**Pure Mathematics** 理论数学, 2024, 14(4), 355-360
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144143

Hans汉斯

# 关于对称同胚的一些结果

**王念军，张　庭，赵　林**

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳

收稿日期：2024年3月8日；录用日期：2024年3月27日；发布日期：2024年4月30日

## 摘　要

对于一个定义在单位圆周上的拟对称同胚$h$，在Grunsky核函数的基础上，给出了$h$是一个对称同胚时的等价刻画。已知基于拟对称同胚生成了一个核函数，并对该核函数在单位圆盘上进行积分，已经有专家借助该积分为对称同胚做出了等价刻画，本文对现有结果进行了推广。

## 关键词

对称同胚，拟对称同胚，核函数

# Some Results on the Symmetric Homeomorphisms

**Nianjun Wang, Ting Zhang, Lin Zhao**

School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Mar. 27th, 2024; published: Apr. 30th, 2024

## Abstract

**For a quasisymmetric homeomorphism $h$ defined on the unit disc, an equivalent characterization is given on the basis of the Grunsky kernel function when $h$ is a symmetric homeomorphism. It is known that a kernel function is generated based on the quasisymmetric homeomorphism and an integral of this kernel function over the unit disc has been made by experts with the help of this integral to make equivalent characterizations for the symmetric homeomorphism, and in this paper we generalize the existing results.**

## Keywords

**Symmetric Homeomorphisms, Quasisymmetric Homeomorphisms, Kernal Functions**

文章引用: 王念军, 张庭, 赵林. 关于对称同胚的一些结果[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 355-360.
DOI: 10.12677/pm.2024.144143

## 1. 引言及主要结果

为了叙述相关背景知识和结果，我们先从一些简单的定义和记号开始。我们用 $\mathbb{C}$ 表示复平面，$\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 表示单位圆盘，$S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 表示单位圆周。

**定义 1.1** 令 $h:S^1\to S^1$ 为一个定义在 $S^1$ 上的保向同胚，对 $S^1$ 上所有相邻的且具有相同弧长($|I_1|=|I_2|\le\pi$)的弧 $I_1$ 与 $I_2$，若存在一个常数 $M>0$ 使得

$$\frac{1}{M}\le\left|\frac{h(I_1)}{h(I_2)}\right|\le M$$

成立，则我们称这样的一个保向同胚 $h$ 是一个拟对称同胚。

我们用 $QS(S^1)$ 表示单位圆周 $S^1$ 上所有的拟对称同胚的集合。

Beurling 和 Ahlfors 在文献[1]中证明了：

**定理 1.1** [1]一个保向同胚 $h$ 是拟对称同胚当且仅当存在一个由$\Delta$映到自身的拟共形映射的边界值为 $h$。

现在我们给出对称同胚的定义：

**定义 1.2** 对于一个拟对称同胚 $h$，若对任何一对 $S^1$ 中相邻的子区间 $|I_1|$ 和 $|I_2|$ 且 $|I_1|=|I_2|$，都有

$$\frac{|h(I_1)|}{|h(I_2)|}=1+o(1),\ |I_1|=|I_2|\to 0^+.$$

则我们称 $h$ 为一个对称同胚。

我们 $QSS(S^1)$ 表示单位圆周 $S^1$ 上所有的对称同胚的集合。

接下来，我们介绍后续需要的一些量。首先对于一个单位圆周 $S^1$ 上拟对称同胚 $h$，一个由它所生成的核函数为

$$\Phi_{h,p}(z)=\left(\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}|\phi_h(\zeta,z)|^p\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{p}},\ z\in\Delta.$$

其中

$$\phi_h(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{h(\omega)}{(1-\zeta\omega)^2(1-zh(\omega))}\mathrm{d}\omega,\ (\zeta,z)\in\Delta\times\Delta.$$

显然 $\phi_h(\zeta,z)$ 对 $\zeta$ 与 $z$ 都是全纯的。函数 $\phi_h(\zeta,z)$ 由胡韻和沈玉良在文献[2]中介绍，当然，在文献[3]也出现过。函数 $\Phi_{h,2}(z)$ 已被用于研究 Teichmüller 空间理论，见文献[2] [4] [5]。

胡韻和沈玉良借助 $\Phi_{h,2}(z)$ 在文献[2]中得到了对称同胚的等价刻画，证明了：

**定理 1.2 [2]** 令 $h$ 是一个拟对称同胚，那么 $h\in QSS(S^1)$ 当且仅当

$$\lim_{|z|\to1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}(z)=0.$$

唐树安和 Wu 在文献[6]中对这一结果做了推广，证明了：

**定理 1.3** [6]令 $p>2$，$h$ 是一个拟对称同胚，那么 $h\in QSS(S^1)$ 当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,p}(z)=0.$$

也有其他专家对对称同胚做了等价刻画，详见文献[7]。

对于一个定义在 $\Delta$ 上的局部单叶函数 $f$，Grunsky 核函数定义为

$$U(f,\zeta,z)=\frac{f'(z)f'(\zeta)}{\left(f(\zeta)-f(z)\right)^2}-\frac{1}{(\zeta-z)^2},\ (\zeta,z)\in\Delta\times\Delta.$$

众所周知，$\lim_{\zeta\to z}U(f,\zeta,z)=-\frac{1}{6}S_f(z)$，可见文献[8]，这里的 $S_f(z)$ 为 $f$ 的 Schwarzian 导数，定义为

$$S_f=\left(N_f\right)'-\frac{1}{2}\left(N_f\right)^2,\ N_f=\left(\log f'\right)'.$$

这表明 $U(f,\zeta,z)$ 在 $\Delta\times\Delta$ 上是解析的。并且 $U(f,\zeta,z)=0$ 当且仅当 $f$ 在 $\Delta$ 上是一个莫比乌斯变换。因此 $U(f,\zeta,z)$ 也可算 Schwarzian 导数的一种推广。对于 $\Delta$ 上的局部单叶函数 $f$，Harmelin 在文献[8]中得到了 $U(f,\zeta,z)$ 的非常优美的表达式：

$$U(f,\zeta,z)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\psi_n(f,z)(\zeta-z)^{n-2},\ z\in\Delta.$$

其中 $\psi_n(f,z), n=2,3,\cdots$ 为 Aharonov 不变量，见文献[9]。事实上，可以考虑函数

$$F(f,\zeta,z)=\frac{f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{1}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(f,z)(\zeta-z)^{n-1}.$$

而

$$U(f,\zeta,z)=\frac{\partial F(f,\zeta,z)}{\partial\zeta}.$$

在本文中，我们主要考虑函数

$$\mathcal{U}_p(f,z)=\left(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta\left|U(f,\zeta,z)\right|^p\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{p}},\ z\in\Delta,\ p\geq 2.$$

其中

$$\mathcal{U}_2(f,z)=\left(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta\left|U(f,\zeta,z)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

由 Bazilevic 在 1967 年引入(见文献[10])，在单叶函数研究与 Teichmüller 空间理论研究中都有着重要作用。Grunsky 核函数在单叶函数理论与拟共形映射理论的研究中有着极其重要的作用，可见文献[4] [5] [8]。在本文中，我们将通过使用 $\mathcal{U}_2(f,z)$ 给出对称同胚的一个等价刻画。

在介绍本文的结果之前，我们还需了解这样一个事实：对于任何拟对称同胚 $h$，都存在一对唯一的在 $\Delta$ 上的共形映射 $f$ 和 $\Delta^*$ 上的共形映射 $g$，且 $f$ 有一个到 $\mathbb{C}$ 的拟共形延拓，使得 $f(0)=f'(0)-1=0$，$g(\infty)=\infty$ 且 $h=f^{-1}\circ g$ ($h$ 定义在 $S^1$ 上)。我们称之为 $h$ 的一个标准分解。相反，对于 $\Delta$ 上的每个 $f$(存在到 $\mathbb{C}$ 的拟共形延拓)，存在一个拟对称同胚 $h$，其标准分解为 $h=f^{-1}\circ g$ ($h$ 定义在 $S^1$ 上)，见文献[11]。我们称其为与 $f$ 相关的共形粘合同胚。

本文的主要结果如下：

**定理 1.4** 令 $f$ 是 $\Delta$ 上的一个有界共形映射，并允许一个到全平面 $\mathbb{C}$ 的拟共形延拓，$h$ 是与 $f$ 相关的共

形粘合同胚，那么下列陈述等价：

(1) $h\in QSS\left(S^1\right)$；

(2) $\lim\limits_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\mathcal{U}_2\left(f,z\right)=0$。

下面的结果对定理 1.2 做了一个小的推广：

**定理 1.5** 令 $p>2$，$h$ 是一个拟对称同胚，若 $h\in QSS\left(S^1\right)$，则

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,p}\left(\overline{z}\right)=0.$$

本文所采用的方法是运用定理 1.2 的结果，结合一个已知的不等式，将量 $\mathcal{U}_2\left(f,z\right)$ 与量 $\Phi_{h,2}\left(z\right)$ 联系起来，体现出它们之间的大小关系，最后得到对称同胚的一个等价刻画；推广部分，主要是将定理 1.2 中的必要条件中 $p=2$ 的情况推广到了 $p>2$ 的情况，所采用的技巧是得到了 $\Phi_{h,p}\left(z\right)$ 与 $\Phi_{h,2}\left(z\right)$ 的大小关系进而得到证明。

## 2. 主要结果的证明

我们将在本节对定理 1.4 与定理 1.5 进行证明，为此，我们有必要先介绍一个引理。

**引理 2.1** [3]令 $f$ 为 $\Delta$ 内的共形映射，并且 $h$ 是与 $f$ 相关的共形粘合同胚，则有不等式

$$\mathcal{U}_2\left(f,z\right)\le\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right)\le\left\|T_h^+\right\|\mathcal{U}_2\left(f,z\right). \tag{1}$$

其中算子 $T_h^+$ 是一个关于 $h$ 的积分算子，由胡韻和沈玉良在文献[2]中介绍，它作用在复的 Hilbert 空间中的函数 $\psi$ 上，该空间由单位圆 $\Delta$ 上所有的解析函数组成，并定义了范数

$$\|\psi\|=\left(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta\left|\psi\left(\zeta\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}},\ \zeta=\xi+i\eta.$$

算子 $T_h^+$ 在这里不需要详细介绍，我们只需要知道它是一个有界算子即可，证明过程详见文献[2]。

### 2.1. 定理 1.4 的证明

我们先证明(1)$\Rightarrow$(2)。首先，若 $h\in QSS\left(S^1\right)$，由定理 1.2 可知 $h\in QSS\left(S^1\right)$ 当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(z\right)=0,$$

根据作者在文献[2]中对定理 1.2 的证明过程，通过变量替换，将 $z$ 换成 $\overline{z}$，我们可以很容易得到 $h\in QSS\left(S^1\right)$ 当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right)=0,$$

根据(1)式中的第一个不等关系，可推得

$$\left(1-|z|^2\right)\mathcal{U}_2\left(f,z\right)\le\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right),$$

于是

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\mathcal{U}_2\left(f,z\right)=0.$$

于是(1)$\Rightarrow$(2)得证。

相反，若 $\lim\limits_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\mathcal{U}_2\left(f,z\right)=0$，因为 $T_h^+$ 是一个关于 $h$ 的有界积分算子，那么

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\left\|T_h^+\right\|\mathcal{U}_2\left(f,z\right)=0$$

根据(1)式中的第二个不等关系，可推得

$$\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right)\le\left\|T_h^+\right\|\left(1-|z|^2\right)\mathcal{U}_2\left(f,z\right),$$

于是

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right)=0,$$

通过上述的变量替换，这也表明 $h\in QSS\left(S^1\right)$。至此，定理证毕。■

## 2.2. 定理 1.5 的证明

因为 $h\in QSS\left(S^1\right)$，根据定理 1.4 的证明过程中可知

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right)=0.$$

有一个著名的结果：对任意定义在 $\Delta$ 中的全纯函数 $\tau$，下面的不等式成立：

$$\left(1-|\zeta|^2\right)^2\left|\tau\left(\zeta\right)\right|^2\le\iint_\Delta\left|\tau\left(\zeta\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

见文献[12]。因此，若令 $\tau\left(\zeta\right)=\phi_h\left(\zeta,z\right),z,\zeta\in\Delta$，则有

$$\left(1-|\zeta|^2\right)^2\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\le\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

故

$$\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-2}\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^{p-2}\le\left(\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\iint_\Delta\Phi_{h,p}\left(z\right)^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_\Delta\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^p\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_\Delta\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^{p-2}\left(1-|\zeta|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\le\iint_\Delta\left(\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)\left(\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\le\iint_\Delta\left(\iint_\Delta\left|\phi_h\left(\zeta,z\right)\right|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{p}{2}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_\Delta\Phi_{h,2}\left(z\right)^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

此过程可表明

$$\Phi_{h,p}\left(z\right)\le\Phi_{h,2}\left(z\right),\ z\in\Delta,$$

于是

$$\Phi_{h,p}\left(\overline{z}\right)\le\Phi_{h,2}\left(\overline{z}\right),\ z\in\Delta,$$

进而

$$\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,p}(\bar{z})\le\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,2}(\bar{z}),$$

那么

$$\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,p}(\bar{z})=0.$$

至此，定理证毕。■

## 3. 总结与展望

本文中，定理 1.4 为对称同胚做了一个等价刻画，这个结果有望在某些证明的过程中能起到过度作用。此外，定理 1.5 只说明了一个拟对称同胚 $h$ 是一个对称同胚时的必要条件，那么一个自然且有趣的问题是，相反，若 $\lim_{|z|\to 1}\left(1-|z|^2\right)\Phi_{h,p}(\bar{z})=0$，能否推出 $h$ 是一个对称同胚？

## 参考文献


[1] Beurling, A. and Ahlfors, L. (1956) The Boundary Correspondence under Quasiconformal Mappings. *Acta Mathematica*, **96**, 125-142.https://doi.org/10.1007/BF02392360

[2] H, Y. and Shen, Y. (2012) On Quasisymmetric Homeomorphisms. *Israel Journal of Mathematics*, **191**, 209-226. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0204-4

[3] Cui, G. (2000) Integrably Asymptotic Affine Homeomorphisms of the Circle and Teichmüller Spaces. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **43**, 267-279. https://doi.org/10.1007/BF02897849

[4] Shen, Y. and Wei, H. (2013) Universal Teichmüller space and BMO. *Advances in Mathematics*, **234**, 129-148. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.10.017

[5] Tang, S. and Shen, Y. (2018) Integrable Teichmüller Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **465**, 658-672. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.05.035

[6] Tang, S. and Wu, P. (2020) A note on Quasisymmetric Homeomorphisms. *Annales Fennici Mathematici*, **45**, 53-66. https://doi.org/10.5186/aasfm.2020.4502

[7] Gardiner, F.P. and Sullivan, D.P. (1992) Symmetric Structures on a Closed Curve. *American Journal of Mathematics*, **114**, 683-736. https://doi.org/10.2307/2374795

[8] Harmelin, R. (1982) Bergman Kernel Function and Univalence Criteria. *Journal d'Analyse Mathématique*, **41**, 249-258. https://doi.org/10.1007/BF02803404

[9] Aharonov, D. (1969) A Necessary and Sufficient Condition for Univalence of a Meromorphic Function. *Duke Mathematical Journal*, **36**, 599-604. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-69-03671-0

[10] Bazilevic, I.E. (1967) On a Criterion of Univalence of Regular Functions and the Disposition of Their Coefficients. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **3**, 123-137. https://doi.org/10.1070/SM1967v003n01ABEH002364

[11] Lehto, O. (1987) Univalent Functions and Teichmüller Spaces. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8652-0

[12] Zhu, K. (2007) Operator Theory in Function Spaces. American Mathematical Soc. https://doi.org/10.1090/surv/138