Statistics and Application 统计学与应用, 2016, 5(2), 179-195
Published Online June 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2016.52018

The Comparison of Optimal Retention for a Loss-Stop Reinsurance with Variance Related Premium Principles under the VaR and CTE Risk Measures

Bo Yang, Lijun Wu*

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: 15026091410@163.com, *xjmath@xju.edu.cn

Received: Jun. 10th, 2016; accepted: Jun. 25th, 2016; published: Jun. 30th, 2016

Abstract

This paper considers both the existence and the analytical solution expression of optimal retention for stop-loss reinsurance model based on VaR and CTE, respectively. It is supposed that the aggregate loss X has an exponential distribution, and then the existence of the solution for retention under several premium principles with different premium additional factors is compared by the numerical simulation. The following result is obtained: CTE is superior to VaR for the existence of retention under three kinds of variance related premium principles.

Keywords

VaR (Value-at-Loss), CTE (Conditional Tail Expectation), Stop-Loss Reinsurance, Variance Related Premium Principles, Retention

方差相关保费原理下基于VaR和CTE下停止－损失再保险的最优自留额比较研究

杨　博，吴黎军*

新疆大学数学与系统科学学院，新疆　乌鲁木齐

*通讯作者。

文章引用: 杨博, 吴黎军. 方差相关保费原理下基于 VaR 和 CTE 下停止－损失再保险的最优自留额比较研究[J]. 统计学与应用, 2016, 5(2): 179-195. http://dx.doi.org/10.12677/sa.2016.52018

Email: 15026091410@163.com, *xjmath@xju.edu.cn

收稿日期：2016年6月10日；录用日期：2016年6月25日；发布日期：2016年6月30日

摘　要

本文对停止－损失再保险模型，给出风险度量VaR和CTE值下最优自留额的存在性及解析解表达式。假设损失总量X服从指数分布，并给定几种不同的保费附加因子，通过数值模拟，比较三种方差相关保费原理下自留额解的存在性。比较得出：在三种方差相关保费原理下，CTE下自留额的存在性均优于VaR。

关键词

VaR，CTE，停止－损失再保险，方差相关保费原理，自留额

1. 引言

1.1. 研究背景和研究意义

近年来，一种新的风险管理[1]方法 VaR (在险价值)得到了世界各主要银行、投资公司、企业及金融监管机构的支持和认可。第一次提及“在险价值”这一专业术语的是 20 世纪 80 年代的 J.P.摩根银行的 Till Goldimann，他认为价值风险比收益风险重要的多。VaR 最终在 1993 年提出，自提出以来得到了迅速的发展，目前，已经成为金融机构度量金融风险的标准方法，如巴塞尔协议(Basel accord)和欧盟资本充足率指导(EU capital adequacy directive)都已经使用 VaR 作为监督标准。金融风险的出现有很多方面的原因，诸如利率、汇率、股票或商品价格的上调、下跌都会引起金融风险的出现。VaR 的最大优点在于：无论金融风险的根源在哪个市场，VaR 模型都可以用一个数值表示未来市场的损失。

VaR 风险度量评估了“最坏情况”的损失，但它并没有考虑当最大损失发生时损失的大小。

针对 VaR 的缺点，Urysasev 与 Rockafellar 于 1999 提出一种 VaR 的修正方案：条件风险值 C-VaR(又被称为 CTE，条件尾部均值)。VaR 是指金融资产或证券组合在一定置信水平下和持有期限内预期的最大可能损失值，而 CTE 是指损失额超过 VaR 部分的期望值，它具有 VaR 的优点，同时在理论上又具有良好的性质，是一致风险度量。Cai J. (2007, 2008) [2] [3]用期望保费原理计算停止－损失再保险的最优自留额并进行了推广。

本文是在 Cai J. (2007) [2]的基础上，假设损失总量 X 服从指数分布，将保费原理由原来的期望保费原理修改为三种与方差相关保费原理，即：方差原理、标准差原理和混合方差原理，分别得出三种保费原理下最优自留额解的表达式，并对三种方差保费原理下最优自留额的存在性进行研究。

1.2. 基本概念

再保险是保险人将部分风险转移给再保险人，然后支付一定的再保险费用，起到转移风险的作用。再保险可以减少保险人承担的风险并对风险进行更加有效的管理。常见的再保险有：停止－损失再保险、超额－损失再保险和比例再保险。并且对于不同的保费原理，停止－损失再保险的分出风险也是不同的。这篇文章在三种方差相关保费原理下，分别运用 VaR 和 CTE 研究停止－损失再保险最优自留额的存在性问题。

令 X 为一个保险合约或保险人的损失。我们假定 X 的累积分布函数为 $F_X(x)=\Pr\{X\le x\}$，生存函数为 $S_X(x)=\Pr\{X>x\}$，且均值 $E(X)>0$。进一步，分别令 X_I、X_R 表示保险公司的自留风险和保险公司分给再保险公司的风险，其中 X_R 也称为分出风险或再保险公司的自留风险，则停止－损失再保险模式为：

$$\begin{cases} X_I=\begin{cases} X, & x\le d \\ d, & x>d \end{cases} = x\wedge d \\ X_R=\begin{cases} 0, & x\le d \\ X-d, & x>d \end{cases} = (x-d)_+ \end{cases}$$

参数 $d>0$ 为停止－损失再保险的自留额， $a\wedge b=\min\{a,b\}$，且 $(a)_+=\max\{a,0\}$。

在交换承担的风险中，保险人要支付再保险公司转出风险的保费。假设 $\delta(d)$ 表示保费原理且 $\delta(d)$ 关于 d 是递减函数。本文用三种不同保费原理分别对停止－损失再保险的最优自留额进行讨论，分别为方差保费原理、标准差保费原理和混合方差标准差保费原理。

T 表示停止－损失再保险的保险人的总损失。则 T 包含自留损失和再保险保费两个部分，即

$$T=X_I+\delta(d) \tag{1.1}$$

可以根据最小化保险人的破产概率，或者最大化保险人的效用。本文采用在险风险度量 *VaR* 作为计算停止－损失再保险最优自留额 d 的标准。

在置信水平 $1-\alpha\,(0<\alpha<1)$ 下，随机变量 X 的 *VaR* 值，定义为

$VaR_\alpha(x)=\inf\{x:\Pr(X>x)\le\alpha\}=\inf\{x:\Pr(X\le x)\ge 1-\alpha\}$，其中参数 α 也可称为风险容忍度。

如果 X 有一个定义在 $[0,\infty)$ 上的一一对应的连续分布，则 $VaR_X(\alpha)$ 是下面两个等式的唯一解：

$$\Pr\{X>VaR_X(\alpha)\}=\alpha, \tag{1.2}$$

$$\Pr\{X\le VaR_X(\alpha)\}=1-\alpha, \tag{1.3}$$

或者定义为 $VaR_X(\alpha)=S_X^{-1}(\alpha)=F_X^{-1}(1-\alpha)$，其中 S_X^{-1} 和 F_X^{-1} 分别是函数 S_X 和 F_X 的逆函数。

现介绍另外一个风险度量：条件尾部期望(*CTE*)，Artzner *et al.* (1999)和 Wirch 和 Hardy (1999)把随机变量 X 的 *CTE* 定义为：

$$CTE_X(\alpha)=E\left[X\mid X>VaR_X(\alpha)\right] \tag{1.5}$$

$$CTE_X(\alpha)=E\left[X\mid X\ge VaR_X(\alpha)\right] \tag{1.6}$$

由于 X 是一个连续随机变量，很容易可以得出：$CTE_X(\alpha)\ge VaR_X(\alpha)$。*CTE* 是当损失 X 超过它的 *VaR* 值的期望，且 *CTE* 是一致风险度量。

定义保险人的留下损失和保险人的总花费分别是 X_I 和 T。对于 *VaR*，我们有

$VaR_{X_I}(d,\alpha)=\inf\{x:\Pr(X_I>x)\le\alpha\}$ 和 $VaR_T(d,\alpha)=\inf\{x:\Pr(T>x)\le\alpha\}$。

对于 *CTE*，有：

$$CTE_{X_I}(d,\alpha)=E\left[X_I\mid X_I\ge VaR_{X_I}(d,\alpha)\right] \tag{1.7}$$

$$CTE_T(d,\alpha)=E\left[T\mid T\ge VaR_T(d,\alpha)\right] \tag{1.8}$$

对于保险人观点，确保关于 T 的风险度量尽可能的小。这促使我们考虑和去寻找最优风险度量标准来求得最优的自留额。

第一种方法是通过最小化 *VaR* 值决定最优自留额 d^*：在给定的风险忍受程度 α 下，使得总损失的 *VaR* 值达到最小的 d^* 就是最优自留额[4]-[6]，将这种方法定义为 *VaR*-最优标准，即

VaR-最优标准：

$$VaR_T\left(d^*,\alpha\right)=\min_{d>0}\left\{VaR_T\left(d,\alpha\right)\right\} \tag{1.9}$$

第二种方法，是通过最小化 *CTE* 值决定最优自留额 d_0^*：在给定的风险忍受程度 α 下，使得总损失的 *CTE* 值达到最小的 d_0^* 就是最优自留额，将这种方法定义为 *CTE*-最优标准，即

CTE-最优标准：

$$CTE_T\left(d_0^*,\alpha\right)=\min_{d>0}\left\{CTE_T\left(d,\alpha\right)\right\} \tag{1.10}$$

2. *VaR*-最优标准下基于三种方差相关保费原理下的最优自留额

在三种不同的方差相关保费原理下，分析 *VaR*-最优标准(1.9)下的停止－损失再保险的最优自留额[2] [3] [7] [8]。

首先，对于停止－损失再保险，关于 X_I 的生存函数为：

$$S_{X_I}\left(x\right)=\begin{cases}S_X\left(x\right),0\le x\le d,\\0,x\ge d.\end{cases} \tag{2.1}$$

那么，如果 $0<\alpha\le S_X\left(d\right)$ 或者 $0<d\le S_X^{-1}\left(\alpha\right)$，那么 $VaR_{X_I}\left(d,\alpha\right)=d$；如果 $\alpha>S_X\left(d\right)$ 或者 $d>S_X^{-1}\left(\alpha\right)$，则 $VaR_{X_I}\left(d,\alpha\right)=S_X^{-1}\left(d\right)$。因此，$X_I$ 的 *VaR* 值表示为：

$$VaR_{X_I}\left(d,\alpha\right)=\begin{cases}d,0\le d\le S_X^{-1}\left(\alpha\right),\\S_X^{-1}\left(\alpha\right),d>S_X^{-1}\left(\alpha\right).\end{cases} \tag{2.2}$$

给定 $d>0$，因为 X_I $\left(0\le X_I\le d\right)$是有界随机变量，且

$$VaR_T\left(d,\alpha\right)=VaR_{X_I}\left(d,\alpha\right)+\delta\left(d\right). \tag{2.3}$$

所以，由(1.1)和(2.2)，得：

$$VaR_T\left(d,\alpha\right)=\begin{cases}d+\delta\left(d\right),0<d\le S_X^{-1}\left(\alpha\right),\\S_X^{-1}\left(\alpha\right)+\delta\left(d\right),d>S_X^{-1}\left(\alpha\right).\end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $\delta\left(d\right)$ 是关于 d 的减函数。

与 $VaR_{X_I}\left(d,\alpha\right)$ 相似，$VaR_T\left(d,\alpha\right)$ 是一个关于 d 的增函数。

为了运算方便，定义：$\int_d^\infty S_X\left(x\right)\mathrm{d}x=\phi\left(d\right)$，$\int_d^\infty xS_X\left(x\right)\mathrm{d}x=\phi\left(d\right)$。

下面分别给出三种方差相关保费原理下基于 *VaR*-最优标准下的最优自留额：

定理 2.1

当再保险保费满足方差原理时，

(a) 最优自留额 $d^*>0$ 存在当且仅当 $\alpha<S_X\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)\right)<S_X\left(0\right)$ 和 $S_X^{-1}\left(\alpha\right)\ge d^*+\phi\left(d^*\right)+\theta_1\left[2\varphi\left(d^*\right)-2d^*\phi\left(d^*\right)-\phi^2\left(d^*\right)\right]$ 成立。

(b) 当最优自留额 d^* 存在，则 $d^*=\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)$ 和关于 T 的最小 *VaR* 值为 $VaR_T\left(d^*,\alpha\right)=d^*+\delta\left(d^*\right)$。

证明：(a) 当再保险保费满足方差保费原理，则：

$\delta\left(d\right)=E\left(X_R\right)+\theta_1D\left(X_R\right)$，其中 $\theta_1>0$ 是安全负载系数。

$$\delta(d)=E(X_R)+\theta_1 D(X_R)=\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_1\left(2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left[\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right]^2\right)$$
$$=\phi(d)+\theta_1\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]$$

现在要求 VaR_T (2.4)的最小值，当 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$，VaR_T 对 d 求导，得:

$$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=(1-S_X(d))\left(1-2\theta_1\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)=(1-S_X(d))(1-2\theta_1\phi(d))$$

令

$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=0$ 即：$1-2\theta_1\phi(d)=0$ 可得：$d^*=\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)$。

当 $d\in(0,d^*)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，而当 $d\in\left(d^*,S_X^{-1}(\alpha)\right)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$，则函数在 d^* 处获得最小值。当 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 时，属于本文不考虑的情况，因此，d 还需要满足

$$S_X^{-1}(\alpha)\ge d^*+\delta(d^*)=d^*+\phi(d^*)+\theta_1\left[2\varphi(d^*)-2d^*\phi(d^*)-\phi^2(d^*)\right].$$

如果上述不等式成立，那么最优自留额存在，为 d^*。

另外，因为 $0<d^*\le S_X^{-1}(\alpha)$，所以 $\alpha<S_X(d^*)<S_X(0)$，即：$\alpha<S_X\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)\right)<S_X(0)$。

(b) 当最优自留额 $d^*>0$ 存在，由(a)可得，故关于 T 的最小 VaR 值为 $VaR_T(d^*,\alpha)=d^*+\delta(d^*)$。

定理 2.2

当再保险保费满足标准差原理时，

(a) 最优自留额 $d^{**}>0$ 存在当且仅当 $\alpha<S_X(d^{**})<S_X(0)$ 和 $S_X^{-1}(\alpha)\ge d^{**}+\phi(d^{**})+\theta_2\left[2\varphi(d^{**})-2d^{**}\phi(d^{**})-\phi^2(d^{**})\right]^{1/2}$ 成立。

(b) 当最优自留额 d^{**} 存在，则 $d^{**}=\left\{d\mid\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_2^2+1\right\}$ 和关于 T 的最小 VaR 值为 $aR_T(d^{**},\alpha)=d^{**}+\delta(d^{**})$。

证明：(a) 当再保险保费满足标准差保费原理，则：

$\delta(d)=E(X_R)+\theta_2\sqrt{D(X_R)}$，其中 $\theta_2>0$ 是安全负载系数。

$$\delta(d)=E(X_R)+\theta_2\sqrt{D(X_R)}=\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_2\left[2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{1/2}$$
$$=\phi(d)+\theta_2\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}$$

现在要求 VaR_T (2.4)的最小值，当 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$，VaR_T 对 d 求导，得：

$$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=(1-S_X(d))\left(1-\frac{\theta_2\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x}{\left(2\int_d^\infty (x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left[\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right]^2\right)^{1/2}}\right)$$

令

$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=0$ 即：$1-\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}=0$

解得：$d^{**}=\left\{d\,|\,\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_2^2+1\right\}$

当 $d\in\left(0,d^{**}\right)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，而当 $d\in\left(d^{**},S_X^{-1}(\alpha)\right)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$，则函数在 d^{**} 处获得最小值。当 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 时，属于本文不考虑的情况，因此，d 还需要满足

$$S_X^{-1}(\alpha)\geq d^{**}+\delta\left(d^{**}\right)=d^{**}+\phi\left(d^{**}\right)+\theta_2\left(\varphi\left(d^{**}\right)-2d^{**}\phi\left(d^{**}\right)-\phi^2\left(d^{**}\right)\right)^{1/2}$$

如果上述不等式成立，那么最优自留额存在，为 d^{**}。

另外，因为 $0<d^{**}\leq S_X^{-1}(\alpha)$,故可得 $\alpha<S_X\left(d^{**}\right)<S_X(0)$。

(b) 当最优自留额 $d^{**}>0$ 存在，由(c)可得，故关于 T 的最小 VaR 值为 $VaR_T\left(d^{**},\alpha\right)=d^{**}+\delta\left(d^{**}\right)$。

定理 2.3

当再保险保费满足混合方差和标准差原理时，

(a) 最优自留额 $d^{***}>0$ 存在当且仅当 $\alpha<S_X\left(d^{***}\right)<S_X(0)$ 和

$S_X^{-1}(\alpha)\geq d^{***}+\phi\left(d^{***}\right)+\theta_3\left[\varphi\left(d^{***}\right)-2d^{***}\phi\left(d^{***}\right)-\phi^2\left(d^{***}\right)\right]+\theta_4\left[\varphi\left(d^{***}\right)-2d^{***}\phi\left(d^{***}\right)-\phi^2\left(d^{***}\right)\right]^{1/2}$ 成立。

(b) 当最优自留额 d^{***} 存在，则 $d^{***}=\left\{d\,|\,\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_4^2\left(1-2\theta_3\phi(d)\right)^{-2}+1\right\}$ 和关于 T 的最小 VaR 值为 $VaR_T\left(d^{***},\alpha\right)=d^{***}+\delta\left(d^{***}\right)$。

证明：(a) 当再保险保费满足混合方差标准差保费原理，则：

$\delta(d)=E\left(X_R\right)+\theta_3D\left(X_R\right)+\theta_4\sqrt{D\left(X_R\right)}$，其中 $\theta_3,\theta_4>0$ 是安全负载系数。

$$\begin{aligned}\delta(d)&=E\left(X_R\right)+\theta_3D\left(X_R\right)+\theta_4\sqrt{D\left(X_R\right)}\\&=\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_3\left[2\int_d^\infty(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]+\theta_4\left[2\int_d^\infty(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{1/2}\\&=\phi(d)+\theta_3\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]+\theta_4\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

现在要求 VaR_T (2.4)的最小值，当 $0<d\leq S_X^{-1}(\alpha)$，VaR_T 对 d 求导，得：

$$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=\left(1-S_X(d)\right)\left(1-2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}\right)$$

令

$$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}=0\text{ 即：}1-2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}=0$$

解得：$d^{***}=\left\{d\,|\,\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_4^2\left(1-2\theta_3\phi(d)\right)^{-2}+1\right\}$。

当 $d\in\left(0,d^{***}\right)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，而当 $d\in\left(d^{***},S_X^{-1}(\alpha)\right)$ 时，$\frac{\partial VaR_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$，则函数在 d^{***} 处

获得最小值。当$d > S_X^{-1}(\alpha)$时，属于本文不考虑的情况，因此，d还需要满足$S_X^{-1}(\alpha) \ge d^{***} + \delta(d^{***})$

即

$$S_X^{-1}(\alpha) \ge d^{***} + \phi(d^{***}) + \theta_3\left[\varphi(d^{***}) - 2d^{***}\phi(d^{***}) - \phi^2(d^{***})\right] + \theta_4\left[\varphi(d^{***}) - 2d^{***}\phi(d^{***}) - \phi^2(d^{***})\right]^{1/2}$$

如果上述不等式成立，那么最优自留额存在，为d^{***}。

另外，因为$0 < d^{***} \le S_X^{-1}(\alpha)$，故可得$\alpha < S_X(d^{***}) < S_X(0)$。

(b) 当最优自留额$d^{***} > 0$存在，由(e)可得，故关于T的最小VaR值为$VaR_T(d^{***}, \alpha) = d^{***} + \delta(d^{***})$。

3. *CTE*-最优标准下基于三种方差相关保费原理的最优自留额

现在考虑*CTE*-最优标准(1.10)下的最优自留额[2] [3] [9]-[11]。由(1.1)，(1.8)和(2.3)可得关于损失总量T的*CTE*值可以表示为：

$$CTE_T(d,\alpha) = E\left[X_I + \delta(d) \mid X_I + \delta(d) \ge VaR_T(d,\alpha)\right] = CTE_{X_I}(d,\alpha) + \delta(d) \tag{3.1}$$

进一步，由(1.7)得：

$$\begin{aligned} CTE_{X_I}(d,\alpha) &= E\left[VaR_{X_I}(d,\alpha) + X_I - VaR_{X_I}(d,\alpha) \mid X_I \ge VaR_{X_I}(d,\alpha)\right] \\ &= VaR_{X_I}(d,\alpha) + \frac{\int_{VaR_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x)\mathrm{d}x}{\Pr\left\{X_I \ge VaR_{X_I}(d,\alpha)\right\}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

又因为$0 < VaR_{X_I}(d,\alpha) \le d$，由(2.1)和(2.2)有

$$\int_{VaR_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} S_{X_I}(x)\mathrm{d}x = \int_{VaR_{X_I}(d,\alpha)}^{\infty} S_X(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)\mathrm{d}x, d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \tag{3.3}$$

和

$$\begin{aligned} &\Pr\left\{X_I \ge VaR_{X_I}(d,\alpha)\right\} = \Pr\left\{X_I = VaR_{X_I}(d,\alpha)\right\} + S_{X_I}\left(VaR_{X_I}(d,\alpha)\right) \\ &= \begin{cases} \Pr\left\{X_I = d\right\} + S_{X_I}(d), 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha) \\ \Pr\left\{X_I = S_X^{-1}(\alpha)\right\} + S_{X_I}\left(S_X^{-1}(\alpha)\right), d > S_X^{-1}(\alpha) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Pr\left\{X_I \ge d\right\}, 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha), \\ S_{X_I}\left(S_X^{-1}(\alpha)\right) = \alpha, d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4}$$

由(3.1)~(3.4)和(2.4)，对于$d > 0$和$0 < \alpha < S_X(0)$，有：

$$CTE_T(d,\alpha) = \begin{cases} d + \delta(d), 0 < d \le S_X^{-1}(\alpha), \\ S_X^{-1}(\alpha) + \delta(d) + \dfrac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d} S_X(x)\mathrm{d}x, \ d > S_X^{-1}(\alpha). \end{cases} \tag{3.5}$$

三种方差相关保费原理下基于*CTE*-最优标准下的最优自留额：

同样，为了运算方便，定义：$\int_d^{\infty} S_X(x)\mathrm{d}x = \phi(d)$，$\int_d^{\infty} xS_X(x)\mathrm{d}x = \varphi(d)$。

定理 3.1

当再保险保费满足方差原理时，

(a) 最优自留额$d_0^* > 0$存在当且仅当$\alpha < S_X\left(\phi^{-1}\left(\dfrac{1}{2\theta_1}\right)\right) < S_X(0)$和$\forall d > S_X^{-1}(\alpha)$有

$\left(2\theta_1\phi(d)+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>2\theta_1\phi(d)$。

(b) 当最优自留额 d_0^* 存在，则 $d_0^*=\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)$ 和关于 T 的最小 CTE 值为 $CTE_T\left(d_0^*,\alpha\right)=d_0^*+\delta\left(d_0^*\right)$。

证明：(a) 当再保险保费满足方差保费原理，则：
$\delta(d)=E(X_R)+\theta_1 D(X_R)$，其中 $\theta_1>0$ 是安全负载系数。

$$\begin{aligned}\delta(d)&=E(X_R)+\theta_1 D(X_R)\\&=\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_1\left(2\int_d^{\infty}(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left[\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x\right]^2\right)\\&=\phi(d)+\theta_1\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]\end{aligned}$$

现在要求 CTE_T (3.5)的最小值，当 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$， CTE_T 对 d 求导，与 VaR_T 对 d 求导一致得：
$d_0^*=\phi^{-1}\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)$。

当 $d\in\left(0,d_0^*\right)$ 时，$\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，而当 $d\in\left(d_0^*,S_X^{-1}(\alpha)\right)$ 时，$\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$，则函数在 d_0^* 处获得最小值。

当 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 时，CTE_T 对 d 求导，则：

$$\begin{aligned}\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}&=\frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha)+\delta(d)+\frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d}S_X(x)\mathrm{d}x\right)\\&=2\theta_1\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x\left(S_X(d)-1\right)+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)\\&=2\theta_1\phi(d)S_X(d)-2\theta_1\phi(d)+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)\end{aligned}$$

若 $\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$ 成立，$\left(2\theta_1\phi(d)+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>2\theta_1\phi(d)$

所以 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递增的，则在 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$ 能取到最小值

否则 $\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$， 即 $\left(2\theta_1\phi(d)+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)<2\theta_1\phi(d)$

则 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递减的，不能取到最小值。

(b) 当最优自留额 $d_0^*>0$ 存在，由(a)可得，故关于 T 的最小 CTE_T 值为 $CTE_T\left(d_0^*,\alpha\right)=d_0^*+\delta\left(d_0^*\right)$。

定理 3.2

当再保险保费满足标准差原理时，

(a) 最优自留额 $d_0^{**}>0$ 存在当且仅当 $\alpha<S_X\left(d_0^{**}\right)<S_X(0)$ 和 $\forall d>S_X^{-1}(\alpha)$ 有

$\left(\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$。

(b) 当最优自留额 d_0^{**} 存在，则 $d_0^{**}=\left\{d\mid\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_2^2+1\right\}$ 和关于 T 的最小 CTE 值为 $CTE_T\left(d_0^{**},\alpha\right)=d_0^{**}+\delta\left(d_0^{**}\right)$。

证明：(a) 当再保险保费满足标准差保费原理，则：

$\delta(d)=E(X_R)+\theta_2\sqrt{D(X_R)}$，其中 $\theta_2>0$ 是安全负载系数。

$$\begin{aligned}\delta(d)&=E(X_R)+\theta_2\sqrt{D(X_R)}\\&=\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_2\left[2\int_d^{\infty}(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{1/2}\\&=\phi(d)+\theta_2\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

现在要求 CTE_T (3.5)的最小值，当 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$，CTE_T 对 d 求导，与 VaR_T 对 d 求导一致，可得：

$$d_0^{**}=\left\{d\mid\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_2^2+1\right\}$$

当 $d\in\left(0,d_0^{**}\right)$ 时，$\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，而当 $d\in\left(d_0^{**},S_X^{-1}(\alpha)\right)$ 时，$\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$，则函数在 d_0^{*} 处获得最小值。

当 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 时，CTE_T 对 d 求导，则：

$$\begin{aligned}\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}&=\frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha)+\delta(d)+\frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{d}S_X(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\left(S_X(d)-1\right)\left(\frac{\theta_2\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x}{\left(2\int_d^{\infty}(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left[\int_d^{\infty}S_X(x)\mathrm{d}x\right]^2\right)^{1/2}}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)\\&=\left(S_X(d)-1\right)\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)\end{aligned}$$

若 $\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$ 成立，

则需要 $\left(\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$ 成立

所以 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递增的，则在 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$ 能取到最小值

否则 $\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，

即

$$\left(\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)<\frac{\theta_2\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$$

则 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递减的，不能取到最小值。

(b) 当最优自留额 $d_0^{**}>0$ 存在，由(a)可得，故关于 T 的最小 CTE_T 值为 $CTE_T\left(d_0^{**},\alpha\right)=d_0^{**}+\delta\left(d_0^{**}\right)$。

定理 3.3

当再保险保费满足混合方差和标准差原理时，

(a) 最优自留额 $d_0^{***}>0$ 存在当且仅当 $\alpha<S_X\left(d_0^{***}\right)<S_X(0)$ 和 $\forall d>S_X^{-1}(\alpha)$ 有

$$\left(2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$$

(b) 当最优自留额 d_0^{***} 存在，则 $d_0^{***}=\left\{d\mid\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_4^2\left(1-2\theta_3\phi(d)\right)^{-2}+1\right\}$ 和关于 T 的最小 CTE 值为 $CTE_T\left(d_0^{***},\alpha\right)=d_0^{***}+\delta\left(d_0^{***}\right)$。

证明：(a) 当再保险保费满足标准差保费原理，则：

$\delta(d)=E(X_R)+\theta_3D(X_R)+\theta_4\sqrt{D(X_R)}$，其中 $\theta_3,\theta_4>0$ 是安全负载系数。

$$\begin{aligned}\delta(d)&=E(X_R)+\theta_3D(X_R)+\theta_4\sqrt{D(X_R)}\\&=\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x+\theta_3\left[2\int_d^\infty(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]\\&\quad+\theta_4\left[2\int_d^\infty(x-d)S_X(x)\mathrm{d}x-\left(\int_d^\infty S_X(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{1/2}\\&=\phi(d)+\theta_3\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]+\theta_4\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

现在要求 CTE_T (3.5)的最小值，当 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$，CTE_T 对 d 求导，与 VaR_T 对 d 求导一致，可得：

$$d_0^{***}=\left\{d\mid\frac{2\varphi(d)-2d\phi(d)}{\phi^2(d)}=\theta_4^2\left(1-2\theta_3\phi(d)\right)^{-2}+1\right\}$$

当 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 时，CTE_T 对 d 求导，则：

$$\begin{aligned}\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}&=\frac{\partial}{\partial d}\left(S_X^{-1}(\alpha)+\delta(d)+\frac{1}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^d S_X(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\left(S_X(d)-1\right)\left(2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)\end{aligned}$$

$\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}>0$ 成立，

则

$$\left(2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)>2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$$

成立.。

所以 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递增的，则在 $0<d\le S_X^{-1}(\alpha)$ 能取到最小值

否则 $\frac{\partial CTE_T(d,\alpha)}{\partial d}<0$，

即

$$\left(2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\alpha}-1\right)S_X(d)<2\theta_3\phi(d)-\frac{\theta_4\phi(d)}{\left[2\varphi(d)-2d\phi(d)-\phi^2(d)\right]^{1/2}}$$

则 CTE_T 在 $d>S_X^{-1}(\alpha)$ 是递减的，不能取到最小值。

(b) 当最优自留额 $d_0^{***} > 0$ 存在，由(a)可得，故关于 T 的最小 CTE_T 值为 $CTE_T\left(d_0^{***},\alpha\right) = d_0^{***} + \delta\left(d_0^{***}\right)$。

4. 实例分析与模拟

假设 X 服从指数分布，分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{(-0.1x)}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，生存函数为 $S_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(-0.1x)}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$。

下面分别在三种方差相关保费原理下比较 *VaR* 和 *CTE* 下的最优自留额。

4.1. 基于方差保费原理下的最优自留额存在情况(取 θ_1 为不同的值)

要满足条件 $S_X^{-1}(\alpha) \ge d^* + \delta\left(d^*\right)$，对不同的置信水平(不同的 α 值，见图 1)，则可取的最优自留额的个数就不同，这里取不同的保费附加因子 θ_1，从图中可以看出四条横线下方代表四种置信水平下存在的最优自留额的个数，可以发现，给定的置信水平越高，满足条件的最优自留额在不同的保费附加因子下存在的可能就性就越大，反之则越小，由此可以判断出方差原理下最优自留额 d^* 的个数。

由表 1 中数据可知，给定置信水平为 99%时，方差原理下，基于 *VaR* 和 *CTE* 下的自留额 d^* 在满足基本条件下对不同保费附加因子 θ_1 都存在，若降低置信水平，令置信水平为 98%时，当保费附加因子从 $\theta_1 = 0.9$ 到 $\theta_1 = 2.0$ 时，基于 *VaR* 最优自留额 d^* 下是不存在，其不满足条件 $S_X^{-1}(\alpha) \ge d^* + \delta\left(d^*\right)$，然而，基于 *CTE* 最优自留额 d^* 却存在。同样的道理，可以看出在不同的置信水平下，自留额 d^* 基于 *VaR* 和基于 *CTE* 存在情况不同，但是基于 *CTE* 下存在的最优自留额更多些，由此可以得出方差原理下，基于 *CTE* 风险度量下可行性更高些。

当置信水平为 98%时和置信水平为 95%时，*VaR* 与 *CTE* 下的最优自留额存在情况(如图 2)。

图 2 反应出来的信息更为明显，相同的置信水平下，取 20 个不同保费附加因子，得出来的满足条件的自留额存在情况不同，但是，基于 *CTE* 风险度量下存在自留额可能性较大。当置信水平变小时，*VaR* 下的最优自留额存在的可能性变少了。

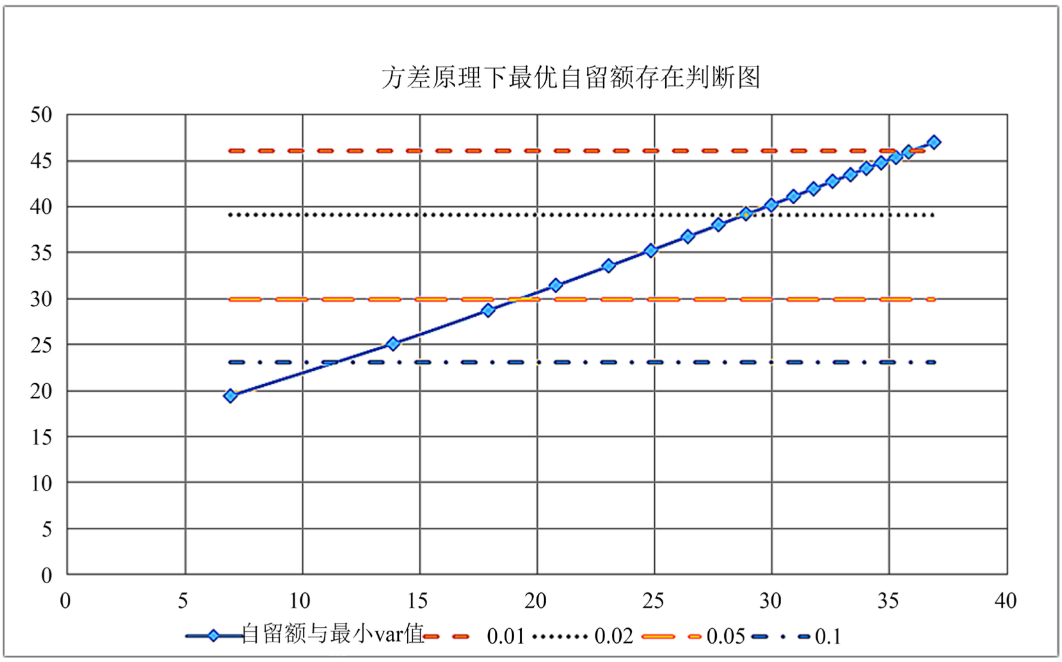

Figure 1. The retention existence in the variance premium principle under different confidence levels
图 1. 方差保费原理下不同置信水平自留额存在判断图

4.2. 基于标准差保费原理下的最优自留额存在情况(取 θ_2 为不同的值)

同样的，基于 *VaR* 下标准差保费原理的最优自留额对不同的置信水平，可获得的自留额个数不同(如图 3)。

从表 2 中可以看出，在标准差保费原理下，给定不同置信的置信水平，对于不同保费附加因子 θ_2，基于 *VaR* 和 *CTE* 下的自留额 d^{**} 存在情况不同。当置信水平为 99%时(即 $\alpha = 0.01$)，基于 *VaR* 下和 *CTE* 下的最优自留额都存在；当给定的置信水平降低为 95%(即 $\alpha = 0.05$，见图 4)，基于 *VaR* 下的最优自留额 d^{**} 随着保费附加因子 θ_2 的递增而使得不满足条件，使得 d^{**} 不存在，但是，基于 *CTE* 下最优自留额 d_0^{**} 都存在；当对于给定三种不同的置信水平 α，基于 *CTE* 下最优自留额 d_0^{**} 都存在，由此可以看出，基于 *CTE* 风险度量下可行性更高些。

4.3. 基于方差标准差混合保费原理下的最优自留额存在情况(取 θ_3， θ_4 为不同的值)

从表 3 可以看出，在置信水平为 99%和 95%时，取不同保费附加因子 θ_3， θ_4，基于混合方差原理下 *CTE* 风险度量下停止损失再保险的自留额存在的可能性比 *VaR* 风险度量要大得多，同样的也说明令基于 *CTE* 下的求最优自留额的可行性更高些。

5. 结论

本文基于三种不同的方差相关保费原理(方差保费原理、标准差保费原理、混合方差和标准差原理)通过最小化 *VaR* 和 *CTE* 风险度量，求得最优自留额解的表达式。在损失总量 *X* 服从指数分布下，通过数值模拟比较不同保费原理下最优自留额存在性的不同，最后得出结论：在给定的置信水平较大时，取不同的附加保费因子，对 *VaR* 和 *CTE* 风险度量下，三种保费原理下的最优自留额存在率很高，随着置信水平的降低，自留额的存在率也降低，这点在 *VaR* 风险度量下表现的特别明显，但是基于 *CTE* 风险度量下

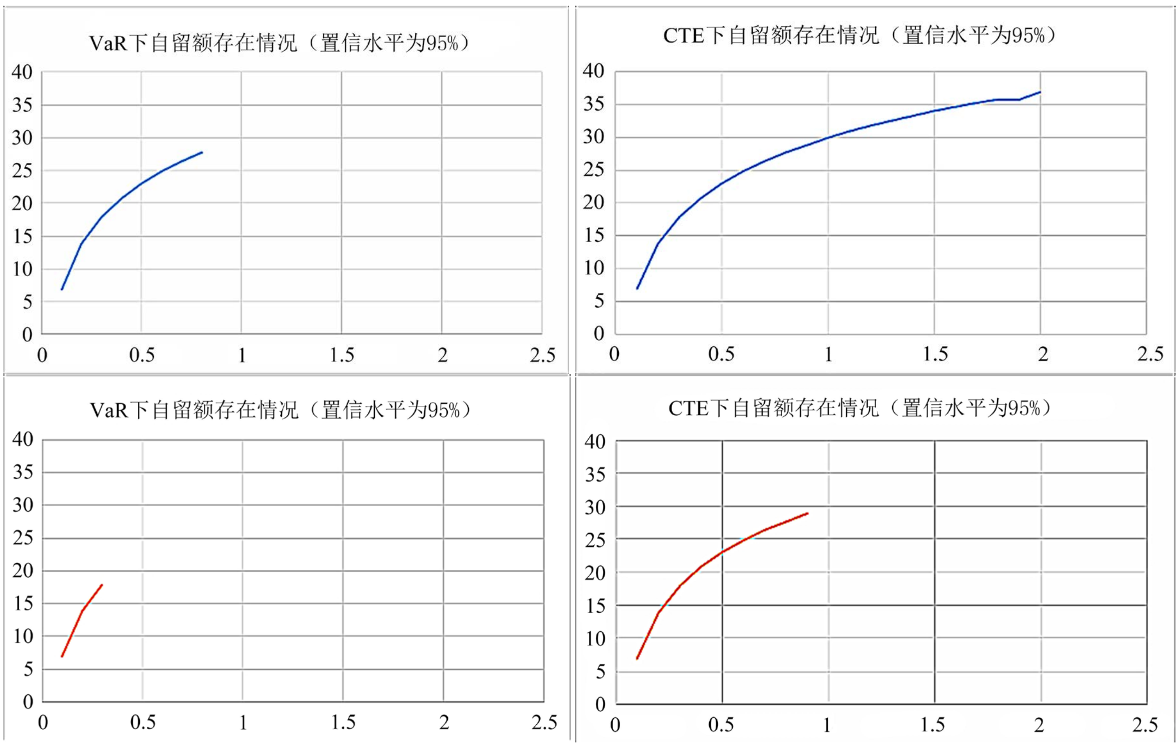

Figure 2. The retention existence under 2 confidence levels
图 2. 两种置信水平下最优自留额的存在情况

Table 1. The retention existence in the variance premium principle under different risk measures
表 1. 方差原理下几种风险度量下最优自留额存在性的比较

VaR 下方差原理对不同置信水平，自留额 *d* 的存在情况(T 代表存在，F 代表不存在)										
θ_1	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
d^*	6.93	13.86	17.92	20.79	23.03	24.85	26.39	27.73	28.9	29.96
$\alpha = 0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.02$	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F
$\alpha = 0.05$	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
$\alpha = 0.1$	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
VaR	19.43	25.11	28.75	31.42	33.53	35.27	36.75	38.04	39.18	40.21
θ_1	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2**
d^*	30.91	31.78	32.58	33.32	34.01	34.66	35.26	35.84	36.38	36.89
$\alpha = 0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.02$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
$\alpha = 0.05$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
$\alpha = 0.1$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
VaR	41.14	41.99	42.77	43.5	44.18	44.81	45.41	45.97	46.51	47.01
CTE 下方差原理对不同置信水平，自留额 *d* 的存在情况(T 代表存在，F 代表不存在)										
θ_1	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
d^*	6.93	13.86	17.92	20.79	23.03	24.85	26.39	27.73	28.9	29.96
$\alpha = 0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.02$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.05$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F
$\alpha = 0.1$	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F
CTE	19.43	25.11	28.75	31.42	33.53	35.27	36.75	38.04	39.18	40.21
θ_1	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2**
d^*	30.91	31.78	32.58	33.32	34.01	34.66	35.26	35.84	36.38	36.89
$\alpha = 0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.02$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha = 0.05$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
$\alpha = 0.1$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
CTE	41.14	41.99	42.77	43.5	44.18	44.81	45.41	45.97	46.51	47.01

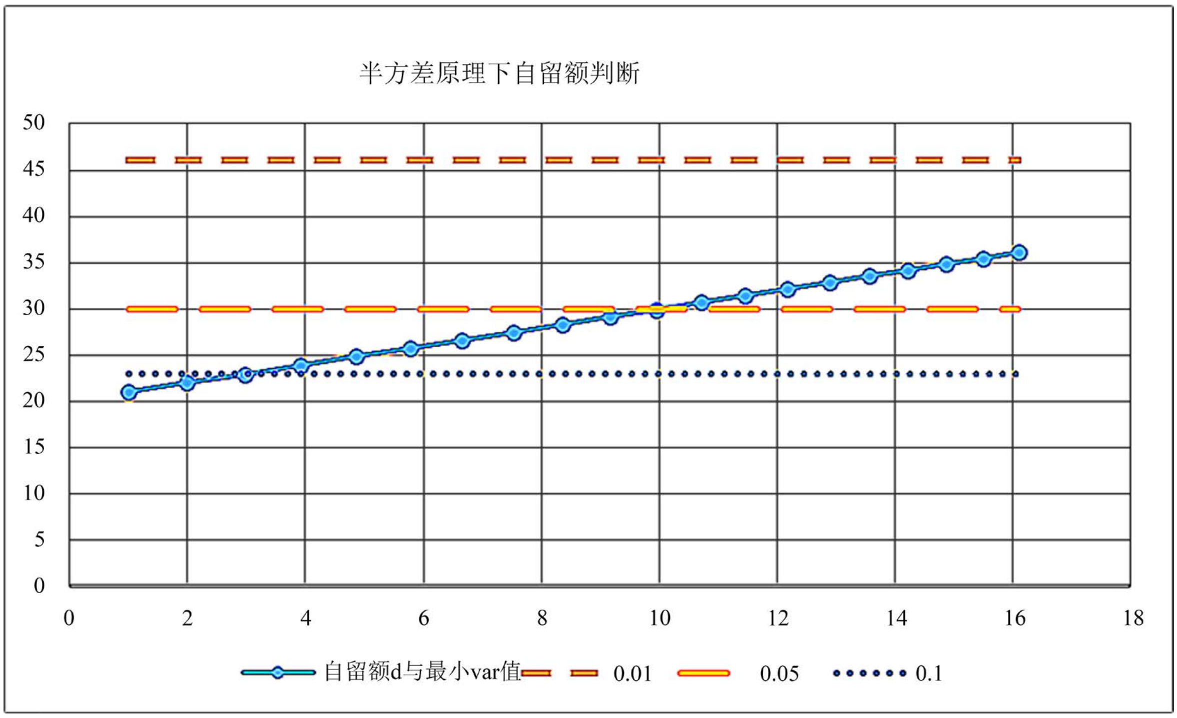

Figure 3. The retention existence in the standard deviation premium principle under different confidence levels
图 3. 标准差原理下不同置信水平自留额存在判断图

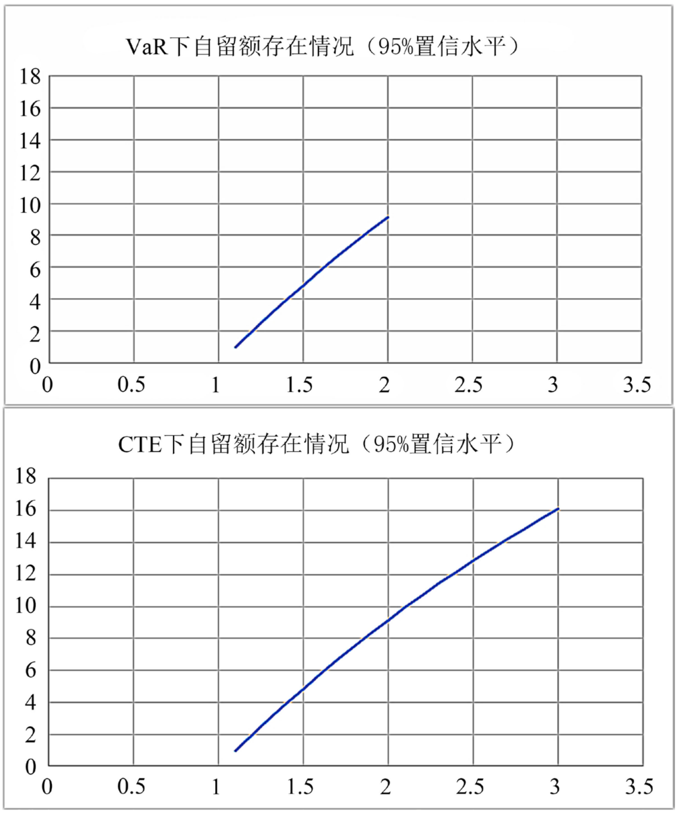

Figure 4. The retention existence under the same confidence levels
图 4. 同种置信水平下最优自留额存在性比较

Table 2. The retention existence in the standard deviation premium principle under different risk measures
表 2. 标准差原理下几种风险度量下最优自留额存在性的比较

VaR 下标准差原理对不同置信水平，自留额 *d* 的存在情况(T 代表存在，F 代表不存在)										
θ_2	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2**
d^{**}	1	1.99	2.96	3.92	4.86	5.77	6.65	7.51	8.35	9.16
$\alpha=0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.05$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.1$	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
VaR	21	21.99	22.96	23.92	24.86	25.77	26.65	27.51	28.35	29.16
θ_2	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3**
d^{**}	9.95	10.72	11.46	12.18	12.88	13.56	14.22	14.86	15.49	16.09
$\alpha=0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.05$	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
$\alpha=0.1$	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
VaR	29.95	30.72	31.46	32.18	32.88	33.56	34.22	34.86	35.49	36.09
CTE 下标准差原理对不同置信水平，自留额 *d* 的存在情况(T 代表存在，F 代表不存在)										
θ_2	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2**
d_0^{**}	1	1.99	2.96	3.92	4.86	5.77	6.65	7.51	8.35	9.16
$\alpha=0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.05$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.1$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
CTE	21	21.99	22.96	23.92	24.86	25.77	26.65	27.51	28.35	29.16
θ_2	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3**
d_0^{**}	9.95	10.72	11.46	12.18	12.88	13.56	14.22	14.86	15.49	16.09
$\alpha=0.01$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.05$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
$\alpha=0.1$	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
CTE	29.95	30.72	31.46	32.18	32.88	33.56	34.22	34.86	35.49	36.09

Table 3. The retention existence in the mixed variance premium principle under different risk measures
表 3. 混合原理下几种风险度量下最优自留额存在性的比较

混合保费原理下 *VaR* 的最优自留额存在情况(F 代表不存在)置信水平为 99%										
θ_3 \ θ_4 d^{***}	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1.1**	**1.3**	**1.5**	**1.7**	**2.1**	**2.3**
0.1	8.62	9.7	10.75	11.78	12.78	13.75	14.71	15.64	17.43	18.3
0.2	14.99	15.73	16.46	17.18	17.9	18.6	19.3	19.99	21.34	22
0.3	18.82	19.41	20.01	20.59	21.18	21.76	22.33	22.9	24.03	F
0.4	21.57	22.08	22.59	23.1	23.6	24.1	24.6	F	F	F
0.5	23.71	24.17	24.62	25.08	25.53	F	F	F	F	F
0.6	25.47	25.89	F	F	F	F	F	F	F	F
0.8	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.1	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.4	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.6	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

续表

混合保费原理下 *CTE* 的最优自留额存在情况(F 代表不存在)置信水平为 99%

θ_4 d^{***} θ_3	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2.1	2.3
0.1	8.62	9.7	10.75	11.78	12.78	13.75	14.71	15.64	17.43	18.3
0.2	14.99	15.73	16.46	17.18	17.9	18.6	19.3	19.99	21.34	22
0.3	18.82	19.41	20.01	20.59	21.18	21.76	22.33	22.9	24.03	24.58
0.4	21.57	22.08	22.59	23.1	23.6	24.1	24.6	25.1	26.08	26.57
0.5	23.71	24.17	24.62	25.08	25.53	25.98	26.42	26.87	27.75	28.19
0.6	25.47	25.89	26.3	26.72	27.13	27.54	27.95	28.35	29.16	29.56
0.8	28.26	28.62	28.98	29.34	29.69	30.05	30.4	30.75	31.46	31.81
1.1	31.37	31.67	31.98	32.28	32.58	32.89	33.19	33.49	34.09	34.39
1.4	33.73	34	34.26	34.53	34.8	35.07	35.34	35.61	36.14	36.4
1.6	35.04	35.29	35.54	35.79	36.04	36.29	36.54	36.79	37.29	37.54

混合保费原理下 *VaR* 的最优自留额存在情况(F 代表不存在)置信水平为 95%

θ_4 d_0^{***} θ_3	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2.1	2.3
0.1	8.62	9.7	10.75	11.78	F	F	F	F	F	F
0.2	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
0.3	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
0.4	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
0.5	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
0.6	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
0.8	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.1	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.4	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.6	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

混合保费原理下 *CTE* 的最优自留额存在情况(F 代表不存在）置信水平为 95%

θ_4 d_0^{***} θ_3	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2.1	2.3
0.1	8.62	9.7	10.75	11.78	12.78	13.75	14.71	15.64	17.43	18.3
0.2	14.99	15.73	16.46	17.18	17.9	18.6	19.3	19.99	21.34	22
0.3	18.82	19.41	20.01	20.59	21.18	21.76	22.33	22.9	24.03	24.58
0.4	21.57	22.08	22.59	23.1	23.6	24.1	24.6	25.1	26.08	26.57
0.5	23.71	24.17	24.62	25.08	25.53	25.98	26.42	26.87	27.75	28.19
0.6	25.47	25.89	26.3	26.72	27.13	27.54	27.95	28.35	29.16	29.56
0.8	28.26	28.62	28.98	29.34	29.69	F	F	F	F	F
1.1	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.4	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1.6	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

却表现的比较缓慢。综上可以得出，基于 *CTE* 风险度量最优下的混合方差和标准差保费原理来求停止-损失再保险的最优自留额是最符合实际意义的。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11361058)。

参考文献 (References)

[1] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M. (2001) Modern Actuarial Risk Theory. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[2] Cai, J. and Tan, K.S. (2007) Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures. *ASTIN Bulletin*, **37**, 93-112. http://dx.doi.org/10.2143/AST.37.1.2020800

[3] Cai, J., Tan, K.S., Weng, C. and Zhang, Y. (2008) Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **43**, 185-196. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.011

[4] Gajek, L. and Zagrodny, D. (2004) Optimal Reinsurance under General Risk Measures. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **34**, 227-240. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.12.002

[5] Kaluszka, M. (2001) Optimal Reinsurance under Mean-Variance Premium Principles. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **28**, 61-67. http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6687(00)00066-4

[6] Kaluszka, M. (2005) Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **36**, 375-398. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.02.004

[7] Cheung, K.C. (2010) Optimal Reinsurance Revisited—A Geometric Approach. *ASTIN Bulletin*, **40**, 221-239. http://dx.doi.org/10.2143/AST.40.1.2049226

[8] Tan, K.S., Weng, C. and Zhang, Y. (2011) Optimality of General Reinsurance Contracts under CTE Risk Measure. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **49**, 175-187. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.03.002

[9] Chi, Y. and Tan, K.S. (2011) Optimal Reinsurance under VaR and CVaR Risk Measures: A Simplified Approach. *ASTIN Bulletin*, **41**, 487-509.

[10] Chi, Y.C. (2012) Optimal Reinsurance under Variance Related Premium Principles. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **51**, 310-321. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.05.005

[11] Chi, Y.C. and Tan, K.S. (2013) Optimal Reinsurance with General Premium Principles. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **52**, 180-189. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.12.001