

星图相关矩阵的Moore-Penrose广义逆

王玉浩

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2024年1月14日; 录用日期: 2024年2月4日; 发布日期: 2024年4月11日

摘要

本文利用矩阵的低秩性、分块性等性质给出了星图的邻接矩阵、关联矩阵、距离矩阵、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的Moore-Penrose广义逆。以上结论对进一步研究星图的代数性质提供了理论支撑, 同时对研究其他图类的相关矩阵的广义逆提供了理论参考。

关键词

星图, 分块矩阵, Moore-Penrose广义逆

Moore-Penrose Inverses of the Related Matrices of Star Graphs

Yuhao Wang

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Jan. 14th, 2024; accepted: Feb. 4th, 2024; published: Apr. 11th, 2024

Abstract

Based on the properties of the low rank, partitioned matrix structure, we give the explicit form for the Moore-Penrose inverse of the adjacency matrix, incidence matrix, distance matrix, Laplacian matrix and signless-Laplacian matrix of star graphs, which provides theoretical support for further study of the algebraic properties of star graphs and theoretical aid for the study of the generalized inverse for matrices of other graphs.

Keywords

Star Graph, Block Matrix, Moore-Penrose Inverse



1. 引言

设图 G 是一个无向简单图，其顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，边集为 $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。图 G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ，其中：当顶点 v_i 与 v_j 相邻时， $a_{ij} = 1$ ；反之 $a_{ij} = 0$ 。图 G 的点边关联矩阵 $M(G) = (m_{ij})_{n \times m}$ ，当顶点 v_i 与 e_j 关联时， $m_{ij} = 1$ ；反之 $m_{ij} = 0$ 。图 G 的距离矩阵 $D = (d_{ij})_{n \times n}$ ，其中 d_{ij} 表示顶点 v_i 与 v_j 之间的最短距离。图 G 的度矩阵 $\bar{D}(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ，其中 d_i 表示顶点 v_i 的邻点数。图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G) = \bar{D}(G) - A(G)$ 。图 G 的无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G) = \bar{D}(G) + A(G)$ 。

设图 Γ 是一个有向简单图，其顶点集为 $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，边集为 $E(\Gamma) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。定义图 Γ 的点边关联矩阵 $H(\Gamma) = (h_{ij})_{n \times m}$ ，当顶点 v_i 是有向边 e_j 的起点时， $h_{ij} = -1$ ；当顶点 v_i 是有向边 e_j 的终点时， $h_{ij} = 1$ ；反之 v_i 与 e_j 不关联时， $h_{ij} = 0$ 。

对任意的 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，如果存在 $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，满足下面 4 个条件：

$$AXA = A; XAX = X; (AX)^T = AX; (XA)^T = XA,$$

则称 X 是 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵[1]，记为 A^+ 。当矩阵 A 可逆时，容易证得 $A^+ = A^{-1}$ ；当 A 为行满秩矩阵时，有右逆 $A_R^{-1} = A^T (AA^T)^{-1}$ ，为列满秩矩阵时，有左逆 $A_L^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$ ，容易证明此时 A 的左逆或右逆就是 A 的 Moore-Penrose 广义逆。反之当 A 既不行满秩又不列满秩时可以使用满秩分解和奇异值分解去求解 A^+ ，但事实上，使用上述两种方法得到的广义逆的表示形式可能非常复杂，图的相关矩阵对于研究图的性质有关键作用，因此给出图矩阵广义逆的简洁表示形式是非常有意义的。

近几十年来，图相关矩阵的广义逆的研究受到了广泛关注，Bapat 等人给出了距离正则图和完全多部图的关联矩阵的 Moore-Penrose 广义逆，接着又给出了偶数个顶点的轮图的距离矩阵的求逆公式，详见文献[2] [3] [4]。Hessert 和 Mallik 给出了图的无符号拉普拉斯矩阵和边拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose 广义逆[5]，接着又给出了单圈图关联矩阵的逆[6]。Alazemi 等人考虑对对称矩阵 A 进行公平划分，得到了 $A^+(\Pi) = (A(\Pi))^+$ 的充分条件，从而利用 $(A(\Pi))^+$ 重构出 A^+ ，极大地简化了 Moore-Penrose 广义逆的求解[7]。本文依据星图相关矩阵的结构特点，利用分块矩阵给出了星图邻接矩阵、关联矩阵、距离矩阵、拉普拉斯矩阵以及无符号拉普拉斯的 Moore-Penrose 广义逆的具体表示形式，对进一步研究星图的代数性质提供了理论支撑，同时对研究其他图类的相关矩阵的广义逆提供了理论参考。

2. 预备知识

设 A 为实数域上的 n 阶分块矩阵，分块划分为 $\Pi = (X_1, \dots, X_m)$ ，其中每一个 X_i 均为非空不交集合，且有 $X_1 \cup \dots \cup X_m = \{1, \dots, n\}$ ，矩阵 A 的每一块 $A_{ij} \in \mathbb{R}^{|X_i| \times |X_j|}$ ($1 \leq i, j \leq m$)，即：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}.$$

令 $A(\Pi) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为划分 Π 对应的商矩阵， $A(\Pi)$ 中的元素 $A(\Pi)_{ij}$ 等于分块矩阵 A_{ij} 的平均行和。如果矩阵 A 的每一个分块 A_{ij} ($1 \leq i, j \leq m$) 每一行的和都等于这个分块矩阵的平均行和，则称划分 Π 是矩阵 A

的一个公平划分。

定理 2.1 指出对于对称矩阵 A , 如果 Π 是矩阵 A 的一个公平划分, 则 Π 也是 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵 A^+ 的一个公平划分。

定理 2.1 [7] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 且 $A^T = A$, $\Pi = (X_1, \dots, X_m)$ 是矩阵 A 的一个公平划分, 对应的商矩阵为 $A(\Pi)$, 且 $X = \text{diag}(|X_1|, \dots, |X_m|)$ 。则 Π 也是 A^+ 的一个公平划分, 对应的商矩阵

$$A^+(\Pi) = X^{-1/2} \left(X^{1/2} A(\Pi) X^{-1/2} \right)^+ X^{1/2}.$$

引理 2.1 给出了一个 $A^+(\Pi)$ 和 $(A(\Pi))^{-1}$ 等价的充分条件。

引理 2.1 [7] 设 A 是一个对称矩阵, $\Pi = (X_1, \dots, X_m)$ 是矩阵 A 的一个公平划分, 对应的商矩阵为 $A(\Pi)$ 。如果 $A(\Pi)$ 可逆, 则 $A^+(\Pi)$ 也可逆且 $A^+(\Pi) = (A(\Pi))^{-1}$ 。

引理 2.2~2.4 给出了 Moore-Penrose 广义逆的相关性质和计算公式。

引理 2.2 [8] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A^+ 为矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆, 则有 $(AA^T)^+ = (A^+)^T A^+$ 。

引理 2.3 [8] 设 A 是一个对称矩阵, 则 A^{-1} 或 A^+ 也是对称矩阵。

引理 2.4 [8] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 且有满秩分解 $A = FG$, 其中 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}, G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $r = r(A) = r(F) = r(G)$ 。则有 $A^+ = G^T (F^T A G^T)^{-1} F^T$ 。

引理 2.5 给出了图的拉普拉斯矩阵、无符号拉普拉斯矩阵和关联矩阵之间的关系。

引理 2.5 [9] 对于无向简单图 G , 给其每条边赋方向, 记为图 Γ , 则有

$$Q(G) = M(G)M(G)^T, L(G) = H(\Gamma)H(\Gamma)^T.$$

引理 2.6 给出了一种特殊的矩阵满秩分解方法。

引理 2.6 [10] 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 则矩阵 A 存在一个满秩分解 $A = FG$, 其中, $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 矩阵 G 为对 A 施行初等行变换后得到的行最简形矩阵的前 r 行, 令 j_1, j_2, \dots, j_r 代表 G 每一行第一个 1 所在的列数, 矩阵 F 为 A 的第 j_1, j_2, \dots, j_r 个列向量所构成的矩阵。

在下文的描述中, j_n 代表长度为 n 的全 1 列向量, I_n 代表 n 阶单位矩阵, $J_{m \times n}$ 代表 $m \times n$ 阶全 1 矩阵, $O_{m \times n}$ 代表 $m \times n$ 阶全 0 矩阵。

3. 主要结果

命题 3.1 设 A 是实数域上的 n 阶对称矩阵, 如果矩阵 A 的某些行(列)完全相同, 即: $a_{it} = a_{jt} = \dots = a_{mt}$, 其中 $i, j, \dots, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $t = 1, 2, \dots, n$, 则 A^+ 的那些行(列)对应也完全相同。

证明: 由引理 2.6, 实数域上的 n 阶对称矩阵 A 存在一个满秩分解 $A = FG$, 其中矩阵 G 为对 A 施行初等行变换后得到的行最简形矩阵的前 r 行。假设矩阵 A 的第 i 行和第 j 行相等, 对任意的 $1 \leq k \leq n$, 由于 $A_{ik} = A_{jk}$ 且 $A = A^T$, 有 $A_{ki} = A_{kj}$ 。又因 G 为对 A 施行初等行变换后得到, 故有 $(G^T)_{ik} = (G^T)_{jk}$ 。由引理 2.4, 对任意的 $1 \leq t \leq n$, A^+ 的第 i 行和第 j 行元素

$$(A^+)_{it} = \sum_{k=1}^n (G^T)_{ik} \left((F^T A G^T)^{-1} F^T \right)_{kt} = \sum_{k=1}^n (G^T)_{jk} \left((F^T A G^T)^{-1} F^T \right)_{kt} = (A^+)_{jt}.$$

于是 A 的广义逆矩阵 A^+ 的第 i 行和第 j 行元素对应相等, 命题得证。

星图由一个顶点连上若干个孤立顶点得到, 如下图 G 所示。给图 G 的每条边加上方向变为有向图,

如下图 Γ 所示。

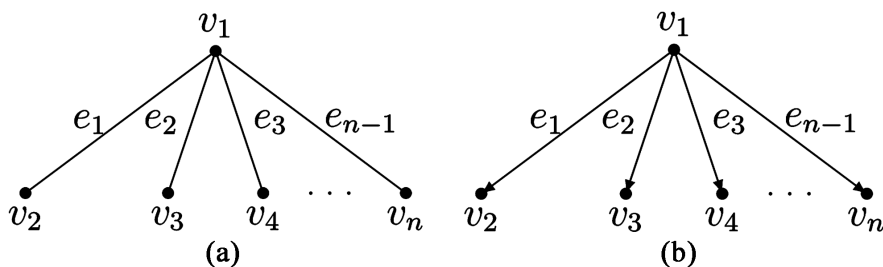


Figure 1. (a) Undirected star graph G and (b) directed star graph Γ

图 1. (a) 无向星图 G 和 (b) 有向星图 Γ

定理 3.1 给出了星图的邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的分块表示。

定理 3.1 设 $G = K_{1,n-1}$ 是一个有 n 个顶点的无向星图，则其邻接矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆为

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n-1} j_{n-1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}.$$

证明：根据图 1 中 G 的顶点标号，星图 $K_{1,n-1}$ 的邻接矩阵有以下形式：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & j_{n-1}^T \\ j_{n-1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

显然，矩阵 A 的后 $n-1$ 行(列)相同。考虑对 A 进行分块划分，划分 $\Pi = (X_1, X_2)$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2, 3, \dots, n\}$ 。容易验证划分 Π 是一个公平划分，对应的商矩阵

$$A(\Pi) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

易得商矩阵 $A(\Pi)$ 可逆且有

$$(A(\Pi))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

由定理 2.1 和引理 2.1，划分 Π 也是 A^+ 的一个公平划分且有

$$A^+(\Pi) = (A(\Pi))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

由命题 3.1， A^+ 的后 $n-1$ 行(列)也相同，因此利用 $A^+(\Pi)$ 重构出 A^+ 如下：

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n-1} j_{n-1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}.$$

定理得证。

定理 3.2 给出了星图的关联矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的分块表示。

定理 3.2 设 $G = K_{1,n-1}$ 是一个有 n 个顶点的无向星图，则其关联矩阵 M 的 Moore-Penrose 广义逆为

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}_{(n-1) \times n}.$$

证明：由图 1 中 G 的顶点及边的标号，其关联矩阵可记为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)} = \begin{pmatrix} j_{n-1}^T \\ I_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times (n-1)}.$$

易证 M 为列满秩矩阵，故其有左逆，且 $M_L^{-1} = (M^T M)^{-1} M^T$ ，又 $M^+ = M_L^{-1}$ ，得

$$\begin{aligned} M^+ &= (M^T M)^{-1} M^T = \left[\begin{pmatrix} j_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{n-1}^T \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} j_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (J_{n-1} + I_{n-1})^{-1} \begin{pmatrix} j_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \right) \begin{pmatrix} j_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理得证。

定理 3.3 给出了星图的距离矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的分块表示。

定理 3.3 设 $G = K_{1,n-1}$ 是一个有 n 个顶点的无向星图，则其距离矩阵 D 的 Moore-Penrose 广义逆为

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{2(2-n)}{n-1} & \frac{1}{n-1} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n-1} j_{n-1} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} J_{n-1} - I_{n-1} \right) \end{pmatrix}.$$

证明：根据图 1 中 G 的顶点标号，星图 $K_{1,n-1}$ 的距离矩阵有以下形式：

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & j_{n-1}^T \\ j_{n-1} & 2(J_{n-1} - I_{n-1}) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

通过计算其行列式易证距离矩阵 D 为可逆矩阵，因而 $D^+ = D^{-1}$ 。令

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} m & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} DD^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & j_{n-1}^T \\ j_{n-1} & 2(J_{n-1} - I_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & N \\ P & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_{n-1}^T P & j_{n-1}^T Q \\ mj_{n-1} + 2(J_{n-1} - I_{n-1})P & j_{n-1}N + 2(J_{n-1} - I_{n-1})Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

因而

$$\begin{cases} j_{n-1}^T P = 1 & (1) \\ j_{n-1}^T Q = O_{1 \times (n-1)} & (2) \\ mj_{n-1} + 2(J_{n-1} - I_{n-1})P = O_{(n-1) \times 1} & (3) \\ j_{n-1}N + 2(J_{n-1} - I_{n-1})Q = I_{n-1} & (4) \end{cases}$$

将(1)代入(3)中，得 $m j_{n-1} + 2 j_{n-1} - 2P = O_{(n-1) \times 1}$ ，解得 $P = \frac{m+2}{2} j_{n-1}$ ，代入(1)中有

$$j_{n-1}^T P = j_{n-1}^T \cdot \frac{m+2}{2} j_{n-1} = \frac{m+2}{2} \cdot (n-1) = 1,$$

得 $m = \frac{2(2-n)}{n-1}$ ， $P = \frac{1}{n-1} j_{n-1}$ 。又因距离矩阵 D 为对称矩阵，由引理 2.3， D^{-1} 也是对称矩阵，得

$N = P^T = \frac{1}{n-1} j_{n-1}^T$ ，代入(4)中有

$$j_{n-1}N + 2(J_{n-1} - I_{n-1})Q = \frac{1}{n-1} J_{n-1} - 2Q = I_{n-1},$$

得 $Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} J_{n-1} - I_{n-1} \right)$ 。因而

$$D^+ = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(2-n)}{n-1} & \frac{1}{n-1} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n-1} j_{n-1} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} J_{n-1} - I_{n-1} \right) \end{pmatrix},$$

定理得证。

定理 3.4 给出了星图的无符号拉普拉斯矩阵矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的分块表示。

定理 3.4 设 $G = K_{1,n-1}$ 是一个有 n 个顶点的无向星图，则其无符号拉普拉斯矩阵 Q 的 Moore-Penrose 广义逆为

$$Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n^2} & \frac{1}{n^2} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n^2} j_{n-1} & -\frac{n+1}{n^2} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

证明：由引理 2.2 和引理 2.5，得 $Q = MM^T$ ， $Q^+ = (M^+)^T M^+$ 。又由定理 3.2 得

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}_{(n-1) \times n},$$

故有

$$\begin{aligned} Q^+ &= (M^+)^T M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} j_{n-1}^T \\ -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n^2} & \frac{1}{n^2} j_{n-1}^T \\ \frac{1}{n^2} j_{n-1} & -\frac{n+1}{n^2} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理得证。

定理 3.5 给出了星图的拉普拉斯矩阵矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的分块表示。

定理 3.5 设 $G = K_{1,n-1}$ 是一个有 n 个顶点的无向星图， Γ 是对 G 的每条边赋方向的有向星图，则 G 的拉普拉斯矩阵 L 的 Moore-Penrose 广义逆为

$$L^+ = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n^2} & -\frac{1}{n^2} j_{n-1}^T \\ -\frac{1}{n^2} j_{n-1} & -\frac{n+1}{n^2} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

证明：根据图 1 中 Γ 的顶点及有向边标号，得图 Γ 的关联矩阵 H 为

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j_{n-1}^T \\ I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

易证 H 为列满秩矩阵，故其有左逆，且 $H_L^{-1} = (H^T H)^{-1} H^T H$ 。又 $H^+ = H_L^{-1}$ ，得

$$\begin{aligned} H^+ &= (H^T H)^{-1} H^T = \left[(-j_{n-1} \quad I_{n-1}) \begin{pmatrix} -j_{n-1}^T \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \right]^{-1} (-j_{n-1} \quad I_{n-1}) \\ &= (J_{n-1} + I_{n-1})^{-1} (-j_{n-1} \quad I_{n-1}) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix} (-j_{n-1} \quad I_{n-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由引理 2.2 和引理 2.5, 得 $L = HH^T$, $L^+ = (H^+)^T H^+$, 故有

$$L^+ = (H^+)^T H^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} j_{n-1}^T \\ -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} j_{n-1} & -\frac{1}{n} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n^2} & -\frac{1}{n^2} j_{n-1}^T \\ -\frac{1}{n^2} j_{n-1} & -\frac{n+1}{n^2} J_{n-1} + I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

定理得证。

例 3.1 如图 2 所示, $K_{1,7}$ 为 8 个顶点的无向星图, $\Gamma_{1,7}$ 是将 $K_{1,7}$ 每条边赋方向后的有向星图。

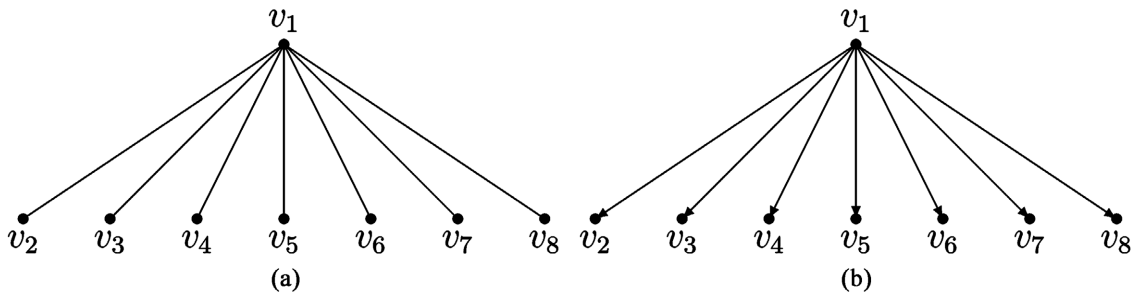


Figure 2. (a) Undirected star graph $K_{1,7}$; (b) directed star graph $\Gamma_{1,7}$

图 2. (a) 无向星图 $K_{1,7}$; (b) 有向星图 $\Gamma_{1,7}$

由定理 3.1~3.5, 可以得到下表 1 结果:

Table 1. The related matrices and their Moore-Penrose inverses of star graph $K_{1,7}$

表 1. 星图 $K_{1,7}$ 的相关矩阵及其 Moore-Penrose 广义逆

相关矩阵	分块表示	Moore-Penrose 广义逆
邻接矩阵	$A = \begin{pmatrix} 0 & j_7^T \\ j_7 & O_{7 \times 7} \end{pmatrix}$	$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} j_7^T \\ \frac{1}{7} j_7 & O_{7 \times 7} \end{pmatrix}$
关联矩阵	$M = \begin{pmatrix} j_7^T \\ I_7 \end{pmatrix}$	$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} j_7 & -\frac{1}{8} J_7 + I_7 \end{pmatrix}$
距离矩阵	$D = \begin{pmatrix} 0 & j_7^T \\ j_7 & 2(J_7 - I_7) \end{pmatrix}$	$D^+ = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & \frac{1}{7} j_7^T \\ \frac{1}{7} j_7 & \frac{1}{14} J_7 - \frac{1}{2} I_7 \end{pmatrix}$
无符号拉普拉斯矩阵	$Q = \begin{pmatrix} 7 & j_7^T \\ j_7 & I_7 \end{pmatrix}$	$Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{7}{64} & \frac{1}{64} j_7^T \\ \frac{1}{64} j_7 & -\frac{9}{64} J_7 + I_7 \end{pmatrix}$

续表

拉普拉斯矩阵	$L = \begin{pmatrix} 7 & -j_7^T \\ -j_7 & I_7 \end{pmatrix}$	$L^+ = \begin{pmatrix} \frac{7}{64} & -\frac{1}{64} j_7^T \\ -\frac{1}{64} j_7 & -\frac{9}{64} J_7 + I_7 \end{pmatrix}$
--------	--	---

4. 结语

图的相关矩阵对于研究图的代数性质有关键作用，本文借助分块矩阵给出了星图的邻接矩阵、关联矩阵、距离矩阵、拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的具体结果，并给出了计算例子。后续将深入推广此方法，研究其他图类相关矩阵的 Moore-Penrose 广义逆。

参考文献

- [1] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E. (2003) *Generalized Inverses: Theory and Applications*. 2nd Edition, Springer, New York, 40-51.
- [2] Azimi, A. and Bapat, R.B. (2018) Moore-Penrose Inverse of the Incidence Matrix of a Distance Regular Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **551**, 92-103. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.04.003>
- [3] Azimi, A. and Bapat, R.B. (2019) The Moore-Penrose Inverse of the Incidence Matrix of Complete Multipartite and Bi-Block Graphs. *Discrete Mathematics*, **342**, 2393-2401. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.05.007>
- [4] Balaji, R., Bapat, R.B. and Goel, S. (2021) An Inverse Formula for the Distance Matrix of a Wheel Graph with an Even Number of Vertices. *Linear Algebra and Its Applications*, **610**, 274-292. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.10.003>
- [5] Hessert, R. and Mallik, S. (2021) Moore-Penrose Inverses of the Signless Laplacian and edge-Laplacian of Graphs. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112451. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112451>
- [6] Hessert, R. and Mallik, S. (2023) The Inverse of the Incidence Matrix of a Unicyclic Graph. *Linear and Multilinear Algebra*, **71**, 513-527. <https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2035307>
- [7] Alazemi, A., Anđelić, M. and Cvetković-Ilić, D. (2021) The Moore-Penrose Inverse of Symmetric Matrices with Non-trivial Equitable Partitions. *Applied Mathematics and Computation*, **400**, Article ID: 126036. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126036>
- [8] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.
- [9] Cvetković, D., Rowlinson, P. and Simić, S. (2010) *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518>
- [10] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006: 220-225.