb{F}}(Y_{T_0})\subset M_{\mathbb{F}}(Y_{T_1})\cap M_{\mathbb{F}}(Y_{T_2})\cap M_{\mathbb{F}}(Y_{T_3})$ 时，由式(15)和引理 3 可知 $\Gamma(u(t))$ 是 $M_{\mathbb{F}}(Y_{T_0})$ 上的压缩映射，由压缩映射定理可知存在 $u(t)\in M_{\mathbb{F}}(Y_{T_0})$ 使得：

$$u(t)=\Gamma(u(t)) \tag{29}$$

Zhu 等[15]证明了 $\Gamma_2(u(t))$ 在左极右连修正下是 L_x^2 适应的，且可以找到 $u(t)$ 在空间 L_x^2 中的左极右连修正，因此 $u(t)$，$t\in[0,T_0]$ 是方程(16)的局部温和解。对于 $\forall T>0$，在 $[T_0,2T_0],[2T_0,3T_0],\cdots,\left[[T/T_0]T_0,([T/T_0]+1)T_0\right]$ 的区间上重复上述讨论，可以得到方程(16)在 $M_{\mathbb{F}}(Y_T)$ 上的全局温和解 $u(t)$。

为了证明 $u(t)$ 是方程(8)的局部温和解，还需证明存在 τ_R 使得 $u(t)$ 在 $[0,\tau_R)$ 上使得方程(12)成立。取停时 $\tau_R=\inf\left\{t\in[0,T]:|u|_{Y_t}>R\right\}$，则方程(16)中函数 $\theta_{Y_s}^R(u)$ 在 $[0,\tau_R)$ 上为 1，即方程(12)在 $[0,\tau_R)$ 上与方程(16)等价。定义 $u^R(t)$ 在 $[0,\tau_R)$ 上等于 $u(t)$，则根据定义 1，$u^R(t)$ 为方程(8)的唯一局部温和解，证毕。

3.2. 解的守恒律和方程的全局适定性

为了得到解 $u_t^R=u^R(t)$ 的一致估计，需要先证明解的质量守恒。为此我们引入伊藤公式。

伊藤公式是随机微积分的基本结果，用于处理随机微分方程中的随机项。它将随机过程的微分形式与函数的随机导数联系起来。将伊藤公式应用于 $M(u_t^R)=\left|u^R(t)\right|_{L_x^2}^2$，我们有

$$\mathrm{d}M(u)=2\,\mathrm{Re}\langle u,\mathrm{d}u\rangle+\mathrm{Re}\langle \mathrm{d}u,\mathrm{d}u\rangle$$

带入到式(16)我们有下述定理：

定理 2 设 u_t^R 是方程(8)的解，则下列质量守恒满足

$$M\left(u_t^R\right)=M\left(u_0^R\right) \tag{30}$$

证明。借助伊藤公式，可得：

$$M\left(u_t^R\right)-M\left(u_0^R\right)=\int_0^t 2\operatorname{Re}\left\langle u_s^R, i\theta_{Y_s}^R(u)V(u)u_s^R\right\rangle \mathrm{d}s+\int_0^t\int_B\left(\left|\Phi\left(z,u_{s-}^R\right)\right|_{L_x^2}-\left|u_{s-}^R\right|_{L_x^2}\right)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}s)$$

$$\int_0^t\int_B\left(\left|\Phi\left(z,u_s^R\right)\right|_{L_x^2}-\left|u_s^R\right|_{L_x^2}\right)+2\operatorname{Re}\left\langle u_s^R, i\sum_{i=1}^m z_j g_j\left(u_s^R\right)\right\rangle \nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$$

由 $\operatorname{Re}\langle u,iu\rangle=0$ 和条件 1，可得：$\operatorname{Re}\left\langle u_s^R, i\sum_{i=1}^m z_j g_j u_s^R\right\rangle=\operatorname{Re}\left\langle u_s^R, i\sum_{i=1}^m z_j r_j\left(\left|u_s^R\right|^2\right)u_s^R\right\rangle=0$，$\operatorname{Re}\left\langle u_s^R, i\theta_{Y_s}^R\left(u_s^R\right)V\left(u_s^R\right)u_s^R\right\rangle=0$。由式(9)可知 $\left|\Phi\left(z,u_{s-}^R\right)\right|_{L_n^2}=\left|u_{s-}^R\right|_{L_n^2}$。综上所述可以得到 $M\left(u^R(t)\right)-M\left(u^R(0)\right)=0$，即：

$$\left|u_t^R\right|_{L_x^2}=\left|u_0\right|_{L_x^2} \tag{31}$$

证毕。

接下来建立解 $u^k(t)=u^R(t)$，$R=k\in\mathbf{N}$ 的一致估计：

引理 4 取 $(p,r)=\left(8/\gamma, 4n/(2n-\gamma)\right)$，设 $u^k=u^R(t)$，$R=k\in\mathbf{N}$，其中 $u^R(t)$ 是方程(8)的唯一局部温和解。则下列解的一致估计成立：

$$\sup_k\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_T)}^p\le M$$

其中 M 只跟 p，T，γ 有关。

证明 定义停时区间 $\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]\subset[0,T]$ (j 为正整数)如下：

$$\alpha_0=0,\alpha_{j+1}:=\inf\left\{t\in[0,T]:C\left(t-\alpha_j\right)^{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)p}\left(M_{\alpha_j,t}^k(\omega)\right)^2>\frac{1}{16}\right\}$$

其中：

$$M_{s,t}^k=C\left(1+(t-s)^p\right)\left|u_0\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_t)}^p+\left|\Gamma_2\left(u^k\right)\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{[s,t]}\right)}^p$$

结合式(14)、式(20)、式(24)和式(27)得到：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_t)}^p\le Ct^{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)p}\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_t)}^{3p}+C\left(1+t^p\right)\left|u_0\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_t)}^p+\left|\Gamma_2\left(u^k\right)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_t)}^p \tag{32}$$

为了方便，设：

$$M_k=C\left(1+T^p\right)\left|u_0\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_T)}^p+\left|\Gamma_2\left(u^k\right)\right|_{M_{\mathbb{F}}(Y_T)}^p$$

下面证明解 u^k 在区间 $\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]$ 上有上界 $2M_k$。事实上，由停时 α_1 的定义得到：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^p\le Ct^{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)p}\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{3p}+M_{0,\alpha_1}^k\le\frac{1}{16\left(M_{0,\alpha_1}^k\right)^2}\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{3p}+M_{0,\alpha_1}^k \tag{33}$$

通过观察上述不等式结构，设函数 $f(x)=\frac{1}{16\left(M_{0,\alpha_1}^k\right)^2}x^3+M_{0,\alpha_1}^k-x$，于是式(33)等价地写为：

$$\frac{1}{16\left(M_{0,\alpha_1}^k\right)^2}\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{3p}+M_{0,\alpha_1}^k-\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{p}=f\left(\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{p}\right)>0$$

由 $f(0)>0$，$f\left(2M_{0,\alpha_1}^k\right)<0$ 以及 $\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{p}$ 的连续性，得到在区间 $\left[0,\alpha_j\right]$ 上：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{p}<2M_{0,\alpha_1}^k<2M_k$$

将上述方法应用在区间 $\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]$ 上，得到：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]}\right)}^{p}<2M_{\alpha_j,\alpha_{j+1}}^k<2M_k$$

于是得到了 $\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_t\right)}^{p}$ 在区间 $\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]$ (j 为正整数)上具有相同上界。为了得到区间[0, T]上的上界，还需要证明在区间[0, T]上，只有有限个区间 $\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]$。令 $T_k=\left(\left(4M_k\right)^2\right)^{-\frac{1}{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)p}}\wedge T$，由停时 α_j 的定义，有 $T_k<\alpha_{j+1}-\alpha_j$，所以[0, T]上至多有 $\left[T/T_k\right]+1$ 个停时区间。因此能得到区间[0, T]上的上界：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_T\right)}^{p}\le\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\alpha_1}\right)}^{p}+\sum_j\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_{\left[\alpha_j,\alpha_{j+1}\right]}\right)}^{p}\le C_{p,\gamma,T}\left(M_k\right)^{\frac{4}{(2-\gamma)p}+1}+2M_k \tag{34}$$

为了证明式(34)右侧与 k 无关。利用式(24)，得到：

$$\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_T\right)}^{p}\le 2M_k+C_{p,\gamma,T}\left(M_k\right)^{\frac{4}{(2-\gamma)p}+1}\le \mathrm{E}\left|u_0\right|_{L_x^2}^{p}+C_{p,\gamma,T}\mathrm{E}\left|u_0\right|_{L_x^2}^{\frac{4}{2-\gamma}p+p}=M \tag{35}$$

即结论成立。

由全局适定性的定义，还需研究停时 $\tau_k=\inf\left\{t:\left|u^k\right|_{Y_t}>k\right\}\wedge T$，因此有下述定理：

定理 3 对于 $\forall T>0$，方程(8)在空间 $M_{\mathbb{F}}^p\left(Y_T\right)$ 上存在唯一全局温和解 $u(t)$，$t\in[0,T]$。

证明 由切比雪夫不等式和式(35)，对于 $\forall T>0$，可得：

$$P\left(\tau_k=T\right)=P\left\{\left|u^k\right|_{Y_T}\le k\right\}\ge 1-\frac{\left|u^k\right|_{M_{\mathbb{F}}\left(Y_T\right)}^{p}}{k^p}\ge 1-\frac{M}{k^p}$$

即：

$$P\left(\tau_\infty=T\right)\ge P\left(\cup_k\left\{\tau_k=T\right\}\right)=\lim_{k\to\infty}P\left(\tau_k=T\right)=1 \tag{36}$$

证毕。

4. 结论

通过证明的细节可以看出，解的质量守恒的建立依赖于我们对于噪声项中 g_j 的选取，这也是将解在有限时间内的适定性推广全局的关键因素。

本文将 Marcus 型 Levy 噪声首次应用于随机 Hartree 方程适定性理论，且通过将 Strichartz 估计的随机形式应用于压缩映射定理的证明，建立了方程(1)在次临界情形下的局部和全局适定性。同时本文的结论验证了随机 Hartree 方程在跳跃噪声扰动下的数学模型的有效性，这说明在后续的工作中可以进一步研究随机 Hartree 方程(1)的不变测度问题和遍历性问题。

参考文献

[1] Villarroel, J. and Montero, M. (2010) On the Effect of Random Inhomogeneities in Kerr Media Modelled by a Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Physics B*: *Atomic*, *Molecular and Optical Physics*, **43**, Article ID: 135404. https://doi.org/10.1088/0953-4075/43/13/135404

[2] Ginibre, J. and Velo, G. (1980) On a Class of Non Linear Schrödinger Equations with Non Local Interaction. *Mathematische Zeitschrift*, **170**, 109-136. https://doi.org/10.1007/BF01214768

[3] Arora, A.K. and Roudenko, S. (2022) Global Behavior of Solutions to the Focusing Generalized Hartree Equation. *Michigan Mathematical Journal*, **71**, 619-672.

[4] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2007) Global Well-Posedness and Scattering for the Energy-Critical, Defocusing Hartree Equation for Radial Data. *Journal of Functional Analysis*, **253**, 605-627. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.09.008

[5] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2008) The Cauchy Problem of the Hartree Equation. *Journal of Partial Differential Equations*, **21**, 22.

[6] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2010) Global Well-Posedness and Scattering for the Energy-Critical, Defocusing Hartree Equation in R^{1+n}. *Communications in Partial Differential Equations*, **36**, 729-776. https://doi.org/10.1080/03605302.2010.531073

[7] 罗虎啸. 带有非线性阻尼项的广义 Hartree 方程的整体适定性[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(4): 675-686.

[8] Chen, Y. and Gao, H. (2015) The Cauchy Problem for the Hartree Equations under Random Influences. *Journal of Differential Equations*, **259**, 5192-5219. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.06.021

[9] de Bouard, A. and Debussche, A. (2003) The Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation in H^1. *Stochastic Analysis and Applications*, **21**, 97-126. https://doi.org/10.1081/SAP-120017534

[10] Brzeźniak, Z. and Millet, A. (2014) On the Stochastic Strichartz Estimates and the Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation on a Compact Riemannian Manifold. *Potential Analysis*, **41**, 269-315. https://doi.org/10.1007/s11118-013-9369-2

[11] Brzeźniak, Z. and Manna, U. (2019) Stochastic Landau-Lifshitz-Gilbert Equation with Anisotropy Energy Driven by Pure Jump Noise. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 1503-1512. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.009

[12] Marcus, S. (1978) Modeling and Analysis of Stochastic Differential Equations Driven by Point Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **24**, 164-172. https://doi.org/10.1109/TIT.1978.1055857

[13] Brzeźniak, Z. and Manna, U. (2019) Weak Solutions of a Stochastic Landau-Lifshitz-Gilbert Equation Driven by Pure Jump Noise. *Communications in Mathematical Physics*, **371**, 1071-1129. https://doi.org/10.1007/s00220-019-03359-x

[14] Brzeźniak, Z., Liu, W. and Zhu, J. (2021) The Stochastic Strichartz Estimates and Stochastic Nonlinear Schrödinger Equations Driven by Levy Noise. *Journal of Functional Analysis*, **281**, Article ID: 109021. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109021

[15] Zhu, J., Brzezniak, Z. and Liu, W. (2019) Maximal Inequalities and Exponential Estimates for Stochastic Convolutions Driven by Lévy-Type Processes in Banach Spaces with Application to Stochastic Quasi-Geostrophic Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **51**, 2121-2167. https://doi.org/10.1137/18M1169011