Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 144-150
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143093

Hans汉斯

具有Neumann边界条件的抛物型方程解的估计

阿迪莱·玉苏普

喀什大学数学与统计学院，新疆 喀什

收稿日期：2024年2月2日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年3月29日

摘 要

研究了具有Neumann边界条件的一类抛物型方程解的估计，通过微分方法，选取合适的辅助函数和利用极值原理来进行证明。

关键词

Neumann边界条件，抛物型方程，极值原理

Estimation of Solutions to Parabolic Equations with Neumann Boundary Conditions

Adilai·Yusupu

School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang

Received: Feb. 2nd, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

This paper studies the estimation of the solutions of a class of parabolic equations with Neumann boundary conditions, through the differential method, selects the appropriate auxiliary function and uses the extreme value principle to make the proof.

Keywords

Neumann Boundary Conditions, Parabolic Equation, Extreme Value Principle

文章引用: 阿迪莱·玉苏普. 具有 Neumann 边界条件的抛物型方程解的估计[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 144-150.
DOI: 10.12677/pm.2024.143093

1. 引言

抛物型方程是数学物理中非常重要的方程之一，是描述许多自然物理现象的基本方程。在数学物理方程的研究中，边值问题解的存在性是很重要的问题，而先验估计是其研究的关键。目前来说，边值问题的分类主要有 Dirichlet 问题、Neumann 问题及罗宾问题，又称第一、二、三边值问题。

1996 年，Guan [1]研究了当 $n \geq 2$ 时，下面的预定夹角边界值条件的抛物型方程

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Du)u_{ij} = -f(x,u), & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ \langle \gamma, \nu \rangle = \varphi(x,u), & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

并证明了在 $\frac{\partial f}{\partial \tau} \geq 0$ 条件下解的长时间存在性和收敛性。Ma 等[2]人研究了严格凸区域上的常平均曲率曲面和非零 Neumann 边界条件的平均曲率流。

2014 年，对于带 Neumann 边界的平均曲率方程

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = f(x,u), & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \psi(x,u), & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ma-Xu [3]通过引入一个特殊标架，构造了一个新的辅助函数，利用极大值原理得到了平均曲率方程 Neumann 问题解的梯度估计。证明过程主要利用了 Simon-Spruck [4]、Ural'tseva [5]、Liberman [6]、Wang [7]、Spruck [8]等人的技巧，首次给出平均曲率方程 Neumann 问题解的梯度估计。

2019 年，Xu [9]考虑了 Neumann 边界下的平均曲率流方程

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Du)u_{ij} = -f(x,u,Du) & \text{in } \Omega \times [0,T], \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \psi(x,u) & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0 & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

其中 $f_z(x,z,p) \geq 0$，$\Omega \subset R^n$ 为有界的 C^3 区域，$n \geq 2$，T 为固定的正常数，并且得到梯度估计

$$\sup_{\Omega_{\mu_0} \times [0,T]} |Du| \leq C.$$

朱洁[10]研究了如下具有 Neumann 边界条件的抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{xx}}{\left[1+(u_x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{1+(u_x)^2}\right)^{\beta} - f(x,u),$$

其中 $\beta \le 3$，且 $f(x,u)$ 是定义在 $[0,1]\times R$ 上的光滑函数。得到了一类边值问题解的梯度估计，从而得到了相应的曲线曲率演化方程解的存在性定理。

受此启发，本文研究具有如下形式的一类抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_{xx}-f(x,u,Du),$$

其中 $f(x,u,Du)$ 是定义在 $[0,1]\times R\times R^n$ 上的光滑函数，利用极值原理和微分方法讨论方程解的一阶导数估计。一般我们需要先得到 u 的 C^0 估计，再讨论 u 的 C^1 估计，特别地，对于抛物型方程要考虑 u 关于 t 的 C^1 估计。对于 u 的 C^1 估计分三种情形证明：

情形 1：若 $x_0\in\partial\Omega_{\mu_0}$，由 Hopf 引理得到 $|Du|(x_0)$ 有界；

情形 2：若 $x_0\in\partial\Omega_{\mu_0}\bigcap\Omega_{\mu_0}$，可归结为内部梯度估计；

情形 3：若 $x_0\in\Omega_{\mu_0}$，可利用极大值原理证明 $|Du|(x_0)$ 有界。

在情形 3 的证明中，通过引入一个特殊标架，构造合适的辅助函数，再利用极值原理、基本对称函数的性质以及函数在极大值点的性质，得到抛物型方程的一阶导数估计。

综合三种情形结果，总结出 $|Du|(x_0)$ 的上界，讨论得出方程解的 C^1 估计。

2. 主要结果

定理 1 假设 $\Omega=[0,1]$，f 是定义在 $\Omega\times R\times R^n$ 上的光滑函数，$u(x,t)$ 是下面方程的一个解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=u_{xx}-f(x,u,Du), & (x,t)\in\Omega\times[0,T],\\ u(x,0)=u_0(x), & (x,t)\in\Omega\times\{0\},\\ u_x(0,t)=a, & (x,t)\in\{x=0\}\times[0,T],\\ u_x(1,t)=b & (x,t)\in\{x=1\}\times[0,T].\end{cases}\tag{1}$$

其中，设存在正常数 L_1，使得 $f(x,z,p)$ 满足

$$f_z(x,z,p)\ge-\kappa,\ \kappa\ge0\text{，在 }\Omega\times[0,T]\times R^n\text{ 内，}$$

$$|f(x,z,p)|+|f_x(x,z,p)|+\left|\sum\nolimits_{i=1}^n u_{x_l}u_{x_i}v^{-1}f_p(x,z,p)\right|\le\frac{L_2}{v}\text{，在 }\Omega\times[0,T]\times R^n\text{ 内，}$$

这里 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)=Du$，$v=\sqrt{1+(u_x)^2}$ 则对于 $t\in[0,T]$，

$$|u_x(x,t)|\le C,$$

其中 $C=C\left(T,\lambda,\kappa,|f|_{C^0([0,1]\times R^n)},|D_xf|_{C^0([0,1])}\right)$。

我们将通过详细的计算先得到 u_t 估计和 u 的 C^0 估计，然后再求 u 关于 x 的 C^1 估计。证明过程中通过利用微分方法、极值原理和分三种情形证明出定理 1。

3. 证明定理 1

证明 第一步先给出 u_t 估计和 u 的 C^0 估计：

由(1)式，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_{xx}-f(x,u,Du),$$

方程两边关于 t 求导，得

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}=u_{xxt}-f_z\left(x,u,Du\right)u_t-f_{p_i}\left(x,u,Du\right)u_{it}. \tag{2}$$

而

$$\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t\right)}{\partial t}=-\kappa\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t+\mathrm{e}^{-\kappa t}u_{tt}. \tag{3}$$

将(2)式代入(3)式得

$$\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t\right)}{\partial t}=\mathrm{e}^{-\kappa t}u_{xxt}-\left(\kappa+f_z\right)\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t-f_{p_i}\left(x,u,Du\right)u_{it}\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

根据强极值原理，得 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 的非负极大值和非正极小值均在边界达到，除非 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 在 Ω 内恒为常数。所以假设 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 的非负极大值在 $\left(x_0,t_0\right)$ 处达到，那么 $\left(x_0,t_0\right)$ 仅有以下三种情况：

(A_1) $t_0=0$；

(A_2) $t_0>0$ 且 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 在 $\Omega\times\left[0,t_0\right]$ 恒为常数(等于 $u_t\left(x,0\right)$)；

(A_3) $t_0>0$ 且 $x_0=1$ 或 $x_0=0$。

下面依次讨论这三种情况：

对于(A_1) $t_0=0$，即 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 在 $\left(x_0,0\right)$ 处达到非负极大值，故

$$\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t\left(x,t\right)\le\mathrm{e}^{0}u_t\left(x_0,0\right)=u_t\left(x_0,0\right).$$

从而

$$u_t\left(x,t\right)\le\mathrm{e}^{\kappa t}u_t\left(x_0,0\right).$$

因此

$$u_t\left(x,t\right)\le\sup_{\Omega}\left(\mathrm{e}^{\kappa t}u_t\left(x_0,0\right)\right).$$

可以得到 $u_t\left(x,t\right)$ 的范围为

$$u_t\left(x,t\right)\le\max\left\{\sup_{x\in\Omega}\left(\mathrm{e}^{\kappa t}u_t\left(x_0,0\right)\right),0\right\}.$$

下面假设 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t$ 的非正极小值在 $\left(x_0,0\right)$ 处取得，同理可得

$$u_t\left(x,t\right)\ge\min\left\{\sup_{x\in\Omega}\left(\mathrm{e}^{\kappa t}u_t\left(x_0,0\right)\right),0\right\}.$$

因此

$$\left|u_t\right|\le C.$$

对于(A_2)由 $\mathrm{e}^{-\kappa t}u_t=C$ (C 为常数)，结合指数函数性质和 $\kappa\ge0$，则 $\mathrm{e}^{-\kappa t}\in\left(0,1\right]$，因此 $\left|u_t\right|\le C$。

对于(A_3)若 $t_0>0$ 且 $x_0=1$ 或 $x_0=0$，则根据 Hopf 引理得 $u_{t\nu}<0$。然而根据方程的边值条件知 $u_{t\nu}=0$。因此该情况不成立。综上分析得 u_t 有界。

对于 u 的 C^0 估计，利用微分中值定理得

$$\left|u\left(x,t\right)-u\left(x,0\right)\right|=\left|u\left(x,t\right)-u_0\left(x\right)\right|=\left|u_t\left(x,t\right)\left(t-0\right)\right|\le t\mathrm{e}^{\kappa t}\left|\sup_{x\in\Omega}u_t\left(x_0,0\right)\right|.$$

因此，存在一个常数 C，使得

$$\left|u(x,t)-u_0(x)\right|\le Cte^{\kappa t},$$

其中 $C=\left|\sup_{x\in\Omega} u_t(x_0,0)\right|$ 且仅依赖于 u_0, f。

第二步讨论给出 $|Du|$ 估计：

首先考虑辅助函数

$$\Phi=\log|u_x|^2+g(x)-\lambda t,$$

其中 $g(x)=x^2-x$，λ 在后面会给出定义。

设 $\Phi(x,t)$ 在 (x_0,t_0) 处达到非负极大值，其中 $x_0\in[0,1]$。

下面分三种情况进行讨论：

情形 1：$x_0=1$ 或 $x_0=0$。根据 $u_x(0,t)=a$，$u_x(1,t)=b$，可得

$$\max_{\{0\}\cup\{1\}\times[0,T]}|u_x|\le C.$$

情形 2：$t_0=0$，显然存在一个正常数 $C=C\left(u_x(x_0,0)\right)$，使得

$$\max_{[0,1]\times\{0\}}|u_x|\le C.$$

情形 3：$(x_0,t_0)\in(0,1)\times[0,T]$，

$$\Phi_t(x_0,t_0)=\frac{|u_{xx}|_t^2}{|u_x|^2}-\lambda.$$

由极值原理得

$$\Phi_x(x_0,t_0)=\frac{2u_{xx}}{u_x}+g'=0, \tag{4}$$

$$0\ge\Phi_{xx}(x_0,t_0)=\frac{2u_{xxx}}{u_x}-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2}+g'',\quad 0\ge\Phi_{xx}-\Phi_t=\left(\frac{2u_{xxx}}{u_x}-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2}+g''\right)-\frac{2u_{xt}}{u_x}+\lambda, \tag{5}$$

其中 $u_t=u_{xx}-f(x,u,Du)$。

因此

$$-\frac{2u_{tx}}{u_x}=-\frac{2u_{xxx}}{u_x}+\frac{2}{u_x}f_x+2f_z+\frac{2}{u_x}f_{p_i}u_{ix}. \tag{6}$$

由于 $u_{xx}=-\frac{u_x g'}{2}$，$g''=2$，将(6)代入(5)得

$$0\ge\Phi_{xx}-\Phi_t=-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2}+2+\frac{2}{u_x}f_x+2f_z+\frac{2}{u_x}f_{p_i}u_{ix}+\lambda=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2},$$

$$I_2=2+\frac{2}{u_x}f_x+2f_z+\frac{2}{u_x}f_{p_i}u_{ix}+\lambda.$$

不妨假设 u_x 足够大，否则 u 的 C^1 估计已证，则

$$I_1 = -\frac{g'^2}{2}, \tag{7}$$

由于条件

$$f_z(x,z,p) \ge -\kappa\text{，}\ \kappa \ge 0,$$

与条件

$$\left|f(x,z,p)\right| + \left|f_z(x,z,p)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} u_{x_l} u_{x_i} v^{-1} f_{p_i}(x,z,p)\right| \le \frac{L_1}{v},$$

可得

$$I_2 \ge 2 + \frac{2}{u_x} f_x - 2\kappa - \frac{2L_1}{v} + \lambda .$$

故

$$0 \ge I_1 + I_2 \ge \left(2 - \frac{g'^2}{2}\right) + \frac{2}{u_x} f_x - 2\kappa - \frac{2L_1}{v} + \lambda .$$

由于 $x \in [0,1]$，根据二次函数的性质知，$2 - \frac{g'^2}{2} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$，即 $2 - \frac{g'^2}{2} \ge 0$。

则

$$0 \ge I_1 + I_2 \ge \frac{2}{u_x} f_x - 2\kappa - \frac{2L_1}{v} + \lambda,$$

记 $\lambda = 2\kappa + 6$，由于 u_x 足够大，则 v 与 u_x 等价，因此由上式可得

$$0 \ge \frac{2f_x}{u_x} v^2 + (\lambda - 2\kappa) v^2 - 2L_1 v,$$

则

$$\frac{2\left(\sup\left|f_x\right| + L_1\right)}{u_x} v^2 \ge -\frac{2\left(f_x - L_1\right)}{u_x} v^2 \ge (\lambda - 2\kappa) v^2,$$

$$v(x_0, t_0) \le \frac{\sup\left|f_x\right| + L_1}{3},$$

即

$$v(x_0, t_0) \le C_1,$$

其中 C_1 与 T 无关的常数。

由于 $\Phi(x,t)$ 的最大值在点 (x_0,t_0) 处取得，故对任意的 (x,t) 有

$$\Phi(x,t) \le \Phi(x_0,t_0) = \log(u_x)^2 (x_0,t_0) + g(x_0) - \lambda t_0 \le \log(c_1)^2 + g(x_0) - \lambda t_0,$$

即

$$\log(u_x)^2 + g(x) - \lambda t \le \log(c_1)^2 + g(x_0) - \lambda t_0,$$

故

$$\log\left(u_x\right)^2 \le \log\left(c_1\right)^2 + g\left(x_0\right) - g\left(x\right) + \lambda\left(t - t_0\right) \le C,$$

其中 C 与 T 有关的常数。综上分析，得到了 u 的 C^1 估计，完成了定理 1 的证明。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061078)。

参考文献

[1] Guan, B. (1996) Mean Curvature Motion of Non-Parametric Hypersurfaces with Contact Angle Condition. In: *Elliptic & Parabolic Methods in Geometry*.

[2] Ma, X.N., Wang, P.H. and Wei, W. (2018) Constant Mean Curvature Surfaces and Mean Curvature Flow with Non-Zero Neumann Boundary Conditions on Strictly Convex Domains. *Journal of Functional Analysis*, **274**, 252-277. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.10.002

[3] Ma, X.N. and Xu, J.J. (2016) Gradient Estimates of Mean Curvature Equations with Neumann Boundary Value Problems. *Advances in Mathematics*, **290**, 1010-1039. https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.10.031

[4] Simon, L.M. and Spruck, J. (1976) Existence and Regularity of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **61**, 19-34. https://doi.org/10.1007/BF00251860

[5] Ural'Tseva, N.N. (1980) Solvability of the Capillary Problem II. *Acta Pathologica Micro-Biologica Scandinavica*, **8**, 236-251.

[6] Lieberman, G.M. (1988) Gradient Estimates for Capillary-Type Problems via the Maximum Principle. *Communications in Partial Differential Equations*, **13**, 33-59. https://doi.org/10.1080/03605308808820537

[7] Wang, X.J. (1998) Interior Gradient Estimates for Mean Curvature Equations. *Mathematische Zeitschrift*, **228**, 73-81. https://doi.org/10.1007/PL00004604

[8] Spruck, J. (1975) On the Existence of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **28**, 189-200. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280202

[9] Xu, J.J. (2019) Mean Curvature Flow of Graphs with Neumann Boundary Conditions. *Manuscripta Mathematica*, **158**, 75-84. https://doi.org/10.1007/s00229-018-1007-2

[10] 朱洁, 王培合. 具有 Neumann 边界条件的曲率方程的解[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2020, 46(4): 59-62.