

融合改进的张量相关全变分的鲁棒张量修补用于图像修复

黄凯¹, 李忠宁²

¹西南大学数学与统计学院, 重庆

²银川能源学院基础部, 宁夏 银川

收稿日期: 2024年3月3日; 录用日期: 2024年5月6日; 发布日期: 2024年5月14日

摘要

图像在采集和捕捉过程中, 往往存在噪声污染和缺失等退化情况, 而鲁棒补全对此发挥着重要作用。目前这些方法大多利用图像的全局低秩和局部平滑先验来对其进行建模, 包括独立编码方法和融合编码方法。然而, 这些方法要么需要对两个以上参数进行繁琐的调整, 要么平等地对待梯度矩阵/张量的每个奇异值, 从而限制了处理实际问题的灵活性。在本文中, 我们提出了改进的张量相关全变分(ITCTV)范数, 以充分利用梯度张量的内在结构特性。所提出的ITCTV正则化器不需要权衡参数来平衡两个先验, 并且进一步有效地利用了梯度张量奇异值的先验分布信息。我们将提出的方法应用在多种类型的视觉张量数据上, 实验结果证明了所提出方法在图像修复上的有效性。

关键词

鲁棒补全, 改进的张量相关全变分, 先验信息, 图像修复

Robust Tensor Completion Fusing Improved Tensor Correlated Total Variation for Image Restoration

Kai Huang¹, Zhongning Li²

¹School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

²Yinchuan Energy Institute Foundation Department, Yinchuan Ningxia

Received: Mar. 3rd, 2024; accepted: May 6th, 2024; published: May 14th, 2024

Abstract

In the process of image acquisition and capture, there is often degradation such as noise pollution and missing, and robust completion plays an important role in this. Most current methods for image restoration exploit global low-rankness and local smoothness priors to model them, including independent coding methods and fusion coding methods. However, these methods either require tedious tuning of more than two parameters or treat each singular value of the gradient matrices/tensors equally, thus limiting the flexibility to deal with practical problems. In this paper, we propose an improved tensor correlated total variation (ITCTV) norm to take full advantage of the intrinsic structural properties of the gradient tensors. The proposed ITCTV regularizer does not need to trade-off parameters to balance the two priors, and further effectively utilizes the prior distribution information of the singular values of the gradient tensors. We apply the proposed method to various types of visual tensor data, and the experimental results prove the effectiveness of the proposed method in image restoration.

Keywords

Robust Completion, Improved Tensor Correlated Total Variation, Prior Information, Image Restoration

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着当前人工智能、大数据、云计算等现代信息技术的快速发展,在计算机视觉、生物医学等诸多应用领域中产生了多种多样的张量数据。其中图像因其在信息传达上具有直观、形象的特点,在信息传播中该数据存在形式占据了大部分。然而,这些图像在采集和捕捉过程中,由于受到传输物质、成像设备等自身的局限,甚至被外部环境干扰,导致图像总是存在明显的退化,比如受到不同程度的各种噪声的污染或者缺失等。这些退化会严重降低图像的质量,进而影响后续处理的准确性。因此,如何修复这些图像成为了改善后续任务(如目标检测[1]、图像分类[2]和图像分割[3]等)性能的关键预处理步骤。

上述退化问题实际上产生了张量恢复研究中的两个经典逆问题,即张量鲁棒主成分分析(TRPCA) [4]和张量修补(TC) [5]。解决这两个问题的关键在于如何表征张量的内部先验结构,并将其编码为相应的正则化项,然后基于该正则化项进行相关建模。近年来,以低秩假设为前提的低秩张量恢复(LRTR) [6]为上述问题提供了有效的解决办法。然而,LRTR的研究也是面临着巨大的挑战。一方面,张量秩的定义并不像矩阵那样唯一,其定义依赖于张量分解的方式,目前张量分解中CP、Tucker、HOSVD最具代表性。另一方面,张量秩函数的凸替代和非凸替代的选择或者构造对于恢复底层图像数据的效果也起到了至关重要的作用。这种低秩先验实际上代表了图像全局范围内的信息相关性,即图像处于低维子空间中。除了低秩先验之外,以全变分(TV) [7]为代表的局部平滑先验也普遍应用于图像修复。局部平滑先验反映了图像中相邻像素之间像素值的连续变化,它对于恢复图像的局部细节十分重要。因此,大多数工作集中于对全局低秩和局部平滑这两个先验进行联合建模,并将这两个先验编码为恢复模型中两个独立正则化项的和,然后调整相应的正则化参数以提升模型的性能。

然而, 由于这两个先验在现实世界中通常是相互耦合的, 即它们并不像传统模型中所暗示的那样独立发生, 而且在实际场景中构建微调这两个独立正则化项对应的权衡参数的一般准则具有挑战性。鉴于上述情况, 最近的工作[8] [9]基于梯度域将全局低秩和局部平滑这两个先验融合为一个独特的正则化项, 该正则化项不仅使全局低秩和局部平滑先验更加紧密地联系在一起, 更符合这两个先验本质上相互耦合的事实, 而且还减少了传统模型中需要调整的权衡参数。不幸的是, 这两项工作都使用核范数来描述梯度图的结构特性, 即平等地对待梯度矩阵/张量的每个奇异值, 因此其模型的性能仍有进一步改进的空间。因为在实际应用中, 图像的各个奇异值由于其特定的物理意义而存在明显的差异。

为了解决上述问题, 我们引入了改进的张量相关全变分(ITCTV)范数, 其中使用的改进策略有助于进一步表征梯度张量的低秩性和固有稀疏性。我们的主要动机是梯度张量中那些较大的奇异值应该受到较少的惩罚, 这是相当合理的。因此, 我们对梯度张量采用重加权策略, 以利用上述存在的先验信息。对于重加权策略的选择, 我们采用了相关文献[10] [11]中使用的重加权策略, 它近似地还原了 $0 \leq p < 1$ 的 Schatten-p 范数最小化问题。正确地说, 不同于矩阵 \mathbf{X} 的传统加权核范数中所使用的加权策略 $w_i = c(\sigma_i(\mathbf{X}) + \varepsilon)^{-1}$, 由重加权核范数指定的重加权策略 $w_i = c(\sigma_i(\mathbf{X}) + \varepsilon)^{p-1}$ 可以更全面地表征真实图像中奇异值的先验分布信息。我们基于所提出的 ITCTV 正则化器构建了相应的鲁棒张量修补模型, 并将其应用到不同类型的视觉张量数据中, 结果表明我们的方法较于其他方法在数值和视觉上都有优越的竞争力。

2. 基于改进的张量相关全变分的鲁棒张量修补算法

2.1. ITCTV 正则化器

为了充分利用梯度域下梯度张量的奇异值的先验分布信息, 以此提高 TCTV 范数[9]的灵活性, 我们提出了改进的张量相关全变分(ITCTV)范数, 并将其定义如下:

$$\|\mathcal{X}\|_{ITCTV} := \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \|\mathcal{G}_k\|_{w, \otimes, \mathcal{L}} \quad (1)$$

其中 \mathcal{L} 代表可逆线性变换, 它可以是离散傅里叶变换(DFT)或离散余弦变换(DCT), 或其他一些可逆线性变换, 只要可逆线性变换所对应的变换矩阵满足 $U_{n_3} \times U_{n_3}^* = U_{n_3}^* \times U_{n_3} = n_3 I_{n_3}$ 。

为了方便起见, 我们忽略下标, 将上面梯度张量的重加权核范数定义为:

$$\|\mathcal{G}\|_{w, \otimes, \mathcal{L}} = \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\mathcal{G}_{\mathcal{L}}^{(i)}\|_{w, \otimes} = \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{\min\{n_1, n_2\}} w_{ij} \sigma_j(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}^{(i)}) \quad (2)$$

其中 $w_{ij} = c / (\sigma_j(\mathcal{G}_{\mathcal{L}}^{(i)}) + \varepsilon)^{1-p}$ 且 $0 < p \leq 1$, 本文统一设 $1-p=q$; c 为常数, 本文实验中默认设置 $c=1$; ε 是一个足够小的正数, 以避免在对应的奇异值为零时被零除, 在本文的实验中设置为 $\varepsilon=10^{-8}$ 。已经证明, 当给矩阵的重加权核范数赋予这样的权重时, 它可以逼近其对应的 Schatten-p 范数[11]。请注意, 上述权重满足小阈值以收缩大奇异值和大阈值以收缩小奇异值的功能。

2.2. t-WSVT 阈值算子

本小节我们给出矩阵加权奇异值阈值算子的相关引理, 并基于此给出张量加权奇异值阈值算子的相关定理及其证明。

引理(WSVT) [12]: 对于给定的矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, 将其 SVD 分解表示为 $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, 那么对于任何 $\tau > 0$ 和满足 $0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$ 和 $m = \min\{n_1, n_2\}$ 的权重向量 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$, 对于每个 $\tau > 0$, 矩阵加权奇异值阈值(WSVT)算子定义如下:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w},\tau}(\mathbf{Y}) = \mathbf{U}\mathbf{S}_{\mathbf{w},\tau}\mathbf{V}^T \quad (3)$$

其中 $\mathbf{S}_{\mathbf{w},\tau} = \text{Diag}\left\{\left(\sigma_i(\mathbf{X}) - \tau w_i\right)_+, i=1,2,\dots,m\right\}$ 。对于任意 $\tau > 0$ 且 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, WSVT 算子满足:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w},\tau}(\mathbf{Y}) = \arg \min_{\mathbf{X}} \tau \|\mathbf{X}\|_{\mathbf{w},*} + \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_F^2 \quad (4)$$

定理(t-WSVT): 对于给定的张量 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 将其 t-SVD 表示为 $\mathcal{Y} = \mathcal{U} *_{\mathcal{L}} \mathcal{S} *_{\mathcal{L}} \mathcal{V}^T$ 。然后, 对于任何 $\tau > 0$ 且具有非降序权重 $0 \leq w_{1i} \leq w_{2i} \leq \dots \leq w_{di}$ ($d = \min\{n_1, n_2\}, i=1,2,\dots,n_3$), 对于每个 $\tau > 0$, 我们定义张量加权奇异值阈值(t-WSVT)算子如下:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{W},\tau}(\mathcal{Y}) = \mathcal{U} *_{\mathcal{L}} \mathcal{S}_{\mathcal{W},\tau} *_{\mathcal{L}} \mathcal{V}^T \quad (5)$$

其中 $\mathcal{S}_{\mathcal{W},\tau} = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\mathcal{S}_{\mathcal{L}} - \tau \mathcal{W}\right)_+\right)$ 。注意 t_+ 表示 t 的正数部分, 即 $t_+ = \max(t, 0)$; 而 $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 是 f-对角张量, 其第 i 个正面切片的对角线元素等于权重矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ji})_{d \times n_3}$ 的第 i 列。特别地, 当可逆线性变换 \mathcal{L} 为 DFT 时, $\mathcal{S}_{\mathcal{W},\tau} = \text{ifft}\left(\left(\overline{\mathcal{S}} - \tau \mathcal{W}\right)_+, [\cdot, \cdot, 3]\right)$ 。对于任意 $\tau > 0$ 且 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, t-WSVT 算子满足:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{W},\tau}(\mathcal{Y}) = \arg \min_{\mathcal{X}} \tau \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{w},*\mathcal{L}} + \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_F^2 \quad (6)$$

证明: 式(6)等价于

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{X}} \tau \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{\min\{n_1, n_2\}} w_{ij} \sigma_j\left(\mathcal{X}_{\mathcal{L}}^{(i)}\right) + \frac{1}{2n_3} \|\text{bdiag}(\mathcal{X}_{\mathcal{L}}) - \text{bdiag}(\mathcal{Y}_{\mathcal{L}})\|_F^2 \\ & = \min_{\mathcal{X}} \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \left(\tau \sum_{j=1}^{\min\{n_1, n_2\}} w_{ij} \sigma_j\left(\mathcal{X}_{\mathcal{L}}^{(i)}\right) + \frac{1}{2} \|\mathcal{X}_{\mathcal{L}}^{(i)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{L}}^{(i)}\|_F^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

注意变量 $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}^{(i)}$ 是独立的。那么, 上述问题可以分解为 n_3 个独立的子问题。该定理表明 t-WSVT 算子 $\mathcal{D}_{\mathcal{W},\tau}(\mathcal{Y})$ 给出了具有特定线性变换的张量重加权核范数的阈值收缩解。

3. 基于 ADMM 框架的优化求解算法

基于所提出的 ITCTV 正则化器, 我们构建如下的鲁棒张量修补模型:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \|\mathcal{G}_k\|_{\mathbf{w},\otimes,\mathcal{L}} + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X} + \mathcal{E}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{M}), \mathcal{G}_k = \nabla_k(\mathcal{X}) \end{aligned} \quad (8)$$

通过引入辅助变量 \mathcal{K} , 使得 $\mathcal{X} + \mathcal{E} = \mathcal{M} + \mathcal{K}$, 那么上述模型(8)可以重新表述为:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \|\mathcal{G}_k\|_{\mathbf{w},\otimes,\mathcal{L}} + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathcal{X} + \mathcal{E} = \mathcal{M} + \mathcal{K}, \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{K}) = 0, \mathcal{G}_k = \nabla_k(\mathcal{X}) \end{aligned} \quad (9)$$

根据 ADMM 框架[13]对上述模型(9)进行求解, 我们写出它的增广拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\mathcal{X}, \{\mathcal{G}_k, k=1,2,3\}, \mathcal{E}, \mathcal{K}, \{\Lambda_k, k=1,2,3\}, \Upsilon) \\ & = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \|\mathcal{G}_k\|_{\mathbf{w},\otimes,\mathcal{L}} + \langle \Lambda_k, \nabla_k(\mathcal{X}) - \mathcal{G}_k \rangle + \frac{\mu}{2} \|\nabla_k(\mathcal{X}) - \mathcal{G}_k\|_F^2 \right) \\ & \quad + \langle \Upsilon, \mathcal{M} + \mathcal{K} - \mathcal{X} - \mathcal{E} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{M} + \mathcal{K} - \mathcal{X} - \mathcal{E}\|_F^2 + \lambda \|\mathcal{E}\|_1 \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\{\Lambda_k, k=1,2,3\}$ 和 Υ 是拉格朗日乘子, μ 是惩罚参数。那么基于 ADMM 的框架, 第 $(t+1)$ 次迭代中模型(9)中所涉及变量的更新方式具体如下:

更新 \mathcal{X}^{t+1} : 通过增广拉格朗日函数(10)式, 可以得到关于 \mathcal{X} 的优化子问题:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{t+1} &= \arg \min_{\mathcal{X}} \sum_{k=1}^3 \left(\left\langle \Lambda_k^t, \nabla_k(\mathcal{X}) - \mathcal{G}_k^t \right\rangle + \frac{\mu_t}{2} \left\| \nabla_k(\mathcal{X}) - \mathcal{G}_k^t \right\|_F^2 \right) \\ &\quad + \left\langle \Upsilon^t, \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X} - \mathcal{E}^t \right\rangle + \frac{\mu_t}{2} \left\| \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X} - \mathcal{E}^t \right\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_t}{2} \left\| \nabla_k(\mathcal{X}) - \mathcal{G}_k^t + \frac{\Lambda_k^t}{\mu_t} \right\|_F^2 + \frac{\mu_t}{2} \left\| \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X} - \mathcal{E}^t + \frac{\Upsilon^t}{\mu_t} \right\|_F^2\end{aligned}\quad (11)$$

对(11)中的 \mathcal{X} 求导, 我们可以得到更新 \mathcal{X} 的方程为:

$$\left(\mathcal{I} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k^T \nabla_k \right) (\mathcal{X}) = \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{E}^t + \frac{\Upsilon^t}{\mu_t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k^T \left(\mathcal{G}_k^t - \frac{\Lambda_k^t}{\mu_t} \right)\quad (12)$$

其中 $\nabla_k^T(\cdot)$ 表示 $\nabla_k(\cdot)$ 的转置结果运算符。那么我们可以在傅里叶域中, 考虑将 $\nabla_k(\cdot)$ 对应的差分张量 \mathcal{D}_k 对角化, 并利用卷积定理得到式(12)的最优解来更新 \mathcal{X} :

$$\mathcal{X}^{t+1} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}(\mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{E}^t + \Upsilon^t/\mu_t) + \mathcal{H}}{1 + \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}(\mathcal{D}_k)^* \odot \mathcal{F}(\mathcal{D}_k)} \right)\quad (13)$$

其中 $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^3 \mathcal{F}(\mathcal{D}_k)^* \odot \mathcal{F}(\mathcal{G}_k^t - \Lambda_k^t/\mu_t)$, $\mathbf{1}$ 为所有元素均为 1 的张量, \odot 是逐元素乘法。

更新 \mathcal{G}_k^{t+1} : 通过增广拉格朗日函数(10)式, 可以得到关于 \mathcal{G}_k 的优化子问题:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_k^{t+1} &= \arg \min_{\mathcal{G}_k} \frac{1}{3} \left\| \mathcal{G}_k \right\|_{w, \odot, \Sigma} + \left\langle \Lambda_k^t, \nabla_k(\mathcal{X}^{t+1}) - \mathcal{G}_k \right\rangle + \frac{\mu_t}{2} \left\| \nabla_k(\mathcal{X}^{t+1}) - \mathcal{G}_k \right\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{G}_k} \frac{1}{3} \left\| \mathcal{G}_k \right\|_{w, \odot, \Sigma} + \frac{\mu_t}{2} \left\| \nabla_k(\mathcal{X}^{t+1}) - \mathcal{G}_k + \frac{\Lambda_k^t}{\mu_t} \right\|_F^2\end{aligned}\quad (14)$$

因此, 我们可以通过之前定义的 t -WSVT 阈值算子来更新 \mathcal{G}_k^{t+1} , 即

$$\mathcal{G}_k^{t+1} = t\text{-WSVT}_{1/3, \mu_t} \left(\nabla_k(\mathcal{X}^{t+1}) + \frac{\Lambda_k^t}{\mu_t} \right)\quad (15)$$

更新 \mathcal{E}^{t+1} : 通过增广拉格朗日函数(10)式, 可以得到关于 \mathcal{E}^{t+1} 的优化子问题:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{t+1} &= \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda \left\| \mathcal{E} \right\|_1 + \left\langle \Upsilon^t, \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{E} \right\rangle + \frac{\mu_t}{2} \left\| \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{E} \right\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda \left\| \mathcal{E} \right\|_1 + \frac{\mu_t}{2} \left\| \mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{E} + \frac{\Upsilon^t}{\mu_t} \right\|_F^2\end{aligned}\quad (16)$$

通过使用下面定义的张量软阈值算子, 我们可以得到以下阈值收缩等式来更新 \mathcal{E}^{t+1} , 即

$$\mathcal{E}^{t+1} = \mathcal{S}_{\lambda/\mu_t} \left(\mathcal{M} + \mathcal{K}^t - \mathcal{X}^{t+1} + \frac{\Upsilon^t}{\mu_t} \right)\quad (17)$$

其中 $\mathcal{S}_{\zeta}(\cdot)$ 是关于阈值为 ζ 的张量软阈值算子, 满足:

$$\left[\mathcal{S}_{\zeta}(\mathcal{X}) \right]_{ijk} = \text{sgn}(x_{ijk}) \max(|x_{ijk}| - \zeta, 0)\quad (18)$$

更新 \mathcal{K}^{t+1} :

$$\mathcal{K}^{t+1} = \mathcal{X}^{t+1} + \mathcal{E}^{t+1} - \mathcal{M} - \frac{\Upsilon^t}{\mu_t}, \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{K}^{t+1}) = 0 \quad (19)$$

更新乘子 Λ_k^{t+1} 和 Υ^{t+1} :

$$\begin{cases} \Lambda_k^{t+1} = \Lambda_k^t + \mu_t (\nabla_k(\mathcal{X}^{t+1}) - \mathcal{G}_k^{t+1}) \\ \Upsilon^{t+1} = \Upsilon^t + \mu_t (\mathcal{M} + \mathcal{K}^{t+1} - \mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{E}^{t+1}) \end{cases} \quad (20)$$

我们将上述基于 ITCTV 的鲁棒张量修补算法总结在算法 1 中。

算法 1: 基于 ITCTV 的鲁棒张量修补算法

输入: 观测图像 \mathcal{M} , 观测集 Ω , 可逆线性变换 \mathcal{L} , 参数 λ , q

初始点: $\mathcal{G}_k^0 = \nabla_k(\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M}))$, $\mathcal{X}^0 = \mathcal{E}^0 = \Upsilon^0 = \Lambda_k^0 = \mathcal{O}$, $\rho = 1.1$, $\mu_0 = 10^{-4}$, $\mu_{\max} = 10^{10}$, $\epsilon = 10^{-8}$

1: while not converge do

2: 通过式子(13)更新 \mathcal{X}^{t+1}

3: 通过式子(15)更新 \mathcal{G}_k^{t+1}

4: 通过式子(17)更新 \mathcal{E}^{t+1}

5: 通过式子(19)更新 \mathcal{K}^{t+1}

6: 通过式子(20)更新 Λ_k^{t+1} 和 Υ^{t+1}

7: 更新 μ 和 t , $\mu_{t+1} = \min(\rho\mu_t, \mu_{\max})$, $t = t + 1$

8: 检查收敛条件

$$\|\mathcal{X}^{t+1} - \mathcal{X}^t\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|\mathcal{E}^{t+1} - \mathcal{E}^t\|_\infty \leq \epsilon$$

$$\|\mathcal{X}^{t+1} + \mathcal{E}^{t+1} - \mathcal{M} - \mathcal{K}^{t+1}\|_\infty \leq \epsilon$$

9: end while

输出: 恢复的图像 $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{t+1}$

4. 实验及讨论分析

在本节中, 为了证明所提出的 ITCTV 方法在图像修复方面的有效性, 我们将其应用到彩色图像、HSI 以及灰度视频中。我们选择几种流行的鲁棒补全方法与我们的方法进行比较, 即 SNN [14]、TNN [4]、TTNN [15]、TNTV [16]、TCTV [9]。至于对比方法的参数设置, 我们的设置基于作者的代码或者他们文章中的建议。我们使用峰值信噪比(PSNR)或者峰值信噪比平均值(MPSNR)指标来衡量所有方法的恢复性能。对于实验数据, 彩色图像是从 Berkeley 分割数据集中随机选取了 10 张图片, HSI 选取了广泛使用的 Pavia, Pavia university (Pavia U), KSC, DCMall, Urban 以及 Moffettfield, 灰度视频则是从 YUV 数据集中挑选了 10 个。

4.1. 实验与模型参数设置

在进行模拟实验中, 我们主要考虑不同采样率 $sr = \{0.1, 0.2, 0.6, 0.8\}$ 与噪声比例 $\sigma = 0.1$ 组合的几种图像的退化情况。对于所提出的鲁棒张量修补模型中的参数, 我们将其中的 λ 默认设置为 $\lambda = 1/\sqrt{n_3 \max(n_1, n_2)}$, 而用于控制梯度张量 \mathcal{G}_k 的奇异值收缩的权重参数 q , 可以从一定范围内进行选择, 如 $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$, 我们根据经验在实验中默认设置 $q = 0.1$, 针对不同的视觉张量数据, 也可以进行微调。

4.2. 视觉张量数据修复

本节我们将所提出的方法应用于彩色图像、HSI 以及灰度视频的恢复中, 其中每个彩色图片的大小为 $481 \times 321 \times 3$, HSI 裁剪过后的大小为 $200 \times 200 \times 50$, 灰度视频的大小为 $144 \times 176 \times 100$ 。我们将所提出的方法与上述提到的 5 种方法进行比较, PSNR 或 MPSNR 数值结果如表 1~3 所示, 其中的数值是各类型所有挑选图像实验指标的平均值, 最优结果通过粗体突出显示。可以看出, 在不同采样率和噪声水平下, 我们所提出的方法均达到了最优的恢复效果。同 TCTV 方法相比, 由于进一步充分利用了梯度张量的奇异值的先验分布信息, 因此恢复效果也有了显著提升。除此之外, HSI 相比彩色图片等图像低秩性更强, 我们的方法在梯度域下利用梯度张量的先验信息也更加充分, 因此在 HSI 这种波段更多、低秩性更强的视觉张量数据上更有竞争力。

Table 1. Performance evaluation of color images under different degradation conditions by different methods

表 1. 不同退化情况下彩色图片在不同方法上的性能评估

退化情况	$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	$sr = 0.8, \sigma = 0.1$
方法/指标	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR
SNN	19.1466	22.4488	26.0652	29.3156
TNN	12.3232	16.2716	23.3288	25.8343
TTNN	15.7325	16.6266	17.6519	17.9405
TNTV	17.0341	18.0547	18.7968	19.0783
TCTV	19.7290	22.7785	27.9499	30.1426
ITCTV	23.5857	25.9894	29.2547	31.0178

Table 2. Performance evaluation of HSI under different degradation conditions by different methods

表 2. 不同退化情况下 HSI 在不同方法上的性能评估

退化情况	$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	$sr = 0.8, \sigma = 0.1$
方法/指标	MPSNR	MPSNR	MPSNR	MPSNR
SNN	22.9449	25.8609	34.7329	40.0899
TNN	22.4525	26.5220	36.9603	40.7484
TTNN	30.9915	34.2613	38.9871	41.9535
TNTV	26.2492	29.0595	35.5640	37.7247
TCTV	28.0984	31.7142	40.7714	43.8155
ITCTV	33.3966	37.5034	42.9507	45.9741

Table 3. Performance evaluation of grayscale videos under different degradation conditions by different methods

表 3. 不同退化情况下灰度视频在不同方法上的性能评估

退化情况	$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	$sr = 0.8, \sigma = 0.1$
方法/指标	MPSNR	MPSNR	MPSNR	MPSNR
SNN	20.2276	23.2674	31.6904	33.9525
TNN	20.8164	23.6106	29.3599	31.3817
TTNN	25.1260	28.2120	31.2334	32.3921
TNTV	21.3082	23.0496	26.4624	28.4710
TCTV	24.6216	27.0840	31.9058	33.5797
ITCTV	28.5466	30.5443	33.0015	34.6850

为了从视觉上展示更加直观的恢复效果, 我们展示了所有竞争方法在部分图像上的视觉恢复结果。图 1~3 分别展示了彩色图片、HSI 和灰度视频在不同采样率下的恢复结果。可以看出, 我们的方法同 TCTV 一样, 在梯度域下进行建模不仅刻画了低秩性, 同时编码了局部平滑先验, 因此在局部细节以及边缘上的恢复更好。综上所述, 我们所提出的方法在数值和视觉上都具有更加优越的恢复性能。

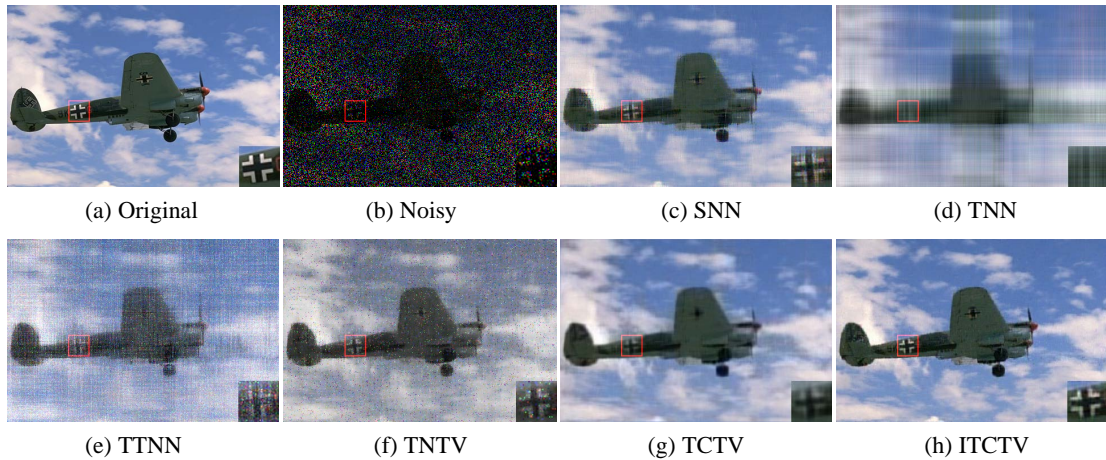


Figure 1. The restoration effect of each method under sampling rate 0.2 and noise ratio 0.1 of color image
图 1. 彩色图片在 0.2 采样率, 0.1 噪声比例下各方法的恢复效果

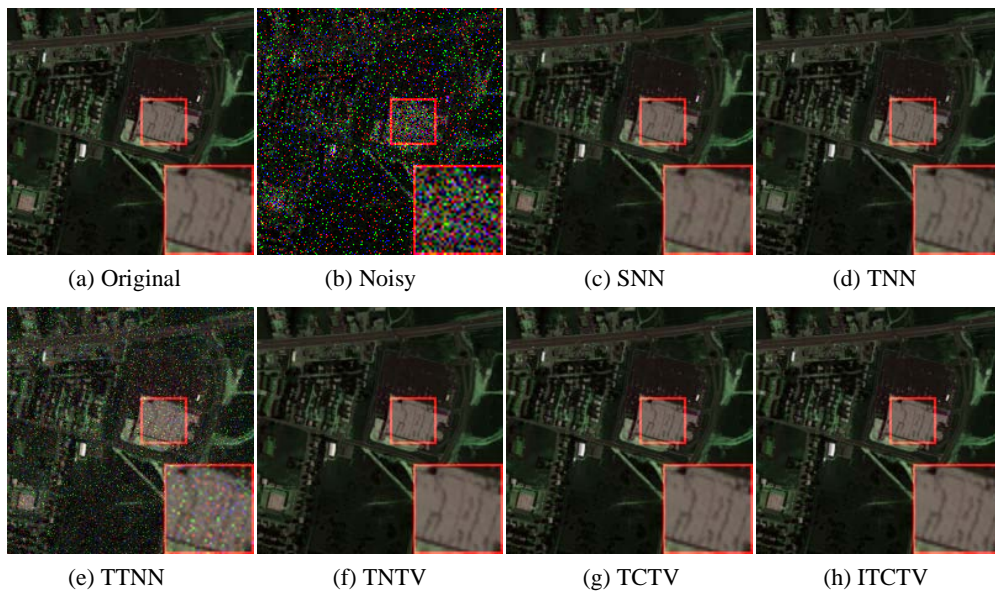
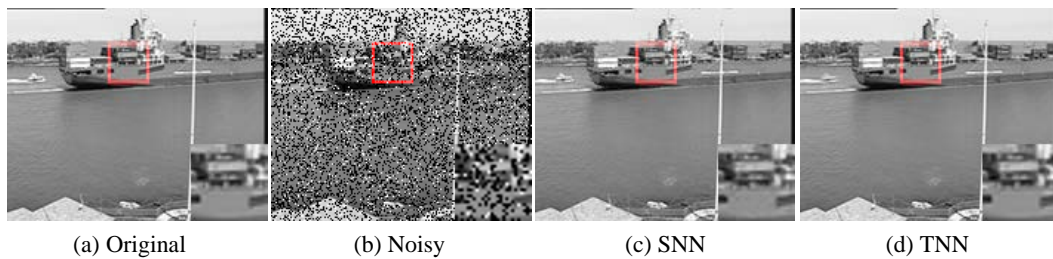


Figure 2. The restoration effect of each method under sampling rate 0.6 and noise ratio 0.1 of HSI
图 2. HSI 在 0.6 采样率, 0.1 噪声比例下各方法的恢复效果



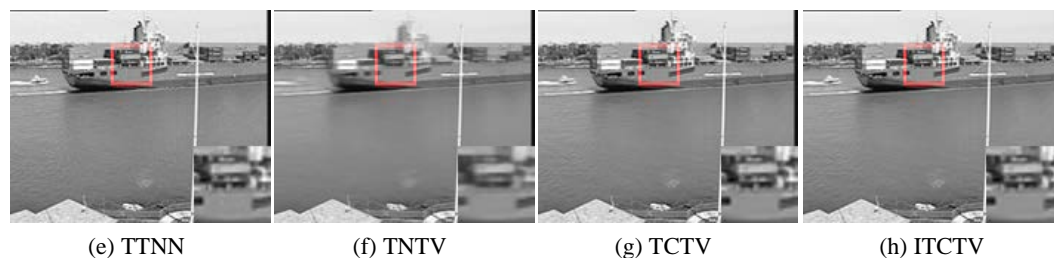


Figure 3. The restoration effect of each method under sampling rate 0.8 and noise ratio 0.1 of grayscale video
图 3. 灰度视频在 0.8 采样率, 0.1 噪声比例下各方法的恢复效果

4.3. 可逆线性变换分析

考虑到 t -SVD 框架依赖于方向和特定变换(例如 DFT、DCT、酉变换和小波变换等), 我们探讨了所提出的模型使用的 ITCTV 范数在不同变换下的恢复结果。表 4 显示了 TCTV 方法和我们提出的 ITCTV 方法在基于 DFT 的 t -SVD 框架、基于 DCT 的 t -SVD 框架和基于酉变换的 t -SVD 框架下不同视觉张量数据恢复的定量比较。结果表明, 与 DFT 相比, 基于 DCT 的 t -SVD 框架下的恢复性能可以进一步提高。通过将可逆线性变换改为基于数据的酉变换, 还可以进一步提高恢复性能。这与[17]中的结果一致, 特别是对于彩色图像, 这表明对于不同的数据类型, 仍然需要考虑使用哪种可逆线性变换来达到最佳的恢复结果。

Table 4. Performance comparison of TCTV and ITCTV methods under different invertible linear transforms
表 4. TCTV 和 ITCTV 方法在不同可逆线性变换下的性能比较

退化情况	TCTV (F)	TCTV (C)	TCTV (U)	ITCTV (F)	ITCTV (C)	ITCTV (U)
彩色图像						
$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	23.2987	23.5597	23.5792	26.9972	27.1322	27.5794
$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	27.1167	27.1994	27.2023	30.6963	30.9261	31.2168
$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	33.3609	33.4471	33.6770	34.7119	35.7284	36.1611
$sr = 0.8, \sigma = 0.1$	35.2936	35.3883	35.5992	35.7304	36.8277	37.4683
HSI						
$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	29.8517	29.8674	29.9594	35.1623	35.5197	35.8505
$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	33.2334	33.2652	33.4474	39.0102	39.8920	40.4556
$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	40.2902	40.4290	40.7660	44.0501	45.1583	45.4600
$sr = 0.8, \sigma = 0.1$	42.4190	42.7358	43.1154	45.4282	45.5901	46.0923
灰度视频						
$sr = 0.1, \sigma = 0.1$	27.6108	27.6852	27.7408	32.5737	32.6378	32.6942
$sr = 0.2, \sigma = 0.1$	29.6837	29.8120	29.9279	35.4975	35.7699	36.1460
$sr = 0.6, \sigma = 0.1$	35.3117	35.3488	35.3618	41.5674	41.6759	41.8868
$sr = 0.8, \sigma = 0.1$	37.3666	37.4352	37.5836	43.1393	43.5329	43.8648

5. 总结与展望

在本文中, 我们通过重加权策略引入了一种改进的张量相关全变分(ITCTV)范数, 并将其应用于图像

修复。所提出的 ITCTV 范数不仅同时表征了全局低秩和局部平滑两个先验, 减少了两个先验正则化项对应的参数, 而且还进一步提高了区分控制梯度张量不同奇异值的灵活性。所提出的方法在不同类型的视觉张量数据上的实验结果证明了该方法在图像修复上的有效性。在未来的工作中, 我们将考虑双线性分解对模型算法进行加速, 以及将 ITCTV 正则化器推广至更一般的非线性变换框架。

参考文献

- [1] Hu, W., Yang, Y., Zhang, W. and Xie, Y. (2016) Moving Object Detection Using Tensor-Based Low-Rank and Saliently Fused-Sparse Decomposition. *IEEE Transactions on Image Processing*, **26**, 724-737. <https://doi.org/10.1109/TIP.2016.2627803>
- [2] Cao, X., Yao, J., Xu, Z. and Meng, D. (2020) Hyperspectral Image Classification with Convolutional Neural Network and Active Learning. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **58**, 4604-4616. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2020.2964627>
- [3] Han, S., Tao, W., Wang, D., Tai, X.C. and Wu, X. (2009) Image Segmentation Based on Grabcut Framework Integrating Multiscale Nonlinear Structure Tensor. *IEEE Transactions on Image Processing*, **18**, 2289-2302. <https://doi.org/10.1109/TIP.2009.2025560>
- [4] Lu, C., Feng, J., Chen, Y., Liu, W., Lin, Z. and Yan, S. (2019) Tensor Robust Principal Component Analysis with a New Tensor Nuclear Norm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **42**, 925-938. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2019.2891760>
- [5] Liu, J., Musialski, P., Wonka, P. and Ye, J. (2012) Tensor Completion for Estimating Missing Values in Visual Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 208-220. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.39>
- [6] Wang, H., Zhang, F., Wang, J., Huang, T., Huang, J. and Liu, X. (2021) Generalized Nonconvex Approach for Low-Tubal-Rank Tensor Recovery. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **33**, 3305-3319. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2021.3051650>
- [7] Wang, Y., Peng, J., Zhao, Q., Leung, Y., Zhao, X. and Meng, D. (2017) Hyperspectral Image Restoration via Total Variation Regularized Low-Rank Tensor Decomposition. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **11**, 1227-1243. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2017.2779539>
- [8] Peng, J., Wang, Y., Zhang, H., Wang, J. and Meng, D. (2022) Exact Decomposition of Joint Low Rankness and Local Smoothness plus Sparse Matrices. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **45**, 5766-5781. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2022.3204203>
- [9] Wang, H., Peng, J., Qin, W., Wang, J. and Meng, D. (2023) Guaranteed Tensor Recovery Fused Low-Rankness and Smoothness. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **45**, 10990-11007. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2023.3259640>
- [10] Huang, Y., Liao, G., Xiang, Y., Zhang, L., Li, J. and Nehorai, A. (2019) Low-Rank Approximation via Generalized Reweighted Iterative Nuclear and Frobenius Norms. *IEEE Transactions on Image Processing*, **29**, 2244-2257. <https://doi.org/10.1109/TIP.2019.2949383>
- [11] Chen, L., Jiang, X., Liu, X. and Haardt, M. (2022) Reweighted Low-Rank Factorization with Deep Prior for Image Restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **70**, 3514-3529. <https://doi.org/10.1109/TSP.2022.3183466>
- [12] Chen, K., Dong, H. and Chan, K.S. (2013) Reduced Rank Regression via Adaptive Nuclear Norm Penalization. *Biometrika*, **100**, 901-920. <https://doi.org/10.1093/biomet/ast036>
- [13] Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2011) Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, **3**, 1-122. <https://doi.org/10.1561/22000000016>
- [14] Goldfarb, D. and Qin, Z. (2014) Robust Low-Rank Tensor Recovery: Models and Algorithms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **35**, 225-253. <https://doi.org/10.1137/130905010>
- [15] Song, G., Ng, M.K. and Zhang, X. (2020) Robust Tensor Completion Using Transformed Tensor Singular Value Decomposition. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **27**, e2299. <https://doi.org/10.1002/nla.2299>
- [16] Qiu, D., Bai, M., Ng, M.K. and Zhang, X. (2021) Robust Low-Rank Tensor Completion via Transformed Tensor Nuclear Norm with Total Variation Regularization. *Neurocomputing*, **435**, 197-215. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.12.110>
- [17] Qin, W., Wang, H., Zhang, F., Wang, J., Luo, X. and Huang, T. (2022) Low-Rank High-Order Tensor Completion with Applications in Visual Data. *IEEE Transactions on Image Processing*, **31**, 2433-2448. <https://doi.org/10.1109/TIP.2022.3155949>