

# The Research of Taxi Resources Allocation in the “Internet+” Era

Tao Xu<sup>1</sup>, Wen Chao<sup>2</sup>, Jiwen Shi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

<sup>2</sup>School of Electronic and Information Engineering, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Email: ataoweida@163.com, cyc\_mm@163.com

Received: Dec. 10<sup>th</sup>, 2015; accepted: Dec. 27<sup>th</sup>, 2015; published: Dec. 30<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

In this paper, the indexes affecting the supply and demand of taxi are determined by the factor analysis. Through principal component analysis, variance analysis to judge the degree of impact of index and the use of regression analysis to evaluate the effectiveness of taxi subsidy scheme, then make the conclusion that the taxi subsidy scheme of company has a positive role in increasing taxi supply and alleviating the phenomenon of difficult to take a taxi. Furthermore, by establishing differential equation model, a new taxi subsidy scheme is put forward and its evaluation and optimization are carried out. The model in the paper is used to predict and test the supply and demand situation of the taxi, and provide scientific suggestions and theoretical guidance for the taxi resource allocation in the “Internet +” era.

## Keywords

Factor Analysis, Principal Component Analysis, Variance Analysis, Regression Analysis

---

# “互联网+”时代的出租车资源配置的研究

许涛<sup>1</sup>, 晁雯<sup>2</sup>, 史继文<sup>2</sup>

<sup>1</sup>内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

<sup>2</sup>内蒙古大学电子信息工程学院, 内蒙古 呼和浩特

Email: ataoweida@163.com, cyc\_mm@163.com

收稿日期: 2015年12月10日; 录用日期: 2015年12月27日; 发布日期: 2015年12月30日

## 摘要

本文主要通过因子分析,确定了影响出租车供需关系的指标;通过主成分分析、方差分析判断指标的影响程度以及运用回归分析评价出租车补贴方案的效力,得出各公司的出租车补贴方案对增加出租车供给量、缓解“打车难”有积极作用的结论。此外,通过建立微分方程模型提出新的出租车补贴方案并对其进行优化。运用本文所运用的各统计学模型对出租车供需情况进行预测和检验,并且为“互联网+”时代的出租车资源配置提供了科学性建议和理论性指导。

## 关键词

因子分析,主成分分析,方差分析,回归分析

## 1. 引言

随着社会经济的发展和人民生活水平的提高,出租车越来越受到出行者的青睐,原因是出租车能够充分根据乘客需要,提供灵活、方便、直达的运输服务,并可以很好的满足人们的专有乘车空间和隐私要求。出租汽车有各种不同的车型,可根据客流在时间上和空间上的不同分布,提供灵活、即时的客运服务,这决定了它是城市客运系统中不可缺少的客运方式之一[1]。

近年来,越来越多的城市出现了“打车难”这一局面,这主要是出租车市场供求失衡的原因。随着“互联网+”时代的来临,许多公司依托移动互联网建立了打车软件服务平台,实现了乘客与出租车司机的信息互通,使出租车行业更加一体化。同时各公司推出了多种出租车补贴方案,这在一定程度上提高了司机的工作积极性,推动了出租车行业的飞速发展。滴滴打车和快的打车两个软件,作为国内打车软件成功的代表,展开了多次补贴大战,更加剧了“打车难”现象的严重程度。现在,两个打车软件公司为了节约成本、提升市场议价权,逐步走向合作的道路。在后补贴时代,打车软件仅仅一个打车功能显然无以为继。只有各出租车公司采取合理有效的补贴方案,政府相关部门对出租车资源进行合理配置,才能有效地缓解“打车难”现象。

## 2. 衡量出租车供求的四大指标[2]

为方便研究,现采用表1中符号表示。通过SPSS,将出租车供给量和需求量分别作为因子1和因子2进行分析,并将因子载荷矩阵进行方差最大法旋转,得到旋转后的因子载荷矩阵见表2。分别从因子1和因子2的载荷矩阵中选出载荷处于前四位的因素作为主要研究对象,可以看出,因子1和因子2均与 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\delta$ 、 $\gamma$ 有较强的相关性。因此,影响供求匹配的主要因素是:里程利用率 $\alpha$ 、车辆满载率 $\beta$ 、万人拥有量 $\gamma$ 和出租车运营率 $\delta$ 。

里程利用率:运营载客里程与行驶里程之比,一般以一辆车为单位,公式为:

$$\alpha = L/L_m \times 100\% \quad (1)$$

车辆满载率:单位时间通过道路的载有乘客的出租车数量占总通过出租车数量的比,公式为:

$$\beta = n/n_m \times 100\% \quad (2)$$

万人拥有量:是人均设备普指标,用来描述一定城市规模内车辆的占有量,公式为:

$$\gamma = N_m/N \quad (3)$$

Table 1. Symbol description

表 1. 符号说明

符号	含义	符号	含义
$\alpha$	里程利用率	$\gamma$	万人拥有量(辆/万人)
$L$	运营载客里程(公里)	$N_m$	出租车总量(辆)
$L_m$	行驶里程(公里)	$N$	人口规模(万人)
$\beta$	车辆满载率	$\delta$	出租车运营率
$n$	载客车数辆	$N_t$	出租车真正运营量(辆)
$n_m$	总通过车数辆	$\gamma_s$	实际万人拥有量(辆/万人)
$\tau$	燃油价格	$\kappa$	城市交通基础设施

Table 2. Factor loading matrix

表 2. 因子载荷矩阵

	因子 1	因子 2
$\alpha$	0.962	0.958
$\beta$	0.924	0.930
$\gamma$	0.524	0.531
$\tau$	0.506	0.012
$\delta$	0.854	0.886
$\kappa$	0.027	0.474

出租车运营率：出租车真正运营的数量与出租车总量之比，一般以一个城市为单位，公式为：

$$\delta = N_t / N_m \times 100\% \quad (4)$$

### 3. 现有出租车补贴方案的统计分析

#### 3.1. 主成分分析[3]

##### 1) 标准化处理

进行主成分分析的指标变量有 4 个： $x_1, x_2, x_3, x_4$ ，评价对象共有  $n$  个 ( $n=10$ )，第  $i$  个评价对象的第  $j$  个指标的取值为  $a_{ij}$ 。将各指标值  $a_{ij}$  转换成标准化指标  $\tilde{a}_{ij}$ ，

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - \mu_j}{s_j}, \quad (i=1, 2, \dots, 10; j=1, 2, 3) \quad (5)$$

其中

$$\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad s_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_{ij} - \mu_j)^2, \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

##### 2) 计算相关系数矩阵

相关系数矩阵  $R = (r_{ij})_{3 \times 3}$

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ki} \cdot \tilde{a}_{kj}}{n-1}, \quad (i, j=1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

式中  $r_{ii} = 1$ ,  $r_{ij} = r_{ji}$ ,  $r_{ij}$  是第  $i$  个指标与第  $j$  个指标的相关系数。

3) 计算特征值和特征向量

相关系数矩阵  $R$  的特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$ , 及对应的特征向量  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ , 其中  $\mu_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \mu_{3j}, \mu_{4j})^T$ , 由特征向量组成 4 个新的指标变量

$$\begin{cases} y_1 = \mu_{11}\tilde{x}_1 + \mu_{21}\tilde{x}_2 + \mu_{31}\tilde{x}_3 \\ y_2 = \mu_{12}\tilde{x}_1 + \mu_{22}\tilde{x}_2 + \mu_{32}\tilde{x}_3 \\ y_3 = \mu_{13}\tilde{x}_1 + \mu_{23}\tilde{x}_2 + \mu_{33}\tilde{x}_3 \\ y_4 = \mu_{14}\tilde{x}_1 + \mu_{24}\tilde{x}_2 + \mu_{33}\tilde{x}_3 \end{cases} \quad (7)$$

4) 计算综合评价值

计算特征值  $\lambda_j (j=1,2,3,4)$  的信息贡献率和累计贡献率。称  $b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^4 \lambda_k} (j=1,2,3,4)$  为主成分  $y_j$  的

信息贡献率;  $\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^p \lambda_k}{\sum_{k=1}^4 \lambda_k}$  为主成分  $y_1, y_2, \dots, y_p$  的累计贡献率。以上海市为代表, 搜集相关数据, 得到补贴前、后四个评价指标的计算结果见表 3。

利用 SPSS 软件, 对四个评价指标进行主成分分析, 分别得出补贴前、后相关系数矩阵的四个特征根、贡献率以及累计贡献率见表 4。

通过分析表 4 可以发现, 补贴前、后,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\delta$  特征根的累计贡献率都达到 80% 以上, 主成分分析效果可以接受; 补贴前、后,  $\gamma$  的累计贡献率低于 80%, 未能达到主成分的要求。

运用公式

$$Z = \sum_{j=1}^p b_j y_j \quad (8)$$

计算综合得分值, 得到补贴前、后的综合评价方程见表 5。

**Table 3.** Calculation results of the evaluation index before and after subsidy  
**表 3.** 补贴前、后四个评价指标的计算结果

	补贴前	补贴后
$\alpha$	72.4%	79.1%
$\beta$	89.2%	92.4%
$\gamma$	20.86	25.97
$\delta$	81.3%	88.9%

**Table 4.** Calculation results of principal component analysis before and after subsidy  
**表 4.** 补贴前、后主成分分析的计算结果

	特征根		贡献率		累计贡献率	
	补贴前	补贴后	补贴前	补贴后	补贴前	补贴后
$\alpha$	1.4456	1.5668	50.3698	52.2252	84.1697	85.2252
$\beta$	1.3921	1.4961	52.5565	56.4035	85.1348	86.6287
$\gamma$	1.1411	1.1487	41.3713	46.3713	74.6984	76.1646
$\delta$	1.6984	1.8752	59.6379	60.9476	86.8765	87.6446

**Table 5.** Comprehensive evaluation equation before and after the subsidy  
**表 5.** 补贴前、后的综合评价方程

补贴前	$Z = 0.4721 + 0.2312 + 0.4258$
补贴后	$Z = 0.7010 + 0.2818 + 0.5896$

### 3.2. 方差分析

因子  $A$  有两个不同的水平  $A_1, A_2$ , 在  $A_i$  水平下的试验结果  $Y_i$  服从分布  $N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $i=1, 2$ , 且  $Y_1, Y_2$  间相互独立。现在在  $A_i$  水平下搜集到的 10 组数据  $y_{ij}$ , 可以看成是取自  $Y_{ij}$  的一个容量为 10 的子样。假定  $y_{ij}$  具有下述数据结构式

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2, \dots, 10 \quad (9)$$

其中  $\varepsilon_{ij}$  相互独立, 均服从  $N(0, \sigma^2)$ , 要检验的假设是

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

单因子方差分析的模型可以表示成:

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} + \tau_i \\ \tau_1 + \tau_2 = 0 \\ \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立且均服从 } N(0, \sigma^2) \text{ 分布} \end{cases}$$

另外, 又有

$$\begin{cases} S_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{10} y_{ij}^2 - n\bar{y}^2 \\ S_A = \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{y}_i^2}{t} - n\bar{y}^2 \\ S_e = S_T - S_A \end{cases} \quad (10)$$

按显著性假设检验程序, 对给定的显著性水平  $\tau$ , 当

$$F = \frac{S_A / (r-1)}{S_e / (n-r)} \geq F_{1-\tau}(r-1, n-r) \quad (11)$$

时拒绝  $H_0$ , 并认为各水平的效应在显著性水平下  $\tau$  有一定差异。

方差分析一般用到的显著性水平是: 取  $\tau = 0.01$ , 拒绝  $H_0$ , 称因子  $A$  的影响非常显著; 取  $\tau = 0.01$ , 不拒绝  $H_0$ , 取  $\tau = 0.05$ , 拒绝  $H_0$ , 称因子  $A$  的影响显著; 取  $\tau = 0.05$ , 不拒绝  $H_0$ , 称因子  $A$  的影响不显著。经过计算, 得到四个指标的影响评价见表 6。

分析可得, 在补贴前、后, 里程利用率、车辆满载率变化非常显著, 出租车运营率变化显著, 万人拥有量变化不显著。

### 3.3. 回归分析

在 3.1 与 3.2 的分析中, 万人拥有量既不是影响供给量的主要成分, 也未在补贴前、后造成显著性差异, 因此在回归分析中不再考虑万人拥有量, 只考虑里程利用率、车辆满载率、出租车运营率。

补贴前的  $n$  组数据  $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ , 可以写成一个  $n \times 3$  维的矩阵

**Table 6. Impact assessment of four indicators**  
**表 6. 四个指标的影响评价表**

指标	F 取值	影响
$\alpha$	$F = 0.0382 > 0.01$	非常显著
$\beta$	$F = 0.0450 > 0.01$	非常显著
$\gamma$	$F = 0.00972 < 0.01$	不显著
$\delta$	$0.01 < F = 0.0108 < 0.05$	显著

$$X = (x_{ij})_{n \times 3} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} \quad (12)$$

样本的均值为

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^T, \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_i x_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \quad (13)$$

样本协方差矩阵及样本相关系数矩阵分别为

$$C_1 = (t_{ij})_{m \times m} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (e_k - \bar{x})(e_k - \bar{x})^T \quad (14)$$

$$C_2 = (r_{ij})_{m \times m} = \left( \frac{t_{ij}}{\sqrt{t_{ii} t_{jj}}} \right) \quad (15)$$

其中

$$t_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j) \quad (16)$$

对数据进行标准化处理，即对数据同时进行中心化与压缩处理：

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

多元线性回归的统计模型为：

$$\begin{cases} y = \theta_0 + \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \theta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (18)$$

记

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)^T, \theta = (\theta_0 \theta_1 \theta_2 \theta_3)^T$$

则(18)可以表示为

$$\begin{cases} y = X\theta + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_N) \end{cases} \quad (19)$$

用最小二乘法估计参数  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ , 即选取估计值  $\hat{\theta}_j$ , 当  $\theta_j = \hat{\theta}_j$  时, 误差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_{i1} - \theta_2 x_{i2} - \theta_3 x_{i3})^2 \quad (20)$$

达到最小。为此, 令

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 10$$

经整理化为以下正规方程组

$$\begin{cases} \theta_0 + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \theta_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \theta_3 \sum_{i=1}^n x_{i3} = \sum_{i=1}^n y_i \\ \theta_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + \theta_2 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} + \theta_3 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i3} = \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \\ \vdots \\ \theta_0 \sum_{i=1}^n x_{i3} + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i3} + \theta_2 \sum_{i=1}^n x_{i3} x_{i2} + \theta_3 \sum_{i=1}^n x_{i3}^2 = \sum_{i=1}^n x_{i3} y_i \end{cases} \quad (21)$$

正规方程组的矩阵形式为

$$X^T X \theta = X^T Y \quad (22)$$

当矩阵  $X$  列满秩时,  $X^T X$  为可逆方阵, (22)式解为

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (23)$$

将  $\hat{\beta}$  代回原模型得到  $y$  的估计值

$$\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x_1 + \hat{\theta}_2 x_2 + \hat{\theta}_3 x_3 \quad (24)$$

运用 MATLAB 软件, 计算  $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ , 得到的补贴前、后的参数值见表 7。

则用回归分析得到的补贴前、后的回归方程见表 8。

运用 MATLAB, 将补贴前、后的方程做成图像见图 1, 其中用颜色的深浅表示出租车供给量的多少。

在补贴前、后的两组图像中, 同一坐标下的立方块颜色不同, 并且补贴后图像的颜色明显深于补贴前图像的颜色。由此可以说明, 在补贴前、后, 出租车供给量发生了变化, 并且补贴后的供给量明显多于补贴前。因此, 打车软件对出租车的补贴方案起到了积极作用, 这在一定程度上可以缓解“打车难”。

## 4. 新补贴方案的设计

### 4.1. 新补贴方案的给出

为方便研究, 现采用表 9 中的符号表示。假设每辆出租车的经营总成本都是相同的, 并且不考虑可

Table 7. Parameter values before and after subsidy

表 7. 补贴前、后的参数值

	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
补贴前	-0.0036271	-0.095196	-0.074045	3.0254
补贴后	0.0097793	1.6775	1.745	8.0587

Table 8. The regression equation before and after subsidy

表 8. 补贴前、后的回归方程

补贴前	$y = -0.0036271 - 0.095196x_1 - 0.074045x_2 + 3.0254x_3$
补贴后	$y = 0.0097793 + 1.6775x_1 + 1.745x_2 + 8.0587x_3$

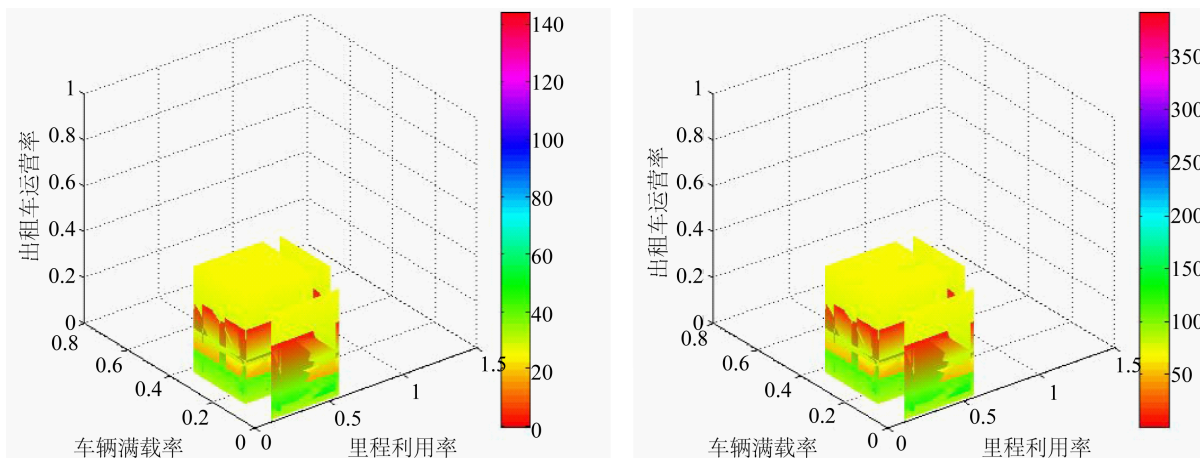


Figure 1. Function image of equation before and after subsidy  
图 1. 补贴前、后方程的函数图像

Table 9. Symbol description  
表 9. 符号说明

符号	代表含义	符号	代表含义
$P$	出租车平均运价(元/次)	$\varphi$	乘客乘车的单位时间价值(元/小时)
$P_0$	出租车起步价(元/次)	$\psi$	乘客等车的单位时间价值(元/小时)
$P_1$	出租车里程价(元/公里)	$R$	出租车经营者的收入(元)
$d_0$	出租车起步价里程(公里)	$C$	出租车经营者的成本(元)
$T$	出租车乘客的平均乘车时间(小时)	$c$	每辆出租车单位时间经营总成本
$W$	出租车乘客平均等待时间(小时)	$c_0$	每辆出租车单位时间经营固定成本
$v$	出租车平均行驶速度(公里/小时)	$B$	出租车经营者的理论利润(元)
$\eta$	出租车乘客等待时间系数(车·小时)	$B_0$	出租车经营者的理论利润(元)
$Q$	乘客的出行需求(次/小时)	$\xi$	针对乘车时间与利润关系的修正系数
$\bar{Q}$	乘客的潜在出行需求(次/小时)	$\zeta$	针对等车时间与利润关系的修正系数
$\mu$	出租车出行需求的弹性系数	$E$	对出租车经营者的最少补贴金额(元)

变成本(如燃油费的变化、出租车日常维修等因素)。

出租车的运价可表示为:

$$P = P_0 + P_1(L - d_0) \tag{25}$$

结合里程利用率与乘车距离的关系:

$$\alpha = L/L_m \times 100\%$$

因此运价  $P$  与里程利用率  $\alpha$  成正比例关系。

出租车乘客的乘车时间越长,说明出租车被占用的时间越长,故出租车乘客的平均乘车时间  $T$  与车辆满载率  $\beta$  成正比例关系。出租车乘客的平均等待时间越长,说明当时运营的出租车数量越少,故出租车乘客的平均等待时间  $W$  与出租车运营率之间  $\delta(0 < \delta < 1)$  成反比例关系。

由公式  $\gamma = N_m/N$  可知,出租车总量与万人拥有量成正比例关系。根据文献[4]出租车乘客的出行需



求可以表示为

$$f = Q(P, T, W) \quad (26)$$

乘客的乘车时间与等待时间受其他因素的影响, 在给定的城市路线网中, 在出租车的行驶距离一定的情况下, 乘车时间与出租车的平均行驶速度有如下关系:

$$T = \frac{L}{v}$$

等车时间与各变量之间的关系为:

$$W = \frac{\eta}{N_m - QT} \quad (27)$$

根据文献[4]出租车乘客的出行需求可以表示为:

$$Q = \bar{Q} \exp[-\mu(P + \varphi T + \psi W)] = \bar{Q} \exp\left[-\mu\left(P + \varphi T + \psi \frac{\eta}{N_m - QT}\right)\right] \quad (28)$$

出租车的经营收入在没有任何补贴的前提下完全来源于出租车运价收费, 即出租车需求量与每次乘车票价的乘积, 因此, 出租车经营者的收入可以表示为

$$R = PQ \quad (29)$$

因为假设每辆出租车的经营成本都是相同的, 所以, 出租车经营者的成本可以表示为

$$C = cN_m \quad (30)$$

由此可得出出租车经营者的利润为

$$B = R - C = PQ - cN_m \quad (31)$$

对  $B$  求  $P$  的偏导数来判断里程利用率对出租车利润的影响:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial P} &= \frac{\partial(PQ)}{\partial P} = Q + P \frac{\partial Q}{\partial P} = Q - P \frac{\mu Q (N_m - QT)^2}{(N_m - QT)^2 + \mu \psi \eta QT} \\ &= Q \left( 1 - \frac{\mu P (N_m - QT)^2}{(N_m - QT)^2 + \mu \psi \eta QT} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

当  $\frac{\partial B}{\partial P} > 0$ , 即  $P < \frac{1}{\mu} + \frac{\psi \eta QT}{(N_m - QT)^2}$ , 出租车运营利润随着运价的增加而增加, 又因为运价和里程利

用率成正比, 所以里程利用率的增加对出租车运营利润的获得产生积极的影响; 当  $P < \frac{1}{\mu} + \frac{\psi \eta QT}{(N_m - QT)^2}$  时,

里程利用率的增加对出租车运营利润的获得产生消极的影响, 为满足乘客的出行需求, 最少补贴值应该为

$$E_1 = B_0 - B_{P = \frac{1}{\mu} + \frac{\psi \eta QT}{(N_m - QT)^2}}$$

对  $B$  求  $T$  的偏导数来判断车辆满载率对出租车利润的影响:

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{\partial(PQ)}{\partial T} = Q \frac{\partial P}{\partial T} + P \frac{\partial Q}{\partial T} = -P \frac{\mu \varphi Q (N_m - QT)^2 + \mu \psi \eta Q^2}{Q (N_m - QT)^2 + \mu \psi \eta QT} < 0 \quad (33)$$

$\frac{\partial B}{\partial T} < 0$  说明乘客的平均乘车时间对出租车利润有负的影响, 这是因为, 乘客的平均乘车时间越长, 车辆满载率越高, 其他等待出行的人对出租车的需求会逐渐减少, 从而造成出租车利润降低。现对公式 (31) 进行修正, 修正后的利润为:

$$B = R - C = PQ - cN_m + \xi(T) \quad (34)$$

其中

$$\xi(T) = \int \frac{2P\mu\psi\eta Q^2}{Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta QT} dT$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T} &= Q \frac{\partial P}{\partial T} + P \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\partial \xi}{\partial T} \\ &= -P \frac{\mu\phi Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta Q^2}{Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta QT} + \frac{2P\mu\psi\eta Q^2}{Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta QT} \\ &= \frac{-P\mu\phi Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta Q^2}{Q(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta QT} \end{aligned} \quad (35)$$

当  $\frac{\partial R}{\partial T} > 0$ , 即  $T > \frac{N_m}{Q} - \sqrt{\frac{\psi\eta}{Q^2\phi}}$ , 出租车运营利润随着乘车时间的增加而增加, 又因为运乘车时间和

车辆满载率成正比, 所以车辆满载率的增加对出租车运营利润的获得产生积极的影响; 当  $T < \frac{N_m}{Q} - \sqrt{\frac{\psi\eta}{Q^2\phi}}$  时, 车辆满载率的增加对出租车运营利润的获得产生消极的影响, 这是违背常理的一个结论, 但是在特定情况下有一定的机率发生, 此时应该对出租车行业给予补贴, 最少补贴值为:

$$E_2 = B_0 - B_{T = \frac{N_m}{Q} - \sqrt{\frac{\psi\eta}{Q^2\phi}}}$$

对  $B$  求  $N_m$  的偏导数以判断万人拥有量对出租车利润的影响:

$$\frac{\partial B}{\partial N_m} = \frac{\partial(PQ)}{\partial N_m} = P \frac{\partial Q}{\partial N_m} - c = P \frac{\mu\psi\eta QT}{(N_m - QT)^2 + \mu\psi\eta QT} - c \quad (36)$$

出租车数量对出租车利润的影响依赖于其他变量, 因为万人拥有量无法确定, 故无法判断补贴的多少。

对  $B$  求  $W$  的偏导数以判断出租车运营率对出租车利润的影响:

$$\frac{\partial B}{\partial W} = \frac{\partial(PQ)}{\partial W} = P \frac{\partial Q}{\partial W} = -\mu\psi PQ < 0 \quad (37)$$

$\frac{\partial B}{\partial W} < 0$  说明乘客的等待时间对出租车利润有负的影响, 这是因为, 乘客的等待时间越长, 运营的出租车数量越少, 因此出租车获得的总利润也就越少。现对公式 (34) 进行修正, 修正后的利润为:

$$B = R - C = PQ - cN_m + \zeta(W) \quad (38)$$

其中

$$\zeta(W) = \int \frac{\psi}{e^\phi} W dW$$

那么

$$\frac{\partial B}{\partial W} = P \frac{\partial Q}{\partial W} - \frac{\partial \zeta}{\partial W} = -\mu\psi PQ + \frac{\psi}{e^{\rho}} W \quad (39)$$

当  $\frac{\partial B}{\partial W} < 0$ ，即  $W < \mu PQe^{\rho}$ ，出租车运营利润随着等车时间的增加而减少，又因为等车时间和出租车运营率成反比，所以此时出租车运营率的增加对出租车运营利润的获得产生积极的影响；当  $W > \mu PQe^{\rho}$  时，出租车运营率的增加对出租车运营利润的获得产生消极的影响，这是违背常理的一个结论，但是在特定情况下有一定的机率发生，此时应该对出租车行业给予补贴，最少补贴值应该为

$$E_3 = B_0 - B_{W=\mu PQe^{\rho}}$$

综上所述，对出租车补贴值的多少直接依赖于出租车运价、乘客等车时间和乘客的等车时间，即依赖于里程利用率  $\alpha$ 、车辆满载率  $\beta$  和出租车运营率  $\delta$ 。

令  $p = \frac{1}{\mu} + \frac{\psi\eta QT}{(N_m - QT)^2}$ ， $t = \frac{N_m}{Q} - \sqrt{\frac{\psi\eta}{Q^2\varphi}}$ ， $w = \mu PQe^{\rho}$ ，则各种情况下的补贴值见表 10。

### 4.2. 新补贴方案的论证

经过搜集相关资料得到 2013 年打车软件未实行补贴的数据以及 2014 年 1 月到 8 月打车软件实行补贴的数据和 9 月到 12 月停止补贴的数据。利用 MATLAB，将里程利用率这一因素的变化用图像表示，见图 2。

由图 2 可知，补贴方案的实行对里程利用率的提高起了非常显著的作用，虽然增长率比原补贴方案增长率低，但里程利用率能够一直保持上升或持平趋势。运用相同的方法对车辆满载率、出租车运营率进行分析，发现在新的补贴方案下，车辆满载率与出租车运营率均得到了提高。由此论证新的补贴方案具有有效性与合理性。

### 4.3. 新补贴方案的改进

为方便研究，现采用表 11 中的符号表示。参考文献[4]，发现在燃油价格变化的情况下，实际情况是政府会限制出租车运价和出租车总数，出租车的经营成本可表示为：

$$C = cN_m = (c_0 + \lambda vx)N_m \quad (40)$$

出租车经营者的利润模型可表示为：

**Table 10. Subsidies for various conditions**  
**表 10. 各种情况下的补贴值**

$P$	$T$	$W$	补贴值
$P > p$	$T < t$	$W > w$	$E_1 + E_2 + E_3$
$P > p$	$T < t$	$W < w$	$E_1 + E_2$
$P < p$	$T < t$	$W > w$	$E_2 + E_3$
$P > p$	$T > t$	$W > w$	$E_1 + E_3$
$P > p$	$T > t$	$W < w$	$E_1$
$P < p$	$T < t$	$W < w$	$E_2$
$P < p$	$T > t$	$W > w$	$E_3$

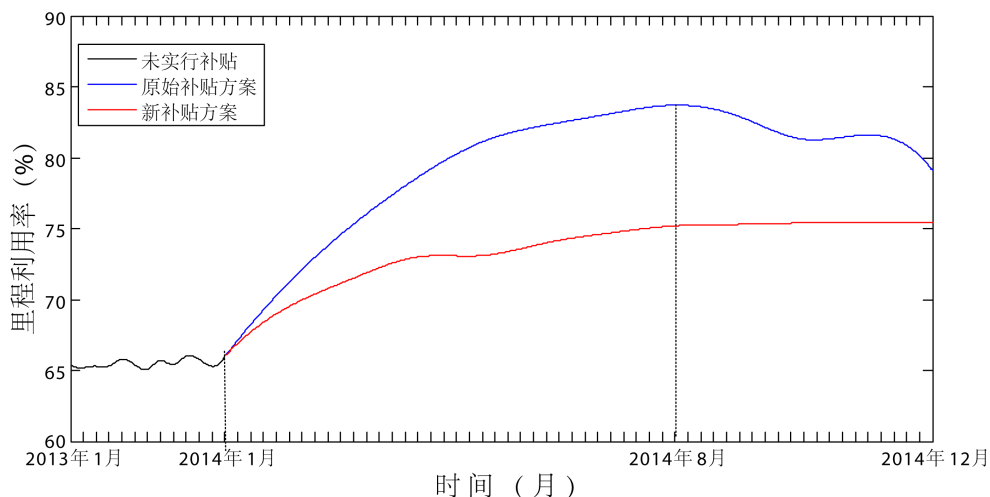


Figure 2. The changing image of mileage utilization

图 2. 里程利用率的变化图像

Table 11. Symbol description

表 11. 符号说明

符号	代表含义
$\lambda$	出租车平均里程油耗(升/千米)
$x$	燃油价格(元/升)
$P_F$	政府管制下的出租车平均运价(元/次)
$N_{MF}$	政府管制下的出租车数量(辆)
$B_1$ 、 $B_2$	燃油价格变化前、后出租车经营实际利润(元)
$B_{M1}$ 、 $B_{M2}$	燃油价格变化前、后出租车经营期望最大利润(元)
$B_3$	出租车运价和数量不变时的出租车经营的实际利润(元)
$A$	政府对出租车经营的补贴金额(元)
$x_1$ 、 $x_2$	变化之前、变化之后的燃油价格(元/升)
$\Delta x$	燃油价格变化量(元/升)
$e$	出租车经营利润变化率
$\omega$	比例系数( $\omega \geq 0$ )

$$B = PQ - (c_0 + \lambda vx) N_m \tag{41}$$

$$Q = \bar{Q} \exp \left[ -\mu \left( P + \varphi T + \psi \frac{\eta}{N_m - QT} \right) \right]$$

$$N_m - QT > 0$$

$$P = P_F$$

$$N_M = N_{MF}$$

出租车经营实际利润与其期望最大利润之比反映了出租车行业经营利润的合理水平。那么

$$\frac{B_1}{B_{M1}} = \frac{B_2}{B_{M2}} \quad (42)$$

因此, 燃油价格变化之后的出租车经营合理利润值为

$$B_2 = \frac{B_1}{B_{M1}} B_{M2} \quad (43)$$

在政府管制下, 出租车运价和车辆数量不变时, 政府对出租车经营的补贴金额为

$$A = B_2 - B_3 \quad (44)$$

当燃油价格上涨时, 政府补贴金额  $A$  为正值, 说明由于政府政策管制导致出租车经营利润低于合理水平, 政府需要给予一定的财政补贴; 当燃油价格下降时, 政府补贴金额  $A$  为负值, 说明出租车经营利润高于其合理水平, 政府应该提高出租车经营税费水平, 限制出租车经营利润过高。

根据资料显示, 政府主要是根据燃油价格的变化率来制定补贴方案。燃油价格变化率可表示为

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \quad (45)$$

假设油价变化后, 出租车经营的利润变化率与燃油价格变化率成正比, 则有

$$e = -\omega\varepsilon = -\omega \frac{\Delta x}{x_1} \quad (46)$$

在式中,  $\omega$  反映了出租车经营者承担油价变化的压力的大小; 负号表示出租车经营的利润变化率与燃油价格变化率成反方向变化, 即油价上涨, 出租车利润应该下降; 油价下降, 出租车利润应该上升。

因此, 燃油价格变化后, 出租车经营者的合理利润为

$$B_2 = (1 + e) B_1 = \left(1 - \omega \frac{\Delta x}{x_1}\right) B_1 \quad (47)$$

在政府管制且不给予补贴情况下, 燃油价格变化前后的出租车经营实际利润的表达式分别为

$$B_1 = PQ - (c_0 + \lambda v x_1) N \quad (48)$$

$$B_3 = PQ - (c_0 + \lambda v x_2) N \quad (49)$$

那么, 政府需要给予出租车经营者的补贴金额为:

$$A = B_2 - B_3 = \left(1 - \omega \frac{\Delta x}{x_1}\right) [PQ - (c_0 + \lambda v x_1) N] - [PQ - (c_0 + \lambda v x_2) N] \quad (50)$$

化简可得

$$A = \lambda v N \Delta x - \omega \frac{\Delta x}{x_1} [PQ - (c_0 + \lambda v x_1) N] \quad (51)$$

## 5. “互联网+”时代出租车资源配置与补贴的建议

### 5.1. 出租车资源配置的建议

- 1) 合理配置出租车的运营位置, 缓解不同地区“打车难”现状。
- 2) 理顺利益分配机制, 逐步放开垄断经营[5]。
- 3) 适度引入竞争和激励机制, 提高出租车市场资源配置的效率[6]。

4) 适当限制高峰期社会车辆, 增加出租车的运营率。

## 5.2. 出租车补贴的建议

- 1) 打车软件对出租车的补贴制度合理化, 公司之间切忌恶性竞争。
- 2) 政府真正落实对出租车的燃油补贴制度, 进一步完善出租车运价和油价联动机制。

## 致 谢

本文是在内蒙古大学数学科学学院赵金星老师细心指导和建议下完成的, 在此对赵金星老师表示衷心的感谢。

## 参考文献 (References)

- [1] 李明捷. 基于供需平衡的出租汽车合理规模研究[D]. 西安: 长安大学, 2007.
- [2] 冯晓梅. 供需平衡状态下的出租车发展规模研究[D]. 成都: 西南交通大学.
- [3] 林海明, 杜子芳. 主成分分析综合评价应该注意的问题[J]. 统计研究, 2013(8): 25-31.
- [4] 何建平. 基于燃油价格变化的城市客运出租车补贴研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- [5] 王虎军. 行业管制下分时段大城市出租车供需关系研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2007.
- [6] 董立龙. 呼唤多管齐下破解“打车难”[N]. 河北日报, 2013.