Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 332-341
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144141

具有饱和输入的半马尔可夫线性系统的几乎必然指数稳定性分析

闫咏春

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月29日；录用日期：2024年3月20日；发布日期：2024年4月30日

摘　要

随机切换系统作为模拟受随机结构变化影响的动态过程的特殊混合系统，在众多领域具有广泛应用。马尔可夫线性系统(MLSs)作为重要模型备受关注，然而其逗留时间服从指数分布且转换速率恒定，限制了其应用范围。为克服这些限制，引入了半马尔可夫线性系统(S-MLSs)，其适用性更为广泛，允许子系统的逗留时间和转换速率是时变的。本文针对S-MLSs的几乎必然指数稳定性问题展开探讨，采用了线性矩阵不等式(LMIs)技术解决控制问题。我们提出了新的稳定性充分条件，改进了现有研究并减少了保守性。然而，目前的研究忽视了执行器饱和问题，这在实践中不可避免且严重影响闭环系统的性能。因此，本文旨在解决受随机扰动和执行器饱和影响的S-MLSs的几乎必然指数稳定问题，填补了该领域的研究空白。

关键词

半马尔科夫系统，几乎必然指数稳定性，遍历性，饱和输入

Analysis of Almost Sure Exponential Stability for Semi-Markovian Linear Systems with Saturated Inputs

Yongchun Yan

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 29th, 2024; accepted: Mar. 20th, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

Random switching systems, as special hybrid systems simulating dynamic processes affected by

文章引用：闫咏春. 具有饱和输入的半马尔可夫线性系统的几乎必然指数稳定性分析[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 332-341. DOI: 10.12677/pm.2024.144141

stochastic structural changes, have wide applications in numerous fields. While Markovian Linear Systems (MLSs) have garnered significant attention as important models, their applicability is constrained by the assumption that dwell times follow an exponential distribution and transition rates remain constant. To overcome these limitations, Semi-Markovian Linear Systems (S-MLSs) have been introduced, offering broader applicability by allowing the dwell times and transition rates of subsystems to be time-varying. This paper addresses the almost sure exponential stability problem of S-MLSs, employing Linear Matrix Inequality (LMI) techniques to tackle the control problem. We propose novel stability sufficient conditions, improving upon existing research and reducing conservatism. However, current studies overlook the issue of actuator saturation, which is inevitable in practice and significantly impacts the performance of closed-loop systems. Therefore, this paper aims to address the almost sure exponential stability problem of S-MLSs subject to both stochastic perturbations and actuator saturation effects, filling a research gap in this field.

Keywords

Semi-Markov Systems, Almost Sure Exponential Stability, Transience, Saturation Input

1. 引言

随机切换系统是一类特殊的混合系统，由一组子系统和随机切换信号组成[1]。这类系统用于模拟受到随机结构变化影响的动态过程，在经济、交通、航天等领域有广泛应用([2] [3])。其中，马尔可夫线性系统(MLSs)是随机切换系统的一个重要模型，其切换信号由马尔可夫过程描述。近几十年来关于 MLSs 随机稳定性、故障检测、状态估计和最优控制等方面的研究备受关注([4] [5] [6] [7])。然而，MLSs 在实际应用中存在许多限制，因为每个子系统的逗留时间服从指数分布，而转换速率是恒定的。为克服这些限制，控制领域引入了半马尔可夫线性系统(S-MLSs)的概念[8]。与 MLSs 相比，S-MLSs 的每个子系统的逗留时间允许遵循任意分布，从而使得半马尔可夫切换的转换速率成为时变量。因此，S-MLSs 相比传统的 MLSs 具有更广泛的应用领域。

关于 S-MLSs 的稳定性研究采用了多种方法，包括基于不同类型概率分布的逗留时间假设，以及利用转换速率上下界的线性矩阵不等式(LMIs)技术解决控制问题([9] [10] [11])。研究者还通过嵌入式马尔可夫链的平稳分布，对 MLSs 和 S-MLSs 进行了渐近稳定性和几乎必然指数稳定性的研究[12]。在参考文献[13]中，作者利用耦合 Lyapunov 函数和半马尔可夫切换过程构建了连续时间 S-MLSs 的新的几乎必然指数(ASE)稳定性条件。此外，在参考文献[14]中，作者通过结合切换点分布建立了 Lyapunov 函数，并提供了连续时间线性马尔可夫切换系统几乎必然指数稳定的充分条件。

然而，S-MLSs 的稳定性研究并未考虑执行器饱和问题。由于执行器的物理约束，控制信号受到有限幅和速率的限制，执行器饱和在实践中是不可避免的[15]。解决执行器饱和问题的方法包括直接方法和间接方法。直接方法采用多面体模型描述饱和非线性，而间接方法则设计期望的控制器，然后利用反馈补偿器处理饱和约束。执行器饱和严重影响闭环系统性能，有时会使稳定的闭环系统变得不稳定[16]。针对具有执行器饱和的控制系统的分析受到广泛关注，但对受执行器饱和影响的 S-MLSs 研究相对较少。控制领域已提了出一些相关控制方法，如低增益控制器方法[17]，但这些方法较为保守。部分研究使用集合不变条件方法([18] [19])，但这些方法涉及难以解决的等式约束，实际应用较为困难。

因此，我们的研究动机旨在解决受到随机扰动和执行器饱和影响的 S-MLSs 的稳定性问题，以填补这一领域的研究空白。本文的主要贡献如下：1) 与以往研究中仅考虑部分因素的 S-MLSs 不同([9] [11])，我们考虑了一个更为普适的模型，特别是考虑了在随机扰动和执行器饱和影响的情况下；2) 通过利用嵌入式马尔可夫链的平稳分布，我们提出了一种新型的基于一组解耦的 LMIs 的稳定性条件。与先前研究中提出的耦合 LMIs 方法([9] [11])相比，我们的方法改进了现有结果，降低了条件的保守性。

本文的结构如下所述：第 2 章提供了一些预备知识，包括问题的形式化、引理和定义。在第 3 章中，通过随机分析理论和多重 Lyapunov 函数方法，提出了具有饱和输入的半马尔科夫线性系统的几乎必然指数稳定条件。最后，在第 4 章中，总结了本文的主要发现并给出了结论。

2. 具有饱和输入的 S-MLS 系统模型

本节主要考虑以下具有饱和输入的半马尔科夫线性系统：

$$\mathrm{d}x(t)=\left[A_{\sigma(t)}x(t)+B_{\sigma(t)}sat\left(u(t)\right)\right]\mathrm{d}t+G_{\sigma(t)}x(t)\mathrm{d}w(t), \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示系统状态向量， $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 表示具有初始值 $u(0)=u_0$ 的控制输入， $w(t)$ 是随机扰动。对于每个 $i\in\mathcal{I}$， $A_i,B_i,G_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$， $sat(\cdot)$ 定义如下：

$$sat(u_z)=sgn(u_z)\cdot\min\left\{u_{\max},|u_z|\right\},z\in\{1,2,\cdots,m\}, \tag{2}$$

其中 $u_{\max}$ 称为饱和级别。通常情况下，我们取 $u_{\max}=1$ 。

方程(1)中控制器 $u(t)$ 的定义如下：

$$u(t)=K_{\sigma(t)}x(t). \tag{3}$$

首先介绍以下三个随机过程(参见[20])：

1) 随机过程 $\{k_n\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 取值于 $\mathbb{Z}\geq 0$，其中 k_n 表示第 n 次跳跃的时间。需要注意的是 $k_0=0$，并且随着 n 的增加， k_n 是单调递增的；

2) 随机过程 $\{r_n\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 是一个半马尔可夫链，取值于有限集 $\mathcal{I}=\{1,2,\cdots,M\}$，并控制着 M 种系统模式之间的切换，其中 r_n 是第 n 次跳跃时的系统模式的索引；

3) 随机过程 $\{S_n\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 取值于 $\mathbb{Z}\geq 0$， 其中 $S_n=k_{n+1}-k_n,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示第 n 次跳跃和 $(n+1)$ 次跳跃之间模式 $r(k_n)$ 的逗留时间，且 $S_0=0$ 。

定义 2.1 (见[21])：对于任意 $j\in\mathcal{I}$ 、 $\tau\in\mathbb{Z}\geq 0$ 和 $n\in\mathbb{Z}\geq 0$，称随机过程 $\{(r_n,k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 为齐次马尔可夫更新链(MRC)，如果满足以下条件：

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}\left(r_{n+1}=j,S_n\leq\tau\,|\,r_0,\cdots,r_n=i;k_0,\cdots,k_n\right)\\&=\mathcal{P}\left(r_{n+1}=j,S_n\leq\tau\,|\,r_n=i\right)\\&=\mathcal{P}\left(r_1=j,S_1\leq\tau\,|\,r_0=i\right).\end{aligned} \tag{4}$$

定义 2.2 (见[13])：考虑一个马尔可夫更新链(MRC) $\{(r_n,k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$：

1) 称链 $\{r_n\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 为 MRC $\{(r_n,k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 的嵌入式马尔可夫链(EMC)，且 $\{(r_n,k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 的转移概率矩阵(TPM)为 $P=\left[p_{ij}\right]_{M\times M}$， 其中 $p_{ij}=\mathcal{P}\left(r_{n+1}=j\,|\,r_n=i\right)$，对于任意 $n\in\mathbb{Z}\geq 0$， $p_{ii}=0$ 。

2) $\{r(k),k\geq 0\}$ 是与 MRC $\{(r_n,k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 相关的半马尔可夫链(SMC)，如果对于所有 $n\in\mathbb{Z}\geq 0$，都有 $r(k)=r_n,k\in\left[k_n,k_{n+1}\right)$ 。

上述 EMC $\{r_n\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$ 可以表示为 $\{r(k_n)\},n\in\mathbb{Z}\geq 0$。对于任意 $i\in\mathcal{I}$， τ_i 表示访问模式 i 的逗留时

间。对于任意$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，以下等式成立：

$$S_n=\tau_{r(k_n)}. \tag{5}$$

在本研究中，我们假设离散时间 EMC$\{r_n\},n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$是遍历的，并具有一稳定分布$\tilde{\pi}=(\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_2,\cdots,\tilde{\pi}_M)$。假设 SMC$\{r(k),k\geq 0\}$也是遍历的，并具有一个稳定分布$\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_M)$。有一个事实是(见[22])：

$$\pi_i=\frac{\tilde{\pi}_i E(\tau_i)}{\sum_{j\in\mathcal{I}}\tilde{\pi}_j E(\tau_j)}.\quad i\in\mathcal{I}. \tag{6}$$

根据文献[23]中的方程(16.13)和(16.14)所述的强大数定律，我们可以得出以下结论：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_i(k)}{N_i(k)}=E(\tau_i),\quad a.s.,\quad \forall i\in\mathcal{I}, \tag{7}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_i(k)}{N(k)}=\tilde{\pi}_i,\quad a.s.,\quad \forall i\in\mathcal{I}, \tag{8}$$

其中$N(k)$表示$\{r(k),k\geq 0\}$在$(0,k]$上的总切换发生次数，对于任意的$i,j\in\mathcal{I}$，$N_i(k)$表示状态i在$(0,k]$上的切换发生次数，$N_{ij}(k)$表示从状态i到状态j的切换发生次数在$(0,k]$上，$S_i(k)$表示停留在状态i的总逗留时间在$(0,k]$上。此外，$N_{ij}(k)=p_{ij}N_i(k)$，$N(k)=\sum_{i\in\mathcal{I}}N_i(k)$，$k=\sum_{i\in\mathcal{I}}S_i(k)$。

定义 2.3 (见[14])：称系统(1)是几乎必然指数稳定的，如果对于所有$x_0\in\mathbb{R}^n$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\ln|x(k,x_0)|}{k}<0,\quad a.s. \tag{9}$$

其中$x(k,x_0)$表示给定初始条件$x(0)=x_0$时系统(1)在时间k的状态，本文假设$x(k,x_0)\neq 0$。此外，出于简化起见，$x(k,x_0)$可以表示为$x(k)$。

引理 2.1 (见[24])： $\varepsilon_{m\times m}=\{E_l:l=1,2,\cdots,2^m\}$是对角矩阵的集合，其中$E_l$的对角元素为 1 或 0。设$K,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$k_z$是矩阵$K$的第$z$行。定义$\mathcal{M}(K)=\{x(t)\in\mathbb{R}^n:|k_z x(t)|\leq 1\}$，如果$x(t)\in\mathcal{M}(K)$，则有

$$sat(Kx(t))=\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))(E_lK+E_l^-H)x(t), \tag{10}$$

其中$E_l^-=1-E_l$，$0\leq\zeta_l(x(t))\leq 1$，且$\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))=1$。

在本文中，我们定义

$$\mathcal{M}(K_i)=\{x(t)\in\mathbb{R}^n:|k_{iz}x(t)|\leq 1\}. \tag{11}$$

因此，我们有

$$sat(K_ix(t))=\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))(E_lK_i+E_l^-H_i)x(t),\quad \sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))=1, \tag{12}$$

如果$x(t)\in\mathcal{M}(K_i)$。

利用上述控制器的定义和引理 2.1，我们得到以下闭环系统：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)&=\left[A_{\sigma(t)}+B_{\sigma(t)}\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\left(E_lK_{r(t)}+E_l^-H_{r(t)}\right)\right]x(t)\mathrm{d}t+G_{\sigma(t)}x(t)\mathrm{d}w(t)\\&=\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\hat{A}_{\sigma(t),r(t),l}x(t)\mathrm{d}t+G_{\sigma(t)}x(t)\mathrm{d}w(t),\end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\hat{A}_{\sigma(t),l}=A_{\sigma(t)}+B_{\sigma(t)}\left(E_l K_{\sigma(t)}+E_l^- H_{\sigma(t)}\right). \tag{14}$$

3. 具有饱和输入的 S-MLS 系统的稳定性分析

设 $\beta(t)$ 为一个分段有界且可导的函数。记 $\{q_n\}_{n\in N}$ 为 $\beta(t)$ 的各个断点，且满足 $\beta\left(q_{n+1}^-\right)\geq 0$。同时，$M(t)$ 表示 $\beta(t)$ 在 $(0,1]$ 上的总分段区间数。

定理 3.1： 对于 $\forall i,j\in I,n\in N,l=1,2,\cdots,2^m$，如果存在一个满足 $H\left(q_{n+1}^-\right)>0$ 的函数 $H(t)$，实数 $\mu_{ij}>0\ (i\neq j),\beta_i,\gamma_i$ 以及实对称矩阵 $P_{i,1},P_{i,2}$ 满足 $P_{i,k}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)>0,k=1,2$，使得以下不等式成立

$$\begin{aligned}&Her\left(\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\hat{A}_{i,l}\right)-\gamma_i Her\left(\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i\right)\\&+G_i^{\mathrm{T}}\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i+\frac{1}{E(\tau_i)}\left(P_{i,2}-P_{i,1}\right)+\beta'(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\\&+\frac{1}{2}\gamma_i^2\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\leq\beta_{i,l}\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&Her\left(\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\hat{A}_{i,l}\right)-\gamma_i Her\left(\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i\right)\\&+G_i^{\mathrm{T}}\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i+\frac{1}{E(\tau_i)}\left(P_{i,2}-P_{i,1}\right)+\beta'(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\\&+\frac{1}{2}\gamma_i^2\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\leq\beta_{i,l}\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right),\end{aligned} \tag{16}$$

$$V\left(q_{n+1},\sigma\left(q_{n+1}\right),x\left(q_{n+1}\right)\right)\leq H\left(q_{n+1}^-\right)V\left(q_{n+1}^-,\sigma\left(q_{n+1}^-\right),x\left(q_{n+1}^-\right)\right),\ n\in N, \tag{17}$$

$$P_{j,1}+\beta(t)\left(P_{j,1}+P_{j,2}\right)\leq\mu_{ij}\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right),\ \ i\neq j, \tag{18}$$

$$\sum_{i\in I}\pi_i\left[\beta_i+\frac{\sum_{j\in I}p_{ij}\ln\mu_{ij}}{E(\tau_i)}\right]+\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H\left(q_{n+1}^-\right)<0, \tag{19}$$

其中

$$\beta_i=\max\left\{\beta_{i,l},l=1,2,\cdots,2^m\right\}, \tag{20}$$

则 S-MLS 系统(1)是几乎必然指数稳定的。

证明： 首先，综合利用半马尔可夫切换时间点和分段函数 $\beta(t)$ 构造一个新的随机 Lyapunov 函数：

$$V\left(t,x(t)\right)=x^{\mathrm{T}}(t)\left[c_{\sigma(t)}^1(t)P_{\sigma(t),1}+c_{\sigma(t)}^2(t)P_{\sigma(t),2}+\beta(t)\left(P_{\sigma(t),1}+P_{\sigma(t),2}\right)\right]x(t), \tag{21}$$

其中，对于 $\forall t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$，有 $c_{\sigma(t)}^1(t)=\dfrac{t_{n+1}-t}{\tau_{\sigma(t)}}$ 和 $c_{\sigma(t)}^2(t)=\dfrac{t-t_n}{\tau_{\sigma(t)}}$， $k\in N$。

利用 Itô 公式，我们可以得到

$$\mathrm{d}V\left(t,x(t)\right)=\mathcal{L}V\left(t,x(t)\right)\mathrm{d}t+\mathcal{H}V\left(t,x(t)\right)\mathrm{d}w(t),$$

其中

$$\mathcal{L}V(t,x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)\Bigg[\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\mathbf{Her}\Big(\big(c_{\sigma(t)}^1(t)P_{\sigma(t),1}+c_{\sigma(t)}^2(t)P_{\sigma(t),2}+\beta(t)\big(P_{\sigma(t),1}+P_{\sigma(t),2}\big)\big)\hat{A}_{\sigma(t),l}\Big)$$
$$+G_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}\big(c_{\sigma(t)}^1(t)P_{\sigma(t),1}+c_{\sigma(t)}^2(t)P_{\sigma(t),2}+\beta(t)\big(P_{\sigma(t),1}+P_{\sigma(t),2}\big)\big)G_{\sigma(t)}$$
$$+\frac{1}{\tau_{\sigma(t)}}\big(P_{\sigma(t),2}-P_{\sigma(t),1}\big)+\beta'(x)\big(P_{\sigma(t),1}+P_{\sigma(t),2}\big)\Bigg]x(t), \tag{22}$$

$$\mathcal{H}V(t,x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\mathbf{Her}\Big(\big(c_{\sigma(t)}^1(t)P_{\sigma(t),1}+c_{\sigma(t)}^2(t)P_{\sigma(t),2}+\beta(t)\big(P_{\sigma(t),1}+P_{\sigma(t),2}\big)\big)G_{\sigma(t)}\Big)\Big]x(t). \tag{23}$$

然后，通过对 $\ln V(t,x(t))$ 应用 Itô 公式，我们得到

$$\mathrm{d}\ln V(t,x(t))=\left[\frac{\mathcal{L}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right|^2\right]\mathrm{d}t+\left[\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right]\mathrm{d}w(t). \tag{24}$$

因此，对于任意 $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$， $k\in N$ ，我们有

$$\ln V(t,x(t))=\ln V(t_n,x(t_n))+\int_{t_n}^{t}\left[\frac{\mathcal{L}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right|^2\right]\mathrm{d}t+\int_{t_n}^{t}\left[\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right]\mathrm{d}w(t). \tag{25}$$

同样地，对于任意 $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$， $k\in N$ ，我们有

$$\ln V(t_n^-,x(t_n^-))=\ln V(t_{n-1},x(t_{n-1}))+\int_{t_{n-1}}^{t_n^-}\left[\frac{\mathcal{L}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right|^2\right]\mathrm{d}t+\int_{t_{n-1}}^{t_n^-}\left[\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right]\mathrm{d}w(t). \tag{26}$$

根据条件(18)，我们推导出以下不等式：

$$\ln V(t_n,x(t_n))\le\ln V(t_n^-,x(t_n^-))+\ln\mu_{\sigma(t_{n-1})\sigma(t_n)}. \tag{27}$$

进一步根据条件(17)，由于 $H(q_{n+1}^-)\ge 0$ ，我们有：

$$\ln V(q_{n+1},x(q_{n+1}))\le\ln V(q_{n+1}^-,x(q_{n+1}^-))+\ln H(q_{n+1}^-). \tag{28}$$

通过递归方法，可以得到如下不等式：

$$\ln V(t,x(t))\le\ln V(0,x_0)+\sum_{n=0}^{N(t)-1}\ln\mu_{\sigma(t_n)\sigma(t_{n+1})}+\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H(q_{n+1}^-)+\Theta(t)+\Psi(t), \tag{29}$$

其中

$$\Theta(t)=\int_0^t\left[\frac{LV(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right|^2\right]\mathrm{d}t, \tag{30}$$

$$\Psi(t)=\int_0^t\left[\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right]\mathrm{d}w(t). \tag{31}$$

接下来，对于 $t\in[t_k,t_{k+1})$， $\sigma(t_k)=i,\ k\in N,\ i\in I$ ，令

$$x_1(t)=\sqrt{\frac{t_{k+1}-t}{\tau_i}}x(t),\ x_2(t)=\sqrt{\frac{t-t_k}{\tau_i}}x(t),$$
$$\eta^{\mathrm{T}}(t)=\big(x_1^{\mathrm{T}}(t),\ x_2^{\mathrm{T}}(t)\big),$$

$$\tilde{P}_i = diag\left\{P_{i,2}-P_{i,1}, P_{i,2}-P_{i,1}\right\},$$

$$P_i = diag\left\{P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right), P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right\},$$

$$\begin{aligned}\Xi_{i,l} = diag\Big\{&Her\left(\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\hat{A}_{i,l}\right)+G_i^{\mathrm{T}}\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i+\beta'(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right),\\ &Her\left(\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)\hat{A}_{i,l}\right)+G_i^{\mathrm{T}}\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i+\beta'(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\Big\},\end{aligned}$$

$$\Delta_i = diag\left\{Her\left(\left(P_{i,1}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i\right), Her\left(\left(P_{i,2}+\beta(t)\left(P_{i,1}+P_{i,2}\right)\right)G_i\right)\right\}.$$

因此，式(21)、(22)和(23)可以更简洁地表示为

$$V(t,x(t)) = \eta^{\mathrm{T}}(t)P_i\eta(t), \tag{32}$$

$$\mathcal{L}V(t,x(t)) = \eta^{\mathrm{T}}(t)\left(\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\Xi_{i,l}+\frac{1}{\tau_i}\tilde{P}_i\right)\eta(t), \tag{33}$$

$$\mathcal{H}V(t,x(t)) = \eta^{\mathrm{T}}(t)\Delta_i\eta(t). \tag{34}$$

接下来，对于 $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$，假设 $\sigma(t_k)=i, k\in N$，利用(32)、(33)、(34)可以得到，存在常数 γ_i 使得

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{1}{2}\left|\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}\right|^2 &\le \frac{\mathcal{L}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\gamma_i\frac{\mathcal{H}V(t,x(t))}{V(t,x(t))}+\frac{1}{2}\gamma_i^2\\ &= \frac{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)\left[\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\Xi_{i,l}-\gamma_i\Delta_i+\frac{1}{E(\tau_i)}\tilde{P}_i+\frac{1}{2}\gamma_i^2P_i\right]\eta_i(t)}{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)P_i\eta_i(t)}\\ &\quad+\left(\frac{1}{\tau_i}-\frac{1}{E(\tau_i)}\right)\times\frac{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}_i\eta_i(t)}{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)P_i\eta_i(t)}.\end{aligned}$$

使用条件(15)和(16)可以得到如下不等式

$$\frac{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)\left[\Xi_{i,l}-\gamma_i\Delta_i+\frac{1}{E(\tau_i)}\tilde{P}_i+\frac{1}{2}\gamma_i^2P_i\right]\eta_i(t)}{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)P_i\eta_i(t)} < \beta_{i,l}\le\beta_i.$$

由上可知：

$$\begin{aligned}\Theta(t) &= \int_0^t\left[\sum_{l=1}^{2^m}\zeta_l(x(t))\beta_i+\left(\frac{1}{\tau_i}-\frac{1}{E(\tau_i)}\right)\times\frac{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}_i\eta_i(t)}{\eta_i^{\mathrm{T}}(t)P_i\eta_i(t)}\right]\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}}\beta_iS_i+\Phi(t),\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$\Phi(t) = \int_0^t\left[\left(\frac{1}{\tau_{\sigma(s)}}-\frac{1}{E\left(\tau_{\sigma(s)}\right)}\right)\times\frac{\eta^{\mathrm{T}}(s)\tilde{P}_{\sigma(s)}\eta(s)}{\eta^{\mathrm{T}}(s)P_{\sigma(s)}\eta(s)}\right]\mathrm{d}s.$$

把(35)代入(29)中可得

$$\ln V(t,x(t)) \le \ln V(0,x_0)+\sum_{n=0}^{N(t)-1}\ln\mu_{\sigma(t_n)\sigma(t_{n+1})}+\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H\left(q_{n+1}^-\right)+\sum_{i\in\mathcal{I}}\beta_iS_i+\Phi(t)+\Psi(t), \tag{36}$$

对于 $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$ 和 $\sigma(t_k)=i,k\in N,i\in I$，根据文献[13]可以推断出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=0.\ a.s. \tag{37}$$

由文献[25]中的定理 1.6 可知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi(t)}{t}=0,\ a.s. \tag{38}$$

根据方程(6)，(7)和(8)，很容易证明对于任意 $i\in\mathcal{I}$，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{S_i(t)}{t}&=\lim_{t\to\infty}\frac{S_i(t)}{\sum_{j\in\mathcal{I}}S_j(t)}\\&=\frac{\lim_{t\to\infty}\frac{S_i(t)}{N_i(t)}\frac{N_i(t)}{N(t)}}{\sum_{j\in\mathcal{I}}\lim_{t\to\infty}\frac{S_j(t)}{N_j(t)}\frac{N_j(t)}{N(t)}}\\&=\frac{\tilde{\pi}_iE(\tau_i)}{\sum_{j\in\mathcal{I}}\tilde{\pi}_jE(\tau_j)}=\pi_i.\end{aligned} \tag{39}$$

结合式(7)和(8)可以推断出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_i(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_i(t)}{S_i(t)}\frac{S_i(t)}{t}=\frac{\pi_i}{E(\tau_i)}.\ a.s. \tag{40}$$

因此，显然可以得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\sum_{i\in I}\frac{N_i(t)}{t}=\sum_{i\in I}\frac{\pi_i}{E(\tau_i)}.\ a.s. \tag{41}$$

那么结合上式可得出以下关系式

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N(t)-1}\ln\mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k+1})}}{t}&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i\in I}\sum_{j\in I,j\neq i}N_{ij}(t)\ln\mu_{ij}}{t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i\in I}\sum_{j\in I,j\neq i}N_i(t)p_{ij}\ln\mu_{ij}}{t}\\&=\sum_{i\in I}\frac{\pi_i}{E(\tau_i)}\sum_{j\in I}p_{ij}\ln\mu_{ij}.\ a.s.\end{aligned} \tag{42}$$

而且，显而易见的是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H\left(q_{n+1}^-\right)\le\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H\left(q_{n+1}^-\right). \tag{43}$$

最后，把(37)、(38)、(39)、(42)、(43)和(36)可以得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln V(t,\sigma(t),x(t))}{t}\\&\le\sum_{i\in I}\pi_i\left[\beta_i+\frac{\sum_{j\in I}p_{ij}\ln\mu_{ij}}{E(\tau_i)}\right]+\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{M(t)-1}\ln H\left(q_{n+1}^-\right).\ a.s.\end{aligned}$$

根据条件(19)，定理 3.1 得证。

4. 总结

本文研究了具有随机切换和执行器饱和影响的半马尔可夫线性系统(S-MLSs)的几乎必然指数稳定性问题。在引言部分，我们介绍了随机切换系统的背景和 S-MLSs 的重要性，以及现有研究中的局限性。接着，通过预备知识部分，我们引入了关于马尔可夫更新链和半马尔可夫链的概念，以及几乎必然指数稳定性的定义和一些重要引理。在主要内容部分，我们提出了一个定理，证明了当满足一定条件时，具有随机切换和饱和输入的 S-MLSs 是几乎必然指数稳定的。证明过程中，我们利用了随机 Lyapunov 函数和递归方法，详细推导了稳定性条件的成立。我们的分析结果填补了相关领域的研究空白，并提供了新的稳定性判据。

综上所述，本文通过对 S-MLSs 的稳定性进行深入研究，解决了受到随机扰动和执行器饱和影响的系统稳定性问题。我们的研究不仅拓展了对 S-MLSs 稳定性的理解，还为相关领域的控制系统设计提供了重要的理论基础。未来的工作可以进一步探索 S-MLSs 在实际工程系统中的应用，并优化稳定性条件以提高控制系统的性能和鲁棒性。

致　谢

我想向我的导师表达最诚挚的谢意。在整个硕士学习生涯中，他给予了我悉心的指导和无私的支持，这对我来说意义非凡。他始终相信我的能力，并为我提供了充分的自由度去探索和学习。在我遇到困难和挑战的时候，他总是给予我鼓励和支持，让我坚定地走过了学术道路上的艰难时刻。他不仅解答了我在研究中遇到的种种疑问，还给予了我许多宝贵的建议和指导，使我受益匪浅。他对学术研究的严谨态度和扎实的专业知识深深影响着我，激励我不断进取，不断提高自己的学术水平和研究能力。在此，我要向我的导师表示最诚挚的感谢和敬意。他的悉心指导和无私帮助是我在学术道路上的重要支柱，我将倍加珍惜并铭记于心。感谢所有关心和支持我的人，在你们的陪伴和鼓励下，我才能够顺利完成硕士学业，迈向人生的新征程。再次向我的导师和所有支持我的人表示衷心的感谢！

参考文献

[1] Hu, Z.H. and Mu, X.W. (2019) Stabilization for Switched Stochastic Systems with Semi-Markovian Switching Signals and Actuator Saturation. *Information Sciences*, **483**, 419-431. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.01.063

[2] Lu, Z.G., Lu, S.F., Xu, M.R. and Cui, B.W. (2021) A Robust Stochastic Stability Analysis Approach for Power System Considering Wind Speed Prediction Error Based on Markov Model. *Computer Standards & Interfaces*, **75**, Article ID: 103503. https://doi.org/10.1016/j.csi.2020.103503

[3] Cao, Y.-Y. and Lam, J. (2000) Robust H/Sub/Spl Infin//Control of Uncertain Markovian Jump Systems with Time-Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**, 77-83. https://doi.org/10.1109/9.827358

[4] Liu, W. (2017) State Estimation for Discrete-Time Markov Jump Linear Systems with Time-Correlated Measurement Noise. *Automatica*, **76**, 266-276. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.028

[5] Sun, M.H., Lam, J., Xu, S.Y. and Zou, Y. (2008) Corrigendum to: "Robust Exponential Stabilization for Markovian Jump Systems with Mode-Dependent Input Delay" [Automatica 43 (10) (2008) 1799-1807]. *Automatica*, **44**, 3227. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.10.005

[6] Yin, S., Yang, H. and Kaynak, O. (2017) Sliding Mode Observer-Based FTC for Markovian Jump Systems with Actuator and Sensor Faults. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 3551-3558. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2669189

[7] Zhong, X., He, H., Zhang, H. and Wang, Z. (2014) Optimal Control for Unknown Discrete-Time Nonlinear Markov Jump Systems Using Adaptive Dynamic Programming. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **25**, 2141-2155. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2014.2305841

[8] Mariton, M. (1989) On Systems with Non-Markovian Regime Changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**,

346-349. https://doi.org/10.1109/9.16431

[9] Kim, S.H. (2017) Stochastic Stability and Stabilization Conditions of Semi-Markovian Jump Systems with Mode Transition-Dependent Sojourn-Time Distributions. *Information Sciences*, **385-386**, 314-324. https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.01.008

[10] Jiang, B., Kao, Y., Karimi, H.R. and Gao, C. (2018) Stability and Stabilization for Singular Switching Semi-Markovian Jump Systems with Generally Uncertain Transition Rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 3919-3926. https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2819654

[11] Huang, J. and Shi, Y. (2013) Stochastic Stability and Robust Stabilization of Semi-Markov Jump Linear Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **23**, 2028-2043. https://doi.org/10.1002/rnc.2862

[12] Wu, X., Tang, Y., Cao, J. and Mao, X. (2018) Stability Analysis for Continuous-Time Switched Systems with Stochastic Switching Signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 3083-3090. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2779882

[13] Wang, B. and Zhu, Q.X. (2020) The Novel Sufficient Conditions of Almost Sure Exponential Stability for Semi-Markov Jump Linear Systems. *Systems & Control Letters*, **137**, Article ID: 104622. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104622

[14] Cong, S. (2018) A Result on Almost Sure Stability of Linear Continuous-Time Markovian Switching Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 2226-2233. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2760514

[15] Zhang, L.X. and Sun, M.H. (2023) Dynamic Event-Triggered H∞ Control for Markov Jump Systems with Input Saturation. *European Journal of Control*, **70**, Article ID: 100770. https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2022.100770

[16] Liu, H.P., Boukas, E.-K., Sun, F.C. and Ho, D.W.C. (2006) Controller Design for Markov Jumping Systems Subject to Actuator Saturation. *Automatica*, **42**, 459-465. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.10.017

[17] Costa, O.L.V., Assumpção Filho, E.O., Boukas, E.K. and Marques, R.P. (1999) Constrained Quadratic State Feedback Control of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *Automatica*, **35**, 617-626. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(98)00202-7

[18] Daraoui, N., Benzaouia, A. and Boukas, E.K. (2003) Regulator Problem for Linear Discrete-Time Delay Systems with Markovian Jumping Parameters and Constrained Control. 42*nd IEEE International Conference on Decision and Control*, Maui, 9-12 December 2003, 2806-2810.

[19] Boukas, E.K. and Benzaouia, A. (2002) Stability of Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters and Constrained Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**, 516-521. https://doi.org/10.1109/9.989152

[20] Zhang, L., Leng, Y. and Colaneri, P. (2016) Stability and Stabilization of Discrete-Time Semi-Markov Jump Linear Systems via Semi-Markov Kernel Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **61**, 503-508.

[21] Barbu, V. and Limnios, N. (2006) Empirical Estimation for Discrete-Time Semi-Markov Processes with Applications in Reliability. *Journal of Nonparametric Statistics*, **18**, 483-498. https://doi.org/10.1080/10485250701261913

[22] Wang, B. and Zhu, Q. (2019) A Note on Sufficient Conditions of Almost Sure Exponential Stability for Semi-Markovian Jump Stochastic Systems. *IEEE Access*, **7**, 49466-49473. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2910663

[23] Kobayashi, H., Mark, B.L. and Turin, W. (2012) Probability, Random Processes, and Statistical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511977770

[24] Li, H.C, Liu, X.Z., Liu, J. and Yang, P. (2021) Event-Triggered Stabilization for Continuous-Time Saturating Markov Jump Systems with Generally Uncertain Transition Rates. *Asian Journal of Control*, **23**, 1545-1556. https://doi.org/10.1002/asjc.2311

[25] Mao, X. and Yuan, C. (2006) Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press, London. https://doi.org/10.1142/p473