Statistics and Application 统计学与应用, **2019, 8(3), 456-462**
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2019.83050

Hans汉斯

Study on Risk Measure of *GCVaR* under Random Limit Normal Distribution

Wenguo Jiang

Ministry of the Basic Teaching, Beijing University of Agriculture, Beijing
Email: jiangwenguoly@126com

Received: May 15th, 2019; accepted: May 28th, 2019; published: Jun. 4th, 2019

Abstract

This paper first illustrates classical probability statistics theory and method, the incomplete applicability in the field of uncertainty financial risk measurement, and the origin of the uncertainty of the coherent risk measurement model. Then, based on the nonlinear expectation theory, by constructing the G-normal distribution of the random limit normal distribution, combining the *VaR* and *CVaR* risk measurement model, we define the random limit risk measurement model *GVaR* and *GCVaR*. Finally, the above two risk measurement models are proved to be reasonable and appropriate coherent risk measurements.

Keywords

Nonlinear Expectation, Random Limit Normal Distribution, Coherent Risk Measure

随机极限正态分布下的*GCVaR*风险度量研究

蒋文国

北京农学院，基础教学部，北京
Email: jiangwenguoly@126com

收稿日期：2019年5月15日；录用日期：2019年5月28日；发布日期：2019年6月4日

摘　要

本文阐明经典的概率统计理论和方法，在不确定性金融风险度量领域的不完全适用性及相应风险度量模型不确定性存在的根源。进而在非线性期望理论基础上，通过构建随机极限正态分布G-正态分布，结合*VaR*、*CVaR*风险度量模型，定义了随机极限风险度量模型*GVaR*和*GCVaR*。最后，理论上证明了以上两种风险度量模型是合理的、恰当的一致性风险度量。

文章引用: 蒋文国. 随机极限正态分布下的 *GCVaR* 风险度量研究[J]. 统计学与应用, 2019, 8(3): 456-462.
DOI: 10.12677/sa.2019.83050

关键词

非线性期望，随机正态分布，一致性风险度量

1. 引言

相较于传统金融业风险，互联网金融风险有更大的不确定性。其风险主要有：高技术带来的系统风险，包含操作风险、信息泄露风险；市场选择风险；互联网金融立法滞后风险。风险与不确定性问题将深刻改变整个经济学的体系。而开拓对不确定性风险的量化分析及涵纳不确定性因素的风险度量理论意义深远。在险价值(*VaR*: *Value at Risk*)和条件在险价值(*CVaR*)是刻画金融风险中重要的风险指标。然而VaR 方法计算基于一定的概率统计模型。*VaR* 在不服从正态分布的情况时，次可加性无法满足，从而形成 *VaR* 非一致性风险度量。*CVaR* 虽然是一致性风险度量，但事实上，*CVaR* 度量方法不能揭示金融市场上的风险不确定性。宫晓琳[1]等诠释了非线性期望理论对不确定性研究的理论原理，论证了随机分析将成为引致风险管理领域深刻变革的重要技术理论。

本文立足于非线性期望理论，探讨 G-期望和 G-正态分布理论，研究互联网金融风险不确定性问题，给出了 *GVaR* 和 *GCVaR* 一致性风险度量方法。

2. 随机极限正态分布及其理论

本节将介绍随机极限正态分布的理论基础及其分布形态的主要特征。概括而言，随机极限正态是基于非线性期望理论的一类较为有效的基础性概率统计分布模型。下面解析非线性期望理论在理论构建与模型设计中如何处理一系列不确定性，并实现对风险的度量。

非线性期望理论

测度与概率论是解决金融风险问题的一个基本数学工具。三元组(Ω, F, P)描述线性概率空间。其中Ω刻画所有可能发生的随机事；F表示所有相关随机事件组合的集合；而P则表示随机事件组合发生的可能性值[1]。经典的概率理论也用来刻画金融领域里的随机事件。但是随着金融市场中不确定性的大大增强，传统的风险度量方法不能解决互联网金融市场的风险度量问题。不同于此，2006 年，彭实戈[2]引入了一种新的非线性期望 G-期望及相关联的 G-正态分布。G-期望是一个全非线性期望，其不依赖于给定的概率空间，它刻画了随机变量方差的不确定性，所以能更为本质的刻画金融不确定性风险。

令Ω为随机事件集合，Γ为由定义在事件集合Ω上的实值函数所组成的线性空间，满足：

1) $1 \in \Gamma$。

2) Γ对于局部 Lipschitz 函数是稳定的。即对所有的$n \ge 1$和所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n \in C_{l,lip}\left(R^n\right)$，则同样有$\varphi\left(x_1, \cdots, x_n\right) \in \Gamma$。其中$C_{l,lip}\left(R^n\right)$表示所有$\varphi$的线性空间，$\varphi$满足：

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \le C\left(1+|x|^k+|y|^k\right)|x-y|, \forall x, y \in R^n$$

$C>0, k \in N$仅依赖于φ。集合Γ可以理解为随机事件集合Ω上的随机变量空间。

定义 1： 次线性期望

$\dot{E}$ 为一个次线性期望，即 G-期望，则 $\dot{E}:\Gamma\to R$ 满足下列条件：

1) 单调性：$\forall X,Y\in\Gamma$，如果 $X\geq Y$，则 $\dot{E}[X]\geq\dot{E}[Y]$。

2) 保常性：$c\in R$，则 $\dot{E}[c]=c$。

3) 次可加性：$\forall X,Y\in\Gamma$，则 $\dot{E}[X]+\dot{E}[Y]\geq\dot{E}[X+Y]$。

4) 正齐性：$\forall\lambda\geq0,X\in\Gamma,\dot{E}[\lambda X]=\lambda\dot{E}[X]$。

当 $\dot{E}$ 满足以上 4 条件时，$(\Omega,\Gamma,\dot{E})$ 为次线性期望空间。它是对一般概率空间 (Ω,F,P) 上线性期望 $E(X)=\int_{\Omega}X\mathrm{d}P, X\in(\Omega,F,P)$ 的扩展。而若仅满足条件(a)，(b)，则称 $\dot{E}$ 为非线性期望，$(\Omega,\Gamma,\dot{E})$ 为非线性期望空间。

从定义可知，和线性概率中随机变量的分布是由一个确定的分布函数来决定不同，非线性期望空间中随机变量的分布由函数 φ 所组成的线性空间 $C_{l,lip}(R^n)$ 来构建。因此，在非线性期望理论下，无需假设随机变量的分布函数是唯一确定的，也不再需要对分布假设形式进行定义。而是在具有不确定性的前提下，用包含有大量函数的线性空间 $C_{l,lip}(R^n)$ 来描述真实的概率分布。

在次线性空间基础上，彭实戈[2]引入了 G-正态分布的概念。G-正态分布所具有的均值的确定性，方差的不确定特性。对研究互联网金融市场上的不确定性风险度量具有更加本质的意义。

定义 2： G-正态分布

在次线性期望空间 $(\Omega,\Gamma,\dot{E})$，$X\in\Gamma$，且 X 满足下面的表达式

$$\dot{E}[X]=-\dot{E}[-X]=0,\bar{\sigma}^2=\dot{E}[X^2],\underline{\rho}^2=-\dot{E}[-X^2]$$

则称 X 满足 $X\sim N(0,[\bar{\sigma}^2,\underline{\rho}^2])$ 分布，也记作 $X\sim N(0,[\bar{\sigma}^2,\underline{\rho}^2])$ 正态分布。一般情况下，G-正态分布的具体表达式不容易给出，彭实戈[3]在 2007 年给出了两种特殊情况下的一维 G-正态分布的表达式。王鹏，韩东[4]在 2011 年给出了该特殊情况下 G-期望相关计算问题解决方法。

性质 1：定义 $X\sim N(0,[\bar{\sigma}^2,\underline{\rho}^2])$ 的一个随机变量，对 $\forall\varphi\in C_{l,lip}(R^n)$，则 X 的分布 $\dot{E}[\varphi(X)]$ 可得到：

1) 当 φ 为凸函数，即

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y),\forall x,y\in R,\lambda\in[0,1]$$

时，有

$$\dot{E}[\varphi(X)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2\bar{\sigma}^2}\right)\mathrm{d}x$$

2) 当 φ 为凹函数，即

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y),\forall x,y\in R,\lambda\in[0,1]$$

时，有

$$\dot{E}[\varphi(X)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\rho}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2\underline{\rho}^2}\right)\mathrm{d}x$$

3. *GVaR*、*GCVaR* 审慎风险度量

VaR (*Value at Risk*)方法在金融风险度量、确定内部经济资本需求、设定风险限额以及绩效评估等方面有着广泛应用，但是有关 *VaR* 的计算基本上是围绕着估计或模拟资产组合损失分布函数的某些特征而展开的。金融市场中数据往往是带有尖峰后尾的特点，它们的方差也可能不存在，有时甚至连期望都不

存在，这样就无法应用 *VaR* 方法。更为遗憾的是，*VaR* 不满足次可加性，意味着投资组合的分散化反而或许导致风险增加，这显然不合常理。

基于此，Artzner 等[5]人提出一个良好的、恰当的、合理的风险度量应该满足如下性质定义。

给定概率空间 (Ω, F, P) 和此概率空间上的一个实值随机变量 X，它可表示某个投资组合或资产未来的不确定性收益。

定义 3： 一致风险度量

令 Θ 为实值随机变量 X 所有样本可能值的集合，它可表示为所有我们感兴趣的金融头寸所在的集合空间。那么，一个泛函 $\rho:\Theta \to R$ 是一致风险度量，对于所有 $X,Y \in \Theta$ 满足如下四条性质：

1) 单调性： $X \le Y \Rightarrow \rho(X) \le \rho(Y)$；
2) 次可加性： $\rho(X+Y) \le \rho(X)+\rho(Y)$；
3) 正齐性： $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$；
4) 平移不变性： $\rho(X+a) = \rho(X)-a$。

平移不变性实际上说明了风险度量的主要功能是合理地为风险排序。次可加性意味着对资产进行组合不会产生额外风险。一致风险度量观点促使 Uryasev [6]首次提出了条件风险度量(*CVaR*)。下面对比给出 *VaR* 和 *CVaR* 的定义。

设 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$ 表示投资组合中标的金融资产占投资总资产的比率， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示标的金融资产投资损失率， $f(x,r)$ 表示投资组合的损失函数， β 表示置信度，则

$$VaR_\beta = \inf\left\{\alpha \in R : P\left(f(x,r) \le \alpha\right) \ge \beta\right\}$$

$$CVaR_\beta = E\left[f(x,r) \mid f(x,r) \ge VaR_\beta\right] = VaR_\beta + E\left[f(x,r) - VaR_\beta \mid f(x,r) \ge VaR_\beta\right]$$

由 *CVaR* 的定义可以看出，*CVaR* 确定了超过最大可接受损失部分的期望值。相较于 *VaR* 它是一致性风险度量。但无论是 *VaR* 还是 *CVaR*，分布函数 $P\left(f(x,r) \le \alpha\right)$ 可以写成 $E\left[I_{f(x,r)\le\alpha}\right]$ 的形式，这个是一个经典的线性期望，不能够诠释金融市场特别是互联网金融市场不确定性风险。而非线性 G-期望则完全不依赖于线性概率和线性期望性质，以此它成为了金融市场不确定风险度量的有效度量[7] [8]。

下面由损失函数 $f(x,r)=r^{\mathrm{T}}x$，利用非线性 G-期望构造互联网金融市场上不确定性风险度量。

引理 1：令 $\rho^G:\Gamma \to R$，定义 $\rho^G\left(f(x,r)\right) := \dot{E}\left[-f(x,r)\right]$ 是一致风险度量[9]。

定理 1：令 $\rho^G:\Gamma \to R$，定义 $\rho^G\left(f(x,r)\right) := \dot{E}\left[\alpha - f(x,r)\right]$ 是一致风险度量。

至此，类似于 *VaR*、*CVaR* 的定义，结合定理 1，给出 *CVaR*、*GCVaR* 的定义，我们称之为随机在险价值和随机条件在险价值。

定义 4： 令置信水平 $\beta \ge 0$，设标的金融资产在未来指定时期可能最大损失为：

$$GVaR_\beta = \inf\left\{\alpha \in R : \dot{E}\left[\alpha - f(x,r)\right] \ge \beta\right\}$$

其中 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$ 指投资组合中标的金融资产占投资总资产的比率， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 指标的金融资产损失率。

定义 5: 给定某置信水平 $\beta \ge 0$，某一金融资产在未来特定时期超过最大可接受损失部分的期望值为：

$$GCVaR_\beta = \dot{E}\left[f(x,r) \mid f(x,r) \ge GVaR_\beta\right] = GVaR_\beta + \dot{E}\left[f(x,r) - GVaR_\beta \mid f(x,r) \ge GVaR_\beta\right]$$

其中 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$ 表示投资组合中对应金融资产占总资产的比率， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示相应的金融资产损失率。

4. *GVaR*、*GCVaR* 一致性风险度量

前文中提到，一个良好的、合理的风险度量应该符合一致风险度量。下面对上边定义的 *GVaR*、*GCVaR* 进行理论证明。

定理 2：定义 4 中定义的 *GVaR* 是一致性风险度量。

证明：

1) 单调性：对 $\forall f_1(x,r), f_2(x,r)\in\Gamma$，若 $f_1(x,r)\geq f_2(x,r)$，由非线性期望保单调性，$\dot{E}\left[\alpha-f_2(x,r)\right]\geq\dot{E}\left[\alpha-f_1(x,r)\right]$。从而

$$\begin{aligned}&GVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right]\\&=\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-f_1(x,r)\right]\geq\beta\right\}\\&\leq\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-f_2(x,r)\right]\geq\beta\right\}\\&=GVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]\end{aligned}$$

于是 *GVaR* 满足一致性风险公理的单调性条件。

2) 次可加性：对 $\forall f_1(x,r), f_2(x,r)\in\Gamma$，

$$\begin{aligned}&GVaR_\beta\left[f_1(x,r)+f_2(x,r)\right]\\&=\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-\left[f_1(x,r)+f_2(x,r)\right]\right]\geq\beta\right\}\\&=\inf\left\{\alpha+\gamma\in R:\dot{E}\left[\alpha-f_1(x,r)\right]+\dot{E}\left[\gamma-f_2(x,r)\right]\geq\eta\right\}\\&\leq\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-f_1(x,r)\right]\geq\upsilon\right\}+\inf\left\{\gamma\in R:\dot{E}\left[\gamma-f_2(x,r)\right]\geq\omega\right\}\\&=GVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right]+GVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]\end{aligned}$$

其中 $\omega,\upsilon,\eta,\gamma>0$。于是 *GVaR* 满足一致性风险的次可加性条件。

3) 正齐性：对 $\forall\lambda>0$，由非线性期望的保常性和正齐性可得

$$\begin{aligned}&GVaR_\beta\left[\lambda f(x,r)\right]\\&=\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-\lambda f(x,r)\right]\geq\beta\right\}\\&=\lambda\inf\left\{\upsilon\in R:\dot{E}\left[\upsilon-\lambda f(x,r)\right]\geq\eta\right\}\\&=\lambda GVaR_\eta\left[f(x,r)\right]\end{aligned}$$

其中 $\upsilon=\dfrac{\alpha}{\lambda}>0,\eta=\dfrac{\beta}{\lambda}>0$，于是 *GVaR* 满足正齐性条件。

4) 平移不变性：对 $\forall f(x,r)\in\Gamma, c>0$，由非线性期望的保常性得

$$\begin{aligned}&GVaR_\beta\left[f(x,r)+c\right]\\&=\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-\left[f(x,r)+c\right]\right]\geq\beta\right\}\\&=\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-f(x,r)\right]\geq\beta\right\}-\inf\left\{\alpha\in R:\dot{E}\left[\alpha-c\right]\geq\beta\right\}\\&=GVaR_\beta\left[f(x,r)\right]-GVaR_\beta\left[c\right]\end{aligned}$$

于是 *GVaR* 满足一致性风险度量的平移不变性条件。

综上所证，*GVaR* 满足一致性风险度量定义的四个条件，所以 *GVaR* 是非线性期望理论下的随机极限一致性风险度量。

定理 3：定义 5 中定义的 $GCVaR$ 是一致性风险度量。

证明：

1) 单调性：对 $\forall f_1(x,r), f_2(x,r) \in \Gamma$，若 $f_1(x,r) \geq f_2(x,r)$，由 $GVaR$ 为一致风险度量保单调性，$GVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right] \leq GVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]$。从而

$$\begin{aligned}
&GCVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right] \\
&= \dot{E}\left[f_1(x,r) \mid f_1(x,r) \geq GVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right]\right] \\
&\geq \dot{E}\left[f_2(x,r) \mid f_2(x,r) \geq GVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]\right] \\
&= GCVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]
\end{aligned}$$

于是 $GCVaR$ 满足一致性风险公理的单调性条件。$GCVaR$ 指在随机极限理论下，在某一指定的置信水平下，标的资产的投资组合损失将在未来的某时间段内超过随机在险价值 $GVaR$ 的条件期望。如果在任何情况下都有损失函数 $f_1(x,r) \geq f_2(x,r)$，则 $GCVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right] \geq GCVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]$，也就是说一种资产组合在任何情况下风险高于另一个资产组合。那如果前者随机损失的各分量大于后者随机损失所对应的各分量，那么前者资产组合的损失就相对较大。

2) 次可加性：对 $\forall f_1(x,r), f_2(x,r) \in \Gamma$，

$$\begin{aligned}
&GCVaR_\beta\left[f_1(x,r) + f_2(x,r)\right] \\
&= \dot{E}\left[f_1(x,r) + f_2(x,r) \mid f_1 + f_2 \geq GVaR_\beta\left[f_1 + f_2\right]\right] \\
&\leq \dot{E}\left[f_1(x,r) \mid f_1 \geq GVaR_\beta\left[f_1\right]\right] + \dot{E}\left[f_2(x,r) \mid f_2 \geq GVaR_\beta\left[f_2\right]\right] \\
&= GCVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right] + GCVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]
\end{aligned}$$

于是 $GCVaR$ 满足一致性风险的次可加性条件。

$GCVaR_\beta\left[f_1(x,r) + f_2(x,r)\right] \leq GCVaR_\beta\left[f_1(x,r)\right] + GCVaR_\beta\left[f_2(x,r)\right]$，那任意资产组合的总风险损失不大于各资产单独风险损失之和。

3) 正齐性：对 $\forall \lambda > 0$，由非线性期望的保常性和正齐性可得

$$\begin{aligned}
&GCVaR_\beta\left[\lambda f(x,r)\right] \\
&= \dot{E}\left[\lambda f(x,r) \mid \lambda f(x,r)\right] \geq GVaR_\beta\left[f(x,r)\right] \\
&= \lambda \dot{E}\left[f(x,r) \mid f(x,r)\right] \geq \eta GVaR_\beta\left[f(x,r)\right] \\
&= \lambda GVaR_\beta\left[f(x,r)\right]
\end{aligned}$$

其中 $\eta = \dfrac{1}{\lambda} > 0$，于是 $GCVaR$ 满足正齐性条件。

4) 平移不变性：对 $\forall f(x,r) \in \Gamma, c > 0$，由非线性期望的保常性得

$$\begin{aligned}
&GCVaR_\beta\left[f(x,r) - c\right] \\
&= \dot{E}\left[f(x,r) - c \mid f(x,r) - c \geq GVaR_\beta\left[f(x,r)\right] - c\right] \\
&= \dot{E}\left[f(x,r) - c \mid f(x,r) - c \geq GVaR_\beta\left[f(x,r)\right]\right] - GVaR_\beta[c] \\
&= \dot{E}\left[f(x,r) \mid f(x,r) \geq GVaR_\beta\left[f(x,r)\right]\right] - \dot{E}\left[c \mid c \geq GVaR_\beta[c]\right] \\
&= GCVaR_\beta\left[f(x,r)\right] - GCVaR_\beta[c]
\end{aligned}$$

于是 $GCVaR$ 满足一致性风险度量的平移不变性条件。

综上所证，*GCVaR* 满足一致性风险度量的四个条件，所以 *GCVaR* 是非线性期望理论下，一致性随机极限风险度量。

5. 结论

本文章通过开拓不确定性情况下的金融风险度量与分析，以期探索非线性期望理论与传统风险度量模型的结和，从而对相应的学术领域的研究提供思路。就现实意义而言，文章旨在基于更为贴近金融现实的概率统计理论与模型，建立具有包含不确定性因素的风险度量模型理论，以实现对复杂金融系统的风险审慎度量。

基金项目

北京农学院青年教师三项基金项目(SXQN2016203)。

参考文献

[1] 宫晓琳，杨淑振. 非线性期望理论与基于模型不确定性的风险度量[J]. 经济研究, 2015 ,11(1): 133-147.

[2] Peng, S.G. (2006) G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Ito's Type. *Stochastic Analysis & Applications*, **1**, 3-25.

[3] Peng, S.G. (2007) G-Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncentainly. Princeton: Princeton University Press.

[4] 王鹏. G-期望及其相关计算问题[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2011.

[5] Artzner, P., Delban Eber, J.M. and Heath, D. (1999) Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **4**, 203-222. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

[6] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, **2**, 493-517. https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038

[7] 宋光辉，吴超. 互联网金融风险度量模型选择研究[J]. 金融理论与实践, 2014, 12(1)：16-19.

[8] Morgan, J.P. (1996) Riskmetrics-Technical Document. Morgan Mearant Trust Company, New York, 133-167.

[9] 王伟. 非线性数学期望及其在金融中的应用[D]: [博士学位论文]. 济南: 山东大学, 2006.