Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 1982-1993
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135186

Hans汉斯

多级蒙特卡洛有限元方法求解对数势Cahn-Hilliard-Cook方程误差分析

尹　萍[1]，苏　剑[2*]，贾宏恩[1]

[1]太原理工大学数学学院，山西　太原
[2]西安交通大学数学与统计学院，陕西　西安

收稿日期：2024年4月19日；录用日期：2024年5月12日；发布日期：2024年5月20日

摘　要

本文用多级蒙特卡洛有限元方法求解具有对数势的随机Cahn-Hilliard-Cook方程。为了估计方程的温和解，运用Ciarlet-Raviart有限元方法进行空间离散化，对时间则采用向后欧拉格式离散，得到方程的全离散数值格式。同时运用多级蒙特卡洛方法进行数值模拟，相较于标准蒙特卡洛方法，提高了计算效率。文中主要给出了全离散格式的误差估计以及分别应用标准蒙特卡洛方法和多级蒙特卡洛方法进行数值模拟时的总误差估计。

关键词

Cahn-Hilliard-Cook方程，有限元方法，多级蒙特卡洛方法，向后欧拉格式，对数势

Error Analysis of Multilevel Monte Carlo Finite Element Method for Cahn-Hilliard-Cook Equation with Logarithmic Potentials

Ping Yin[1], Jian Su[2], Hongen Jia[1]

[1]School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi

Received: Apr. 19th, 2024; accepted: May 12th, 2024; published: May 20th, 2024

Abstract

In this paper, a multilevel Monte Carlo finite element method is used to solve the stochastic

*通讯作者。

文章引用: 尹萍, 苏剑, 贾宏恩. 多级蒙特卡洛有限元方法求解对数势 Cahn-Hilliard-Cook 方程误差分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 1982-1993. DOI: 10.12677/aam.2024.135186

Cahn-Hilliard-Cook equation with logarithmic potential. To estimate the mild solution of the equation, the Ciarlet-Raviart finite element method is applied for spatial discretization and the backward Euler scheme is applied for time discretization to obtain the full discrete numerical scheme of the equation. Numerical simulations were conducted using the multilevel Monte Carlo method, which enhances computational efficiency compared to the standard Monte Carlo method. The error estimates for the fully discrete scheme and the total error estimates are provided for the numerical simulations using the standard Monte Carlo method and the multilevel Monte Carlo method, respectively.

Keywords

Cahn-Hilliard-Cook Equation, Finite Element Method, Multilevel Monte Carlo Method, Backward Euler Scheme, Logarithmic Potential

1. 引言

Cahn-Hilliard-Cook 方程由 Cook 在[1]中首次提出，是 Cahn-Hilliard 方程随机版本，受到噪声的扰动。Da Prato 和 Debussche [2]建立了方程全局温和解的存在性、唯一性和正则性。文献[3]对 CHC 方程和线性化 CHC 方程的有限元近似进行了研究。文献[3]和[4]分别证明了半离散和全离散有限元方法对 CHC 方程具有强收敛性，但未给出收敛速率。后来，Qi 在[5]中证明了强收敛率。有关 CHC 方程数值研究的更多信息，请参阅文献[6] [7] [8] [9]。

蒙特卡洛方法是估计随机模拟期望的一种非常普遍和有用的方法。多级蒙特卡洛方法[10]在蒙特卡洛方法的基础上，使用分层网格来近似空间和时间，在非常细的网格上进行少量蒙特卡洛采样，在较粗的网格上增加采样量，这两种方法的结合确保了采样与计算成本之间的最佳平衡，大大降低了计算成本。文献[11]解释了多级蒙特卡洛方法的相关信息。

本文主要研究了具有对数 Flory-Huggins 势的 Cahn-Hilliard-Cook 方程。采用多级蒙特卡洛有限元法对其进行数值求解，在空间和时间上分别用有限元法和向后欧拉格式进行离散化，给出其全离散数值格式，并推导得到其数值解与温和解之间的误差估计，包括空间离散误差，时间离散误差，以及统计(抽样)误差。

2. 预备知识

Cahn-Hilliard-Cook 方程是被噪声扰动的 Cahn-Hilliard 方程，其形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u-\Delta w\mathrm{d}t=\mathrm{d}W, & \text{in } D\times(0,T], \\ w=-\Delta u+f(u), & \text{in } D\times(0,T], \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial w}{\partial n}=0, & \text{on } \partial D\times(0,T], \\ u(0)=u_0, & \text{in } D. \end{cases} \tag{1}$$

其中 D 是 $\mathbb{R}^d\ (d=1,2,3)$ 中的有界区域，n 是区域边界 ∂D 上的外法向量，解 u 是一种材料成分的质量浓度，在大多数应用中 $u\in[-1,1]$。

对于方程中的势，本文选取 Flory-Huggins 对数势[12]。

$$F(u)=u\ln u+(1-u)\ln(1-u)+\theta\left(u-u^2\right),$$

$$f(u)=F'(u)=\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)+\theta(1-2u).$$

参照文献[13]的框架，可以将(1)写成一个抽象的演化方程，其形式为：

$$\mathrm{d}X+\left(A^2X+Af(X)\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}W,\quad t\in(0,T],\ X(0)=X_0. \tag{2}$$

其中 A 表示负拉普拉斯，是希尔伯特空间 $H=L^2(D)$ 中的无界算子；而 W 是 H 中关于滤波概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P},\{\mathcal{F}_t\}\right)$ 的 Q-Wiener 过程。

按照[13]的半群方法，我们把(2)写成如下的积分方程(温和解)：

$$X(t)=E(t)X_0-\int_0^t AE(t-s)f(X(s))\mathrm{d}s+\int_0^t E(t-s)\mathrm{d}W(s). \tag{3}$$

其中 $\{E(t)\}_{t\ge0}=\left\{\mathrm{e}^{-tA^2}\right\}_{t\ge0}$ 是由 $-A^2$ 生成的解析半群。

设空间 $H=L^2(D)$ 具有标准内积 $(\cdot,\cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|$，$\dot{H}=\left\{v\in H:\int_D v\mathrm{d}x=0\right\}$，并记 $H^s=H^s(D)$ 为标准 Sobolev 空间。

现定义 $P:H\to\dot{H}$ 为正交投影算子。则 $(I-P)v=|D|^{-1}\int_D v\mathrm{d}x$ 是 v 的均值。

定义算子 $A=-\Delta$，其定义域为：

$$D(A)=\left\{v\in H^2:\frac{\partial v}{\partial n}=0\ \text{on}\ \partial D\right\}.$$

则 A 是 $\dot{H}$ 上具有紧逆的正定、自伴、无界、线性算子。当延拓到 H 为 $Av=APv$ 时，它具有一组正交特征基 $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$，并有相应的特征值 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ 满足：

$$0=\lambda_0\le\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_i\le\cdots\le\lambda_j\le\cdots,\quad \lambda_j\to\infty.$$

第一个特征函数是常数，$\varphi_0=|D|^{-\frac{1}{2}}$。因此 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 构成空间 $\dot{H}$ 上的一组正交基。

现定义范数和半范数如下：

$$|v|_\alpha=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^\alpha\left|(v,\varphi_j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\|v\|_\alpha=\left(|v|_\alpha^2+\left|(v,\varphi_0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

其相应的空间为：

$$\dot{H}^\alpha=D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)=\left\{v\in\dot{H},|v|_\alpha<\infty\right\}.$$

$$H^\alpha=\left\{v\in H,\|v\|_\alpha<\infty\right\}.$$

则 $\dot{H}^0=\dot{H}$，并且 $|v|_\alpha=\left\|A^{\frac{\alpha}{2}}v\right\|$。对于整数阶 $\alpha=s\ge0$，H^s 与标准 Sobolev 空间重合，范数 $\|\cdot\|_k$ 等价于标准范数 $\|\cdot\|_{H^k}$。

对于任意 Hilbert 空间 H,定义 $L^2(\Omega,H)=\left\{v:\mathbb{E}\|v\|_H^2=\int_\Omega\|v\|_H^2\mathrm{d}P(w)<\infty\right\}$,具有范数 $\|v\|_{L^2(\Omega,H)}^2=\left\{\mathbb{E}\|v\|_H^2\right\}^{\frac{1}{2}}$。令 $v\in L^2(\Omega,H)$,则可以定义 $\int_0^t v(s)\mathrm{d}s$,且有如下等距性质成立:

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^t v(s)\mathrm{d}W(s)\right\|^2=\int_0^t\mathbb{E}\|v(s)\|^2\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

用 $L(H)$ 表示 H 中有界线性算子的空间,$L_{HS}(H)$ 表示 H 中所有 Hilbert-Schmidt 算子的空间,即

$$L_{HS}(H)=\left\{v\in L(H):\sum_{j=1}^{\infty}\|v\varphi_j\|^2<\infty\right\}.$$

具有范数 $\|v\|_{HS}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|v\varphi_j\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$。

设空间 $V=D(A)=\dot{H}^2$,$\|v\|_V=\|Av\|$,由[14]中定理 6.13 可知,存在常数 $C>0$,使得对于所有的 $t\in[0,T]$ 和 $v\in V$,

$$\|E(t)v\|\le C\|v\| \tag{5}$$

依据文献[6],算子 $A^\alpha E(t)$ 是有界的,且有

$$\|A^\alpha E(t)\|\le Ct^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-ct}\le Ct^{-\frac{\alpha}{2}},\quad v\in\dot{H},\alpha>0,t>0. \tag{6}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\|A^\alpha E(s)v\|^2\,\mathrm{d}s\le C(t_2-t_1)^{1-\alpha}\|v\|^2,\quad v\in\dot{H},\alpha\in[0,1],t_2>t_1>0. \tag{7}$$

$$\|(E(t)-I)v\|\le Ct^{\frac{1}{2}}\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|=Ct^{\frac{1}{2}}\|v\|_V. \tag{8}$$

由此可得对于 $0\le s\le t\le T$ 和 $v\in V$

$$\|(E(t)-E(s))v\|\le C\sqrt{t-s}\|v\|_V. \tag{9}$$

假设 2.1 设 $B=H,V$。假设存在常数 $C_1,C_2>0$,使得对于 $\Phi\in B,\phi_1,\phi_2\in H$ 成立

$$\|f(\Phi)\|_B\le C_1(1+\|\Phi\|_B),$$
$$\|f(\phi_1)-f(\phi_2)\|\le C_2\|\phi_1-\phi_2\|.$$

易证 $f(u)$ 满足上述假设。

引理 2.1 [11]如果假设 2.1 成立且 $\|X_0\|_{L^2(\Omega,V)}<+\infty$ 则(3)中定义的解 X 在空间 $L^2(\Omega,V)$ 中。特别地,对所有 $t\in[0,T]$ 成立

$$\|X(t)\|_{L^2(\Omega,V)}\le C(T)\left(1+\|X_0\|_{L^2(\Omega,V)}\right).$$

其中,$C(T)$ 表示依赖 T 变化的常数。

为方便后续证明,此处引入关于温和解 X 在时间上正则性的引理。

引理 2.2 [11]如果假 2.1 成立且 $\|X_0\|_{L^2(\Omega,V)}<+\infty$,则存在常数 $C(T)$ 使得(3)中定义的温和解 X 满足,

$$\|X(t)-X(s)\|_{L^2(\Omega,H)}\le C(T)\sqrt{t-s}\left(1+\|X_0\|_{L^2(\Omega,V)}\right),\ 0\le s\le t\le T.$$

引理 2.1,2.2 主要参考[11]进行证明,其中不同之处引入式(5)~(9)即可证明。有了上述假设和定理,

就可以推导出温和解与其近似值之间的误差估计值。

3. 数值格式

本节定义 CHC 方程的有限元近似，为构造其数值格式，首先引入方程(1)的弱形式，求$(u,w)\in\dot{H}\times\dot{H}$使得

$$\begin{cases}(u(t),v)-(u_0,v)+\int_0^t(\nabla w(s),\nabla v)\mathrm{d}s=(W(t),v) & \forall v\in\dot{H},\\ (w,q)=(\nabla u,\nabla q)+(f(u),q)=(\nabla u,\nabla q)+\left(\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)+\theta(1-2u),q\right) & \forall q\in\dot{H}.\end{cases} \tag{10}$$

$\{\mathcal{T}_{h_l}\}_{l=0}^{\infty}$表示区域$D$上最大网格大小为$h_l$的准均匀三角剖分族，$\mathcal{T}_{h_l}$的网格大小表示为

$$h_l:=\max_{K\in\mathcal{T}_{h_l}} diam(K). \tag{11}$$

网格的均匀细化可以通过规则细分来实现。由此得到网格尺寸为$h_l=2^{-l}h_0$，其中h_0表示最粗三角剖分的网格大小。

假设$V_l(l\in\mathbb{N}_0)$是 H 的有限元子序列的嵌套族，细化水平$l>0$，网格大小$h_l(l\in\mathbb{N}_0)$。$V_l\subset H^1$是关于$\mathcal{T}_{h_l}$的连续函数空间，这些函数是最高阶为 1 的分片多项式。

此外，定义$\dot{V}_l=PV_l$，

$$\dot{V}_l=\left\{v_l\in V_l:\int_D v_l\mathrm{d}x=0\right\},$$

因此(10)的混合有限元形式定义为$(u_l(t),w_l(t))\in\dot{V}_l\times V_l$使得

$$\begin{cases}(u_l(t),v_l)-(u_0,v_l)+\int_0^t(\nabla w_l(s),\nabla v_l)\mathrm{d}s=(W(t),v_l) & \forall v_l\in\dot{V}_l,\\ (w_l,q_l)=(\nabla u_l,\nabla q_l)+(f(u_l),q_l)=(\nabla u_l,\nabla q_l)+\left(\ln\left(\frac{u_l}{1-u_l}\right)+\theta(1-2u_l),q_l\right) & \forall q_l\in V_l.\end{cases} \tag{12}$$

接下来，定义“离散拉普拉斯算子”$A_l:V_l\to\dot{V}_l$为

$$(A_lv_l,w_l)=(\nabla v_l,\nabla w_l)\quad\forall v_l\in V_l,\forall w_l\in\dot{V}_l.$$

则有

$$|v_l|_1=\left\|A^{\frac{1}{2}}v_l\right\|=\|\nabla v_l\|=\left\|A_l^{\frac{1}{2}}v_l\right\|,\quad\forall v_l\in V_l.$$

算子A_l是自伴算子，在$\dot{V}_l$上正定、V_l上半正定，且在空间V_l上具有正交特征基$\{\varphi_{j,l}\}_{j=o}^{\mathcal{N}_l}$，并有相应的特征值$\{\lambda_{j,l}\}_{j=o}^{\mathcal{N}_l}$，满足

$$0=\lambda_{0,l}\le\lambda_{1,l}\le\lambda_{2,l}\le\cdots\le\lambda_{j,l}\le\cdots\le\lambda_{\mathcal{N}_l,l},$$

其中$\mathcal{N}_l:=dim(V_l)$且$\varphi_{0,l}=\varphi_0=|D|^{-\frac{1}{2}}$。

另外，定义正交投影算子$P_l:H\to V_l$为

$$(P_lv,w_l)=(v,w_l)\quad\forall v\in H,\forall w_l\in V_l.$$

令$\{E_l(t)\}_{t\ge0}=\left\{\mathrm{e}^{-tA_l^2}\right\}_{t\ge0}$，结合定义的算子$A_l,P_l$，(12)式可以化作$V_l$中的抽象方程：

$$\mathrm{d}X_l+\left(A_l^2X+A_lP_lf(X_l(t))\right)\mathrm{d}t=P_l\mathrm{d}W(t),\quad t\in(0,T],\ X_l(0)=P_lX_0. \tag{13}$$

方程(13)有一个唯一的温和解 X_l，满足以下条件：

$$X_l(t)=E_l(t)P_lX_0-\int_0^t A_lE_l(t-s)P_lf\left(X_l(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t E_l(t-s)P_l\mathrm{d}W(s). \tag{14}$$

对于时间离散，设 $\left(\Theta^n, n\in\mathbb{N}_0\right)$ 为步长为 $\delta t^n=T2^{-n}$ 的等距时间离散序列，即对于 $n\in\mathbb{N}_0$

$$\Theta^n:=\left\{t_k^n=T2^{-n}k=\delta t^n k, k=0,\cdots,2^n\right\}.$$

采用向后欧拉格式对(13)进行时间离散化，得到的全离散问题是求随机变量 $X_{l,n}\left(t_k^n\right)$，使得

$$X_{l,n}\left(t_k^n\right)-X_{l,n}\left(t_{k-1}^n\right)+\delta t^n A_l^2X_{l,n}\left(t_k^n\right)+\delta t^n A_lP_lf\left(X_{l,n}\left(t_k^n\right)\right)=P_lW\left(t_k^n\right)-W\left(t_{k-1}^n\right).$$

则对 $l,n\in\mathbb{N}_0, 0\le k\le 2^n$，全离散近似值为

$$X_{l,n}\left(t_k^n\right)=E_{\delta t^n,l}^kP_lX_0-\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}A_lE_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_lf\left(X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\mathrm{d}W(s). \tag{15}$$

其中 $E_{\delta t^n,l}^k:=\left(I+\delta t^nA_l^2\right)^{-k}$。

为了后续证明，此处引入算子 $E_{\delta t^n,l}^k$ 的一些性质。记 $r(z):=(1+z)^{-1}$，则 $E_{\delta t^n,l}^k=r\left(\delta t^nA_l^2\right)^k$。如[5]所示，存在常数 C 和 c，使得

$$\left|r(z)-\mathrm{e}^{-z}\right|\le Cz^2 \qquad \forall z\in[0,1], \tag{16}$$

$$\left|r(z)\right|\le \mathrm{e}^{-cz} \qquad \forall z\in[0,1]. \tag{17}$$

上述两个不等式足以确保，对 $k=1,2,3,\cdots$，

$$\left|r(z)^k-\mathrm{e}^{-zk}\right|\le\left|\left(r(z)-\mathrm{e}^{-z}\right)\sum_{l=0}^{k-1}r(z)^{k-1-l}\mathrm{e}^{-zl}\right|\le Ckz^2\mathrm{e}^{-c(k-1)z} \qquad \forall z\in[0,1]. \tag{18}$$

4. 误差分析

引理 4.1 在离散情形下，依据[5]以下估计成立：

$$\left\|E_{\delta t^n,l}^kP_lv\right\|\le C\|v\| \qquad v\in\dot{H}, \tag{19}$$

$$\left\|A_l^\alpha E_{\delta t^n,l}^kP_lv\right\|\le Ct_k^{-\frac{\alpha}{2}}\|v\| \qquad v\in\dot{H}, \tag{20}$$

$$\left\|\left(E(t)-E_{\delta t^n,l}^kP_l\right)v\right\|\le C\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\|v\|_V \qquad v\in V, \tag{21}$$

$$\left\|\left(AE(t)-A_lE_{\delta t^n,l}^kP_l\right)v\right\|\le C\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)t^{-1}\|v\| \qquad v\in\dot{H}, \tag{22}$$

$$\left(\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left\|A_lE_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_lv\right\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\le C\|v\| \qquad v\in\dot{H} \quad j=1,\cdots,k, \tag{23}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(AE(t)-A_lE_{\delta t^n,l}^kP_l\right)v\right\|\le C\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\|v\| \qquad v\in\dot{H}. \tag{24}$$

定义标准蒙特卡洛估计器为：

$$E_N[Y]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\hat{Y}^i. \tag{25}$$

其中 $N\in\mathbb{N}$，$\left(\hat{Y}^i, i=1,\cdots,N\right)$ 是随机变量 Y 的独立同分布样本序列。

设 $\left(Y_l, l\in\mathbb{N}_0\right)$ 是 V-值随机变量序列，使得 $Y_l\in V_l$ 对所有 $l\in\mathbb{N}_0$。则对于 $l\in\mathbb{N}_0$，Y_L 可表示为：

$$Y_L=\sum_{l=0}^{L}\left(Y_l-Y_{l-1}\right).$$

其中 $Y_{-1}=0$。根据期望的线性性质，可得

$$\mathbb{E}\left[Y_L\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\left(Y_l-Y_{l-1}\right)\right]=\sum_{l=0}^{L}\mathbb{E}\left[Y_l-Y_{l-1}\right].$$

为了从上述表达式中推导出期望值的多级估计器，用蒙特卡洛方法对 $\mathbb{E}\left[Y_l-Y_{l-1}\right]$ 进行近似估计，样本数为 N_l，然后可以定义多级蒙特卡洛估计器

$$E^L\left[Y_L\right]=\sum_{l=0}^{L}E_{N_l}\left[Y_l-Y_{l-1}\right]. \tag{26}$$

有了上述两个估计器，就可以进行本节的主要工作，推导出误差的收敛结果。

4.1. 单级蒙特卡洛近似

引理 4.2 [11]对于任意 $N\in\mathbb{N}$ 和 $Y\in L^2_{(\Omega;H)}$，成立

$$\left\|\mathbb{E}[Y]-E_N[Y]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}=\frac{1}{\sqrt{N}}Var[Y]^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{\sqrt{N}}\|Y\|_{L^2_{(\Omega;H)}}. \tag{27}$$

注释 4.1 引理 4.2 是针对 $L^2_{(\Omega;H)}$ 中的任意随机变量 Y 而提出的。在接下来的证明中，对于 $l,n\in\mathbb{N}_0$ 和 $t\in\Theta^n$，我们估计离散温和解的蒙特卡洛误差，根据引理 4.2，其边界为

$$\left\|\mathbb{E}\left[X_l^n(t)\right]-E_N\left[X_l^n(t)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le\frac{1}{\sqrt{N}}\left\|X_l^n(t)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}.$$

另外，对于 $t_k^n=t$，运用假设 2.1，(4)，(20)，(23)和离散 Gronwall 不等式[15]可得类似引理 2.1 的结论

$$\left\|X_{l,n}(t)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L_{(\Omega;H)}}\right).$$

由此估计进一步可得

$$\sup_{t\in\Theta^n}\left\|\mathbb{E}\left[X_l^n(t)\right]-E_N\left[X_l^n(t)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}=\frac{1}{\sqrt{N}}C(T)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\right).$$

定理 4.1 如果 X 是(3)的温和解，$\left(X_{l,n}, l,n\in\mathbb{N}_0\right)$ 是(15)中引入的离散解序列，那么存在常数 $C(T)$，使得对于所有 $l,n\in\mathbb{N}_0$ 成立

$$\sup_{t\in\Theta^n}\left\|X(t)-X_{l,n}(t)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

证明对于 $l,n\in\mathbb{N}_0$，$t_k^n\in\Theta^n$，误差为

$$\begin{aligned}\left\|X\left(t_k^n\right)-X_{l,n}\left(t_k^n\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}&\le\left\|\left(E\left(t_k^n\right)-E^k_{\delta t^n,l}P_l\right)X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&+\left\|\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(AE\left(t_k^n-s\right)f\left(X(s)\right)-A_lE^{k-j+1}_{\delta t^n,l}P_lf\left(X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&+\left\|\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(E\left(t_k^n-s\right)-E^{k-j+1}_{\delta t^n,l}P_l\right)\mathrm{d}W(s)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}:=3\left(\mathbb{I}+\mathbb{J}+\mathbb{K}\right).\end{aligned}$$

对第一项，由式(21)可以推得

$$\mathbb{I}=\left\|E\left(t_k^n\right)-E_{\delta,l}^k P_l X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left\|X_0\right\|_{L^2(\Omega,V)}.$$

第二项可以分解为

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}&=\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(AE\left(t_k^n-s\right)f\left(X(s)\right)-A_l E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l f\left(X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\
&\le\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(AE\left(t_k^n-s\right)-A_l E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\right)f\left(X(s)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\
&\quad+\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}A_l E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\left(f\left(X(s)\right)-f\left(X\left(t_j^n\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\
&\quad+\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}A_l E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\left(f\left(X\left(t_j^n\right)\right)-f\left(X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}})\\
&:=3\left(\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_2+\mathbb{J}_3\right).
\end{aligned}$$

由假设 2.1，(24)，注释 4.1 得

$$\mathbb{J}_1\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left\|f\left(X(s)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|^2_{L^2_{(\Omega;H)}}\right).$$

运用(4.2)，引理 2.2 可得

$$\mathbb{J}_2\le C\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(t_{k-j+1}^n\right)^{-\frac{1}{2}}\left\|X(s)-X\left(t_j^n\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\mathrm{d}s\le C(T)\sqrt{\delta t^n}\left(1+\left\|X_0\right\|^2_{L^2_{(\Omega;H)}}\right).$$

通过假设 2.1，(24)得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_3&\le\left(\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left\|A_l E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\left(f\left(X\left(t_j^n\right)\right)-f\left(X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right)\right)\right\|^2_{L^2_{(\Omega;H)}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le\left(C(T)\sum_{j=1}^k\left\|X\left(t_j^n\right)-X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right\|^2_{L^2_{(\Omega;H)}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C(T)\sum_{j=1}^k\left\|X\left(t_j^n\right)-X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}.
\end{aligned}$$

对第三项，由(22)得

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}&=\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\left(E\left(t_k^n-s\right)-E_{\delta t^n,l}^{k-j+1}P_l\right)\mathrm{d}W(s)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\
&\le C\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\sum_{j=1}^k\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}\|1\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\mathrm{d}s\\
&\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right).
\end{aligned}$$

综上，运用离散 Gronwall 引理可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|X\left(t_k^n\right)-X_{l,n}\left(t_k^n\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}} \\
&\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right)+C(T)\sum_{j=1}^{k}\left\|X\left(t_j^n\right)-X_{l,n}\left(t_j^n\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}} \\
&\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right)\prod_{j=1}^{k}\left(1+C(T)\right) \\
&\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right)\mathrm{e}^{T\cdot C(T)}.
\end{aligned}
$$

定理 4.2 如果 X 是(3)的温和解，$\left(X_{l,n},l,n\in\mathbb{N}_0\right)$ 是(15)中引入的离散解序列，那么存在常数 $C(T)$，使得对于所有 $l,n\in\mathbb{N}_0$，$N\in\mathbb{N}$ 成立

$$
\sup_{t\in\Theta^n}\left\|\mathbb{E}\left[X(t)\right]-E_N\left[X_{l,n}(t)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^n}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\right).
$$

对于任意给定的离散级别 $l\in\mathbb{N}_0$，最优时间离散级别为 $n\in\mathbb{N}_0$，蒙特卡罗抽样规模为 $N_l=N$。$h_l=2^{-l}$，由定理 4.2 当 $\delta t^n\simeq h_l^4$ 时，空间误差和时间误差达到平衡，因此 $n=4l$。根据定理 4.2 所示的收敛速率，易知对于 $l\in\mathbb{N}_0$ 的离散化和采样误差，可以通过以下选择实现平衡：

$$
\left(N_l\right)^{-\frac{1}{2}}\simeq h_l^2,\quad resp.\quad N_l\simeq h_l^{-4}.
$$

4.2. 多级蒙特卡洛近似

在上一小节中确定了单级蒙特卡洛法的误差界，接下来在本小节中将证明多级蒙特卡洛近似的误差界。

根据之前关于单级蒙特卡洛方法收敛性和各种误差贡献平衡的结论，使用时间区间 $\mathbb{T}=[0,T]$ 的等距剖分 $\left(\Theta^l,l\in\mathbb{N}_0\right)$

$$
\Theta^l=\left\{t_{k(l)}^l=T2^{-4l}k(l),k(l)=0,\cdots,2^{4l}\right\},
$$

根据前一节的概念，有 $n=4l$。用 $\delta t^l=T/2^{4l}$ 表示 $l\in\mathbb{N}_0$ 中 Θ^l 的时间步长。设置 $h_l\simeq 2^{-l},l\in\mathbb{N}_0$，在多级蒙特卡洛离散化误差分析中，用 $n=4l$ 将空间离散化级别与时间离散化级别联系起来，这解释了时间网格的重新定义。

对 $\Theta^l,l=0,\cdots,L$，我们对解应用如下插值：

$$
X_{l-1}\left(t_{k(l)}^L\right)=a_lX_{l-1}\left(t_{k(l-1)}^{l-1}\right)+b_lX_{l-1}\left(t_{k(l-1)+1}^{l-1}\right). \tag{28}
$$

其中，

$$
a_l=1-\left(\frac{k(l)}{16}-\left[\frac{k(l)}{16}\right]\right),b_l=\frac{k(l)}{16}-\left[\frac{k(l)}{16}\right]
$$

$[\cdot]$ 为取整符号。迭代(28)式得

$$
X_l\left(t_{k(L)}^L\right)=a_{l:L}X_l\left(t_{k(l)}^L\right)+b_{l:L}X_l\left(t_{k(l)+1}^l\right). \tag{29}
$$

其中，

$$
a_{l:L}=a_{l+1}-\sum_{i=l+2}^{L}\frac{1}{2^{4(i-(l+2)+1)}}b_i,b_{l:L}=b_{l+1}+\sum_{i=l+2}^{L}\frac{1}{2^{4(i-(l+2)+1)}}b_i
$$

注意 $a_{l:L}+b_{l:L}=1$，$l=0,\cdots,L-1$。通过该线性插值，可以证明得到如下关于多级蒙特卡罗估计收敛性的结论。

定理 4.3 如果 X 是(3)的温和解，$\left(X_l,l\in\mathbb{N}_0\right)$ 是(15)中引入的离散解序列，那么存在常数 $C(T)$，使得对于所有 $L\in\mathbb{N}_0$ 成立

$$\sup_{t\in\Theta^L}\left\|\mathbb{E}\left[X(t)\right]-E^L\left[X_L(t)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)\left(h_L^2+\frac{1}{\sqrt{N_0}}+\sum_{i=0}^{L}\frac{1}{\sqrt{N_l}}h_l^2\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\right).$$

证明对 $L\in\mathbb{N}_0$，选择 $t^L_{k(L)}\in\Theta^L$，将误差分解为

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbb{E}\left[X\left(t^L_{k(L)}\right)\right]-E^L\left[X_L\left(t^L_{k(L)}\right)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\le\left\|X\left(t^L_{k(L)}\right)-X_L\left(t^L_{k(L)}\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}+\sum_{l=0}^{L}\left\|\left(\mathbb{E}-E_{N_l}\right)\left[X_l\left(t^L_{k(L)}\right)-X_{l-1}\left(t^L_{k(L)}\right)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&=\mathbb{A}+\mathbb{B}.\end{aligned}$$

由定理 4.1 及 $\delta t^n\simeq h_l^4$ 得

$$\left\|X\left(t^L_{k(L)}\right)-X_L\left(t^L_{k(L)}\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\le C(T)h_L^2\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

对于 $\mathbb{B}$，运用引理 4.2

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{L}\left\|\left(\mathbb{E}-E_{N_l}\right)\left[X_l\left(t^L_{k(L)}\right)-X_{l-1}\left(t^L_{k(L)}\right)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\le\frac{1}{\sqrt{N_l}}\left\|X_l\left(t^L_{k(L)}\right)-X_{l-1}\left(t^L_{k(L)}\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\le\frac{1}{\sqrt{N_l}}\left(\left\|X_l\left(t^L_{k(L)}\right)-X\left(t^L_{k(L)}\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}+\left\|X\left(t^L_{k(L)}\right)-X_{l-1}\left(t^L_{k(L)}\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\right)\\&\le\mathbb{B}_1+\mathbb{B}_2.\end{aligned}$$

运用定理 4.1，引理 2.2 和(29)可得

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1&\le\left\|a_{l:L}X_l\left(t^l_{k(l)}\right)+b_{l:L}X_l\left(t^l_{k(l)+1}\right)-\left(a_{l:L}X\left(t^L_{k(L)}\right)+b_{l:L}X\left(t^L_{k(L)}\right)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\le\left\|a_{l:L}\left(X_l\left(t^l_{k(l)}\right)-X\left(t^l_{k(l)}\right)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}+\left\|a_{l:L}\left(X\left(t^l_{k(l)}\right)-X\left(t^L_{k(L)}\right)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\quad+\left\|b_{l:L}\left(X_l\left(t^l_{k(l)+1}\right)-X\left(t^l_{k(l)+1}\right)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}+\left\|b_{l:L}\left(X\left(t^l_{k(l)+1}\right)-X\left(t^L_{k(L)}\right)\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}}\\&\le\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2+\mathbb{L}_3+\mathbb{L}_4.\end{aligned}$$

由定理 4.1，

$$\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_3\le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^l}\right)\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

根据引理 2.2，

$$\mathbb{L}_2\le C(T)\sqrt{\left|t^l_{k(l)}-t^L_{k(L)}\right|}\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2(\Omega,V)}\right)\le C(T)\sqrt{\delta t^l}\left(1+\left\|X_0\right\|_{L^2(\Omega,V)}\right).$$

第四项 $\mathbb{L}_4$ 有类似结果。从而可得

$$\mathbb{B}_1 \le C(T)\left(h_l^2+\sqrt{\delta t^l}\right)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right)$$

$$\mathbb{B}_2 \le C(T)\left(h_{l-1}^2+\sqrt{\delta t^{l-1}}\right)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

因为 $h_l = 2^{-1}h_{l-1}$，$\delta t^l = 2^{-4}\delta t^{l-1}$，$\delta t^l = h_l^4$，则

$$\left\|X_l\left(t_{k(L)}^L\right)-X_{l-1}\left(t_{k(L)}^L\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}} \le C(T)h_l^2\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

当 $l=0$，

$$\mathbb{B}_2 = \left\|X\left(t_{k(L)}^L\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;V)}} \le C(T)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

由上述结果可得

$$\mathbb{B} = \sum_{l=0}^{L}\frac{1}{\sqrt{N_l}}\left\|X_l\left(t_{k(L)}^L\right)-X_{l-1}\left(t_{k(L)}^L\right)\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}} \le C(T)\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}+\sum_{l=0}^{L}\frac{1}{\sqrt{N_l}}h_l^2\right)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).$$

综上

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{E}\left[X\left(t_{k(L)}^L\right)\right]-E^L\left[X_L\left(t_{k(L)}^L\right)\right]\right\|_{L^2_{(\Omega;H)}} \\
&\le C(T)h_L^2\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right)+C(T)\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}+\sum_{l=0}^{L}\frac{1}{\sqrt{N_l}}h_l^2\right)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right) \\
&\le C(T)\left(h_L^2+\frac{1}{\sqrt{N_0}}+\sum_{l=0}^{L}\frac{1}{\sqrt{N_l}}h_l^2\right)\left(1+\|X_0\|_{L^2_{(\Omega;V)}}\right).
\end{aligned}$$

定理得证。

5. 总结

本文运用多级蒙特卡洛有限元方法求解对数势 Cahn-Hilliard-Cook 方程，首先给出方程温和解的相关正则性结果，随后在空间和时间上分别用有限元法和向后欧拉格式进行离散化，得到了方程的全离散数值格式，给出了方程解的正则性结果，最终进行了误差分析和收敛阶的估计。

多级蒙特卡洛方法存在取样不均匀、部分取样过密过疏的缺点，从而影响模拟结果。而多级准蒙特卡洛方法在这方面加以改进，进一步提高了数值精度。接下来我们考虑利用多级准蒙特卡洛方法来求解 Cahn-Hilliard-Cook 方程。

基金项目

国际合作基地与平台项目：基于 AFEM 的向列相液晶材料动力学建模与数值模拟研究(202104041101019)。

参考文献

[1] Cook, H. (1970) Brownian Motion in Spinodal Decomposition. *Acta Metallurgica*, **18**, 297-306. https://doi.org/10.1016/0001-6160(70)90144-6

[2] Da Prato, G. and Debussche, A. (1996) Stochastic Cahn-Hilliard Equation. *Nonlinear Analysis*, **26**, 241-263. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00277-O

[3] Larsson, S. and Mesforush, A. (2011) Finite-Element Approximation of the Linearized Cahn-Hilliard-Cook Equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **31**, 1315-1333. https://doi.org/10.1093/imanum/drq042

[4] Furihata, D., Kovács, M., Larsson, S. and Lindgren, F. (2018) Strong Convergence of a Fully Discrete Finite Element Approximation of the Stochastic Cahn-Hilliard Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **56**, 708-731. https://doi.org/10.1137/17M1121627

[5] Qi, R.S. and Wang, X.J. (2020) Error Estimates of Semi-Discrete and Fully Discrete Finite Element Methods for the Cahn-Hilliard-Cook Equation F. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **58**, 1393-2018. https://doi.org/10.1137/19M1259183

[6] Cardon-Weber, C. (2002) Implicit Approximation Scheme for the Cahn-Hilliard Stochastic Equation. Laboratoire des Probabilites et Modeleles Aleatoires, Universite Paris V.

[7] Cui, J.B., Hong, J.L. and Sun, L.Y. (2018) Strong Convergence Rate of a Full Discretization for Stochastic Cahn-Hilliard Equation Driven by Space-Time White Noise. arXiv: 1812.06289.

[8] Hutzenthaler, M. and Jentzen, A. (2020) On a Perturbation Theory and on Strong Convergence Rates for Stochastic Ordinary and Partial Differential Equations with Non-Globally Monotone Coefficients. *The Annals of Probability*, **48**, 53-93. arXiv: 1401.0295. https://doi.org/10.1214/19-AOP1345

[9] Li, X., Qiao, Z.H. and Zhang, H. (2016) An Unconditionally Energy Stable Finite Difference Scheme for a Stochastic Cahn-Hilliard Equation. *Science China Mathematics*, **59**, 1815-1834. https://doi.org/10.1007/s11425-016-5137-2

[10] Giles, M.B. (2008) Multilevel Monte Carlo Path Simulation. *Operations Research*, **56**, 607-617. https://doi.org/10.1287/opre.1070.0496

[11] Barth, A., Lang, A. and Schwab, C. (2013) Multilevel Monte Carlo Method for Parabolic Stochastic Partial Differential Equations. *BIT Numerical Mathematics*, **53**, 3-27. https://doi.org/10.1007/s10543-012-0401-5

[12] Barrett, J.W. and Blowey, J.F. (1999) Finite Element Approximation of the Cahn-Hilliard Equation with Concentration Dependent Mobility. *Mathematics of Computation*, **68**, 487-517. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01015-7

[13] Da Prato, G. and Zabczyk, J. (1992) Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511666223

[14] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. In: Marsden, J.E., Sirovich, L. and John, F., Eds., *Applied Mathematical Sciences* (Volume 44), Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[15] Clark, D.S. (1987) Short Proof of a Discrete Gronwall Inequality. *Discrete Applied Mathematics*, **16**, 279-281. https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90064-3