

具有媒体影响的登革热病毒传播动力学分析

杜璇, 张睿

兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年3月8日; 录用日期: 2024年3月28日; 发布日期: 2024年4月30日

摘要

建立并分析了一类受到媒体影响的登革热传染病模型, 由基本再生数分析讨论了平衡点的存在性与局部稳定性, 利用中心流行定理证明了该模型在基本再生数等于1时总会出现前向分支。

关键词

媒体报道, 稳定性, 存在性, 中心流行

Dynamic Analysis of Dengue Fever Virus Transmission with Media Influence

Xuan Du, Rui Zhang

School of Mathematics and Science, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Mar. 28th, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

A type of dengue fever infectious disease model influenced by media was established and analyzed. The existence and local stability of equilibrium points were discussed through basic reproduction number analysis. The central popular theorem was used to prove that the model always exhibits forward branches when the basic reproduction number is equal to 1.

Keywords

Media Coverage, Stability, Existence, Central Popularity

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

登革热(DF)是一种由登革病毒引起的急性传染病, 根据 E 蛋白抗原性的不同, 登革病毒可分为四个血清型(DEN-V, 1, 2, 3, 4)。文献[1]中它是全球传播最为广泛的虫媒传染病之一, 主要分布于全球的热带和亚热带地区, 流行泛滥最为严重的地区主要集中在西太平洋地区、东南亚以及美洲。在我国, 主要分布在沿海地区, 如广东、海南、福建、台湾等地方。一般地, 登革热病人被伊蚊叮咬后, 病毒经由伊蚊传播给人类, 人群感染后, 潜伏期为 1~14 天, 后续发作, 表现为发热、皮疹、出血和肌肉痛。感染通常是轻微的, 但也可能导致严重的流感样症状, 并且可能危及生命。在今天, 病毒传播过程中, 新媒体起到了很好的作用。文献[2]中多数媒体平台实时发布重要信息, 达到了传播快、传播广且有效的传播效果, 使大众在足不出户的情况下就可第一时间获得该病毒相关信息, 一定程度上保护了人民健康。

现如今, 许多数学工作者建立数学模型时会讨论加入媒体影响, 很多研究者都引入不同的媒体影响因子函数来刻画媒体报道对感染率的影响。在文献[3]中, 其中的媒体影响因子函数表示为

$f(E, I, H) = e^{-a_1 E - a_2 I - a_3 H}$, 其中 E, I, H 分别表示易感者, 感染者, 住院者。在文献[4]中用非线性函数

$\beta_i(I_i) = a_i - b_i f_i(I_i)$ 来表示媒体影响下传染病的接触率, 其中 a_i 是在第 i 组内易感人群和感染者群体的最大有效接触率, b_i 是媒体影响下可达到的对有效接触率的最大抵消作用。得到媒体对疾病的传播规模有很大的作用。王晓娜、刘茂省等人建立了一类受到媒体报道具有潜伏期的传染病模型, 由下一代矩阵法计算得到了模型的基本再生数, 当基本再生数小于 1 时, 由 Routh-Hurwitz 判据可得, 地方病平衡点存在且局部渐近稳定。通过研究分析可知, 信息传播率虽然无法做到控制疾病的基本再生数, 但是可以影响染病者的数量, 从而控制疾病的爆发[4]。丁亮、王伟辰等人以广州市爆发的大规模登革热疫情为例, 统计来源于各大媒体这个时期的病例数和数据, 通过数值模拟绘制出了媒体报道对登革热病毒影响的图, 进而表明了媒体报道对疫情有较强的干预作用[5]。在文献[6]中姜大要设定传染率指数函数 $\beta e^{-\alpha M_1 + \delta M_2}$, 它表示易感人群在接受到信息的时候, 有正面消息和负面消息, 这些正负面消息同时影响着疾病的传染率, 利用下一代矩阵法得到了基本再生数, 分析无病平衡点和地方病平衡点的存在性与稳定性, 当基本再生数小于 1 时, 无病平衡点是局部渐近稳定的, 得到了媒体报道对于疾病的传播具有较强的干预作用。

基于上述讨论, 本文参照文献[7]在经典的传染病模型基础上考虑加入了潜伏者因素建立了一个考虑媒体意识对登革热病毒传播影响的模型。给出了模型的基本再生数, 分析了模型的平衡点及其稳定性。

2. 模型的建立

在本文中, 将人群分为四类, 蚊子种群分为两类。设 S_h, E_h, I_h, R_h 分别表示易感者、潜伏者、感染者和恢复者, S_v, I_v 分别表示易感蚊子及感染蚊子。不考虑对登革热传播的永久免疫, t 时刻关于传染病的模型传播过程如下图所示。

由图 1 得到传染病动力学模型如下

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \Lambda_h - \left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{I_h}{m + I_h} \right) S_h I_v - \mu_h S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{I_h}{m + I_h} \right) S_h I_v - (k_h + \mu_h) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= k_h E_h - (\gamma_h + \mu_h) I_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \\ \frac{dS_v}{dt} &= \Lambda_v - \left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{I_h}{m + I_h} \right) S_v E_h - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{I_h}{m + I_h} \right) S_v E_h - \mu_v I_v \end{aligned} \tag{1}$$

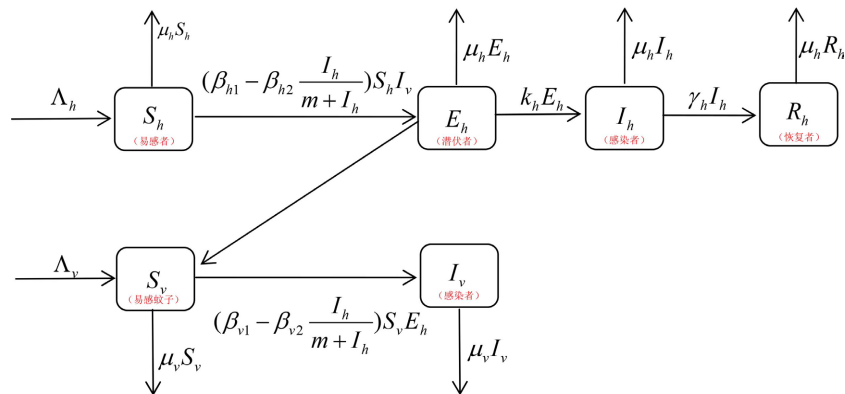


Figure 1. Propagation dynamics diagram of SEIR model
图 1. SEIR 模型的传播动力图

模型中其它参数的含义由表 1 给出

Table 1. The meaning of parameters in model (1)
表 1. 模型(1)中参数的含义

参数	含义
Λ_h	人口的补充率(人口的内禀增长率)
Λ_v	蚊子的补充率
β_{h1}	在缺乏媒体意识的情况下, 感染蚊子在人群中的传播率
β_{h2}	由于媒体的关注, 最大限度地降低了感染蚊子在人群中的传播率
β_{v1}	在缺乏媒体意识的情况下, 已感染的人类被蚊子叮咬的传播率
β_{v2}	由于媒体的关注, 最大限度地降低了已感染的人类被蚊子叮咬的传播率
μ_h	人类的自然死亡率
μ_v	蚊子的自然死亡率
m	对感染个体的认识
$\frac{1}{k_h}$	暴露人类的平均潜伏期
$\frac{1}{\gamma_h}$	人类的平均感染期

由系统(1)可知, 模型的非负初始条件如下所示。

$$S_h(0) = S_{h0} \geq 0, E_h(0) = E_{h0} \geq 0, I_h(0) = I_{h0} \geq 0, R_h(0) = R_{h0} \geq 0$$

$$S_v(0) = S_{v0} \geq 0, I_v(0) = I_{v0} \geq 0$$

媒体实时报道感染病例和情况会提高民众对登革热的认识。假设该地区随着媒体因素的影响, 感染人数的增加将会进一步降低人类和蚊子感染率的发生。因此在上述原因下, 引入媒体因素对登革热病毒传播的影响, 当然病毒的传染率也取决于被感染的人数。假设该地区在没有媒体报道影响的情况下, β_{h1} 和 β_{v1} 分别表示人类和蚊子种群的感染率。在受到媒体报道影响的情况下, 人类和蚊子种群感染率的最大降幅分别为 β_{h2} 和 β_{v2} , 引入 m 作为 β_{h2} 和 β_{v2} 的半饱和参数。当 m 值达到很小时, 总感染率会降低到最大值。

根据上述情况, 定义人类和蚊子的感染率分别为:

$$\beta_h := \beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{I_h}{m + I_h}, \text{ 其中 } \beta_{h1} > \beta_{h2},$$

$$\beta_v := \beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{I_h}{m + I_h}, \text{ 其中 } \beta_{v1} > \beta_{v2}.$$

$$\text{由于 } \frac{\partial \beta_h}{\partial m} = \beta_{h2} \frac{I_h}{(m + I_h)^2} > 0, \frac{\partial \beta_v}{\partial m} = \beta_{v2} \frac{I_h}{(m + I_h)^2} > 0$$

因此得到结论, 减少 m 将减少 β_h 和 β_v 。

此外, 还可以看到, 人类感染率的最大降幅为 $\lim_{m \rightarrow 0} \beta_h = \beta_{h1} - \beta_{h2}$, 当 $I = m$ 时, 人类感染率将达到最大值的一半。类似可以得到蚊子感染率的最大降幅为 $\lim_{m \rightarrow 0} \beta_v = \beta_{v1} - \beta_{v2}$, 当 $I = m$ 时, 蚊子感染率将达到最大值的一半。

定理 1 若初值 $(S_h(0), E_h(0), I_h(0), R_h(0), S_v(0), I_v(0)) > 0$, 则对于所有 $t \geq 0$ 时, $S_h(t), E_h(t), I_h(t), R_h(t), S_v(t), I_v(t)$ 在 R_+^6 中保持正性。

证明 由模型(1)的第 1 和第 5 个方程可知, 对所有的 $t > 0$ 有

$$\begin{aligned} \dot{S}_h(t) &> - \left[\left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{I_h(t)}{m + I_h(t)} \right) I_v(t) - \mu_h \right] S_h, \\ \dot{S}_v(t) &> - \left[\left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{I_h(t)}{m + I_h(t)} \right) E_h(t) - \mu_v \right] S_v. \end{aligned}$$

因为 $S_h(0) > 0, S_v(0) > 0$, 所以

$$\begin{aligned} S_h(t) &> S_h(0) \exp \left\{ - \int_0^t \left[\left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{I_h(s)}{m + I_h(s)} \right) I_v(s) - \mu_h \right] ds \right\}, \\ S_v(t) &> S_v(0) \exp \left\{ - \int_0^t \left[\left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{I_h(s)}{m + I_h(s)} \right) E_h(s) - \mu_v \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

设 $m(t) = \min_{t \geq 0} \{E_h(t), I_h(t), R_h(t), I_v(t)\}$, 且 $m(0) = \min_{t \geq 0} \{E_h(0), I_h(0), R_h(0), I_v(0)\}$ 。

因此, 只需要证明对所有的 $t > 0$ 有 $m(t) > 0$ 。则需要讨论以下 4 种情况:

- (1) $m(t_0) = E_h(t_0)$;
- (2) $m(t_0) = I_h(t_0)$;
- (3) $m(t_0) = R_h(t_0)$;
- (4) $m(t_0) = I_v(t_0)$ 。

考虑到类似的证明方法, 在这里证明仅给出第 2 种情况。即 $m(t_0) = I_h(t_0)$ 。

反证, 假设存在某个 $t_0 > 0$, 使得 $m(t_0) = 0$ 且对于 $t \in [0, t_0)$ 有 $m(t) > 0$ 。故 $E_h(t) > 0$, 进一步可知, 对所有的 $t \geq 0$ 有

$$\dot{I}_h(t) \geq -(\gamma_h + \mu_h)I_h.$$

对于上述不等式从 0 到 t_0 两边分别积分可得 $I_h(t_0) \geq I_h(0)\exp\{-(\gamma_h + \mu_h)t_0\} > 0$,

这与已知 $I_h(t_0) = 0$ 矛盾。

因此, 系统(1)的所有解都是正的, 证毕。

定理 2 在系统(1)中模型在区域

$$\Omega = \left\{ (S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \in \mathbb{R}_+^6 : 0 \leq N_h \leq \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0 \leq N_v \leq \frac{\Lambda_v}{\mu_v} \right\} \text{ 中是正不变的。}$$

证明 在系统(1)中, 有

$$\frac{dN_h}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dE_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} = \Lambda_h - \mu_h(S_h + E_h + I_h + R_h) = \Lambda_h - \mu_h N_h$$

求解上述方程, 可得

$$N_h(t) = N_h(0)e^{-\mu_h t} + \frac{\Lambda_h}{\mu_h}(1 - e^{-\mu_h t})$$

其中 $N_h(0) = S_h(0) + E_h(0) + I_h(0) + R_h(0)$, 若 $N_h(0) < \frac{\Lambda_h}{\mu_h}$, 那么 $\frac{dN_h}{dt} > 0$, 意味着 $N_h(t)$ 是正在增加,

并且它趋向于 $N_h(t) = \frac{\Lambda_h}{\mu_h}$, 若 $N_h(0) > \frac{\Lambda_h}{\mu_h}$, 那么 $\frac{dN_h}{dt} < 0$ 意味着 $N_h(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时减少到 $\frac{\Lambda_h}{\mu_h}$ 。最后, 若

$N_h(0) = \frac{\Lambda_h}{\mu_h}$, 那么 $\frac{dN_h}{dt} = 0$ 意味着随着时间人口总数在 $N_h(t) = \frac{\Lambda_h}{\mu_h}$ 上保持不变。

类似的方法可以证明当 $t \rightarrow \infty$ 时 $N_v(t)$ 趋于 $\frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, 其中

$$\frac{dN_v}{dt} = \frac{dS_v}{dt} + \frac{dI_v}{dt} = \Lambda_v - \mu_v(S_v + I_v) = \Lambda_v - \mu_v N_v$$

求解上述方程, 可得 $N_v(t) = N_v(0)e^{-\mu_v t} + \frac{\Lambda_v}{\mu_v}(1 - e^{-\mu_v t})$, 其中 $N_v(0) = S_v(0) + I_v(0)$ 。若 $N_v(0) < \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$,

那么 $\frac{dN_v}{dt} > 0$, 意味着 $N_v(t)$ 是正在增加, 并且它趋向于 $N_v(t) = \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, 若 $N_v(0) > \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, 那么 $\frac{dN_v}{dt} < 0$ 意味

着 $N_v(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时减少到 $\frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, 最后, 若 $N_v(0) = \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$, 那么 $\frac{dN_v}{dt} = 0$ 意味着随着时间蚊子总数在

$N_v(t) = \frac{\Lambda_v}{\mu_v}$ 上保持不变。

因此, 区域 Ω 吸引在 \mathbb{R}_+^6 中的所有解。证毕。

3. 平衡点和基本再生数

由系统(1)的登革热模型得到其无病平衡点为

$$\mathcal{E}_0 = (S_{h0}, E_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{v0}, I_{v0}) = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, 0 \right)$$

参照文献[8], 利用下一代矩阵的方法可以求出模型(1)的基本再生数:

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_h \beta_{h1}}{\mu_h (k_h + \mu_h)} \times \frac{\Lambda_v \beta_{v1}}{\mu_v^2}}$$

定理 1 在系统(1)中, 当 $R_0 < 1$ 时, \mathcal{E}_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, \mathcal{E}_0 是不稳定的。

证明 系统(1)在 \mathcal{E}_0 处的雅可比矩阵为

$$J_0(\mathcal{E}_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{h1} \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & -(k_h + \mu_h) & 0 & 0 & 0 & \beta_{h1} \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & k_h & -(\gamma_h + \mu_h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{v1} \frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & 0 & -\mu_v & 0 \\ 0 & \beta_{v1} \frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

得到 J_0 的 4 个负特征值, $\lambda_1 = -\mu_v$, $\lambda_2 = -\mu_v$, $\lambda_3 = -\mu_h$, $\lambda_4 = -(\gamma_h + \mu_h)$

另外两个由以下方程确定 $\mu_h \mu_v \lambda^2 + \mu_h \mu_v (k_h + \mu_h + \mu_v) \lambda + \mu_h \mu_v^2 (k_h + \mu_h) (1 - R_0) = 0$

其中 $a_2 = \mu_h \mu_v$, $a_1 = \mu_h \mu_v (k_h + \mu_h + \mu_v)$, $a_0 = \mu_h \mu_v^2 (k_h + \mu_h) (1 - R_0)$, 化简得到

$$\lambda^2 + (k_h + \mu_h + \mu_v) \lambda + \mu_v (k_h + \mu_h) (1 - R_0) = 0$$

因此, 由以上的计算和分析可以得到:

$$\begin{aligned} \lambda_5 + \lambda_6 &= -(k_h + \mu_h + \mu_v) \\ \lambda_5 \lambda_6 &= \mu_v (k_h + \mu_h) (1 - R_0) \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, 方程有 4 个负实根, 因此 \mathcal{E}_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 方程有 2 个符号相反的实根, 此时 \mathcal{E}_0 是不稳定的。

定理 2 在系统(1)中, 当 $R_0 > 1$ 时, 总是存在一个地方病平衡点。

证明 假设种群由系统(1)中所有子类的个体组成, 给出地方病平衡点 $\mathcal{E}_1 = (S_{h1}, E_{h1}, I_{h1}, R_{h1}, S_{v1}, I_{v1})$ 。由系统(1)得到 $S_{h1}, E_{h1}, R_{h1}, S_{v1}, I_{v1}$ 的表达式如下, 其中

$$\begin{aligned} S_{h1} &= \frac{\mu_v (I_h + m) [I_h \Lambda_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + I_h \mu_v (k_h + \mu_h) + m (\Lambda_h + k_h \mu_v + \mu_h \mu_v)]}{[I_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + m \beta_{v1}] [I_h \Lambda_v (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + I_h \mu_h \mu_v + m \Lambda_v \beta_{h1} + m \mu_h \mu_v]}, \\ E_{h1} &= \frac{I_h^2 \Lambda_h \Lambda_v (\beta_{v1} - \beta_{v2}) (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + I_h \Lambda_h \Lambda_v \beta_{h1} m (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + I_h \Lambda_h \Lambda_v \beta_{v1} m (\beta_{h1} - \beta_{h2})}{(k_h + \mu_h) [I_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + \beta_{v1} m] [I_h \Lambda_v (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + \mu_h \mu_v (I_h + m) + \Lambda_v \beta_{h1} m]} \\ &\quad + \frac{I_h \mu_h \mu_v^2 [-m(k_h + 1) - I_h (k_h + \mu_h)] + \Lambda_h \Lambda_v \beta_{h1} \beta_{v1} m^2 + m^2 \mu_h \mu_v^2 (-k_h - \mu_h)}{(k_h + \mu_h) [I_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + \beta_{v1} m] [I_h \Lambda_v (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + \mu_h \mu_v (I_h + m) + \Lambda_v \beta_{h1} m]}, \\ R_{h1} &= \frac{I_h \gamma_h}{\mu_h}, \\ S_{v1} &= \frac{(I_h + m) (k_h + \mu_h) [I_h \Lambda_v (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + I_h \mu_h \mu_v + \Lambda_v \beta_{h1} m + m \mu_h \mu_v]}{[I_h (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + \beta_{h1} m] [I_h \Lambda_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + (I_h + \mu_v + m \mu_v) (k_h + \mu_h) + \Lambda_h \beta_{v1} m]}, \end{aligned}$$

$$I_{v1} = \frac{I_h^2 \Lambda_h \Lambda_v (\beta_{h1} - \beta_{h2})(\beta_{v1} - \beta_{v2}) + I_h^2 \mu_h \mu_v^2 (-k_h - \mu_h) + I_h \Lambda_h \Lambda_v \beta_{h1} m (\beta_{v1} - \beta_{v2})}{\mu_v [I_h (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + \beta_{h1} m] [I_h \Lambda_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + I_h \mu_v (k_h + \mu_h) + \Lambda_h \beta_{v1} m + m \mu_v (k_h + \mu_h)]} + \frac{I_h \Lambda_h \Lambda_v \beta_{v1} m (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + m \mu_h \mu_v^2 (-k_h - \mu_h) (2I_h + m) + \Lambda_h \Lambda_v \beta_{h1} \beta_{v1} m^2}{\mu_v [I_h (\beta_{h1} - \beta_{h2}) + \beta_{h1} m] [I_h \Lambda_h (\beta_{v1} - \beta_{v2}) + I_h \mu_v (k_h + \mu_h) + \Lambda_h \beta_{v1} m + m \mu_v (k_h + \mu_h)]}$$

其中 I_{h1} 是由多项式 $P(I_h) = b_3 I_h^3 + b_2 I_h^2 + b_1 I_h + b_0 = 0$ 的正根推导出来的, 其中

$$b_3 = -\mu_h^3 \Lambda_v (\beta_{v1} - \beta_{v2}) (\beta_{h1} - \beta_{h2}) \mu_v \mu_h^2 (k_h + \mu_h) \times \dots \times \gamma_h \mu_h + \mu_h^2 + \mu_h, \\ b_0 = m^2 (\gamma_h + \mu_h) (k_h + \mu_h) \mu_h \mu_v^2 (\mathcal{R}_0^2 - 1).$$

在无病平衡点 \mathcal{E}_1 中, 若 I_{h1} 是正的, 则 $S_{h1}, E_{h1}, R_{h1}, S_{v1}, I_{v1}$ 是正的。因此, 当 $P(I_h)$ 有一个正根时, 则 \mathcal{E}_1 存在。因为 $b_3 < 0$, 有 $\lim_{I_h \rightarrow -\infty} P(I_h) = -\infty$, $\lim_{I_h \rightarrow \infty} P(I_h) = \infty$ 。假设 $b_0 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 = 1$, 那么在这种情况下, 假设 $P(I_h)$ 没有正根, 并且它的一个根为 0, 因此, 在 $b_0 < 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 > 1$ 的情况下, $P(I_h)$ 的图像与 y 轴正半轴至少有一个交点。从而, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 至少存在一个地方病平衡点。

定理 3 在系统(1)中, 当 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时, 总是出现前向分支。

证明 假设 $S_h = x_1, E_h = x_2, I_h = x_3, R_h = x_4, S_v = x_5, I_v = x_6$,

$$\frac{dS_h}{dt} = f_1, \frac{dE_h}{dt} = f_2, \frac{dI_h}{dt} = f_3, \frac{dR_h}{dt} = f_4, \frac{dS_v}{dt} = f_5, \frac{dI_v}{dt} = f_6.$$

因此, 系统(1)变为如下,

$$\begin{aligned} f_1 &= \Lambda_h - \left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{x_3}{m + x_3} \right) x_1 x_6 - \mu_h x_1, \\ f_2 &= \left(\beta_{h1} - \beta_{h2} \frac{x_3}{m + x_3} \right) x_1 x_6 - (k_h + \mu_h) x_2, \\ f_3 &= k_h x_2 - (\gamma_h + \mu_h) x_3, \\ f_4 &= \gamma_h x_3 - \mu_h x_4, \\ f_5 &= \Lambda_v - \left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{x_3}{m + x_3} \right) x_5 x_2 - \mu_v x_5, \\ f_6 &= \left(\beta_{v1} - \beta_{v2} \frac{x_3}{m + x_3} \right) x_5 x_2 - \mu_v x_6. \end{aligned} \tag{2}$$

系统(2)中选择 β_{h1} 作为分支参数, 紧接着设定 $\mathcal{R}_0^2 = 1$, 于是有,

$$\beta_{h1} = \beta_{h1}^* = \frac{\mathcal{R}_0^2 \mu_h \mu_v^2 (k_h + \mu_h)}{\Lambda_h \Lambda_v \beta_{v1}}.$$

系统(2)在无病平衡点处的雅可比矩阵为,

$$J(\mathcal{E}_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{h1} \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & -(k_h + \mu_h) & 0 & 0 & 0 & \beta_{h1} \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & k_h & -(\gamma_h + \mu_h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{v1} \frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & 0 & -\mu_v & 0 \\ 0 & \beta_{v1} \frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

系统(2)在无病平衡点 \mathcal{E}_0 处, 对于 $\beta_{h1} = \beta_{h1}^*$ 有一个零特征值 $\lambda_1 = 0$, 其它五个特征值 $\lambda_2 = -\mu_h, \lambda_3 = -(k_h + \mu_h), \lambda_4 = -(\gamma_h + \mu_h), \lambda_5 = -\mu_h, \lambda_6 = -\mu_v$ 都是负的。因此应用中心流形定理分析系统(2)。

当 $\beta_{h1} = \beta_{h1}^*$ 时, 雅可比矩阵 $J(\mathcal{E}_0)$ 有一个正的特征向量, 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 则右向量 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$, 向量 w 的分量表示如下,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-\gamma_h k_h - \gamma_h \mu_h - k_h \mu_h - \mu_h^2}{k_h \mu_h}, \\ w_2 &= \frac{\gamma_h + \mu_h}{k_h}, \\ w_3 &= 1, \\ w_4 &= \frac{\gamma_h}{\mu_h}, \\ w_5 &= \frac{-\Lambda_v \beta_{v1} \gamma_h - \Lambda_v \beta_{v1} \mu_h}{k_h \mu_v^2}, \\ w_6 &= \frac{\Lambda_v \beta_{v1} \gamma_h + \Lambda_v \beta_{v1} \mu_h}{k_h \mu_v^2}. \end{aligned}$$

同样地, 当 $\beta_{h1} = \beta_{h1}^*$ 时, 雅可比矩阵 $J(\mathcal{E}_0)$ 在 $\lambda_1 = 0$ 时, 则右向量 $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, 其中分量表示如下,

$$v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0, v_4 = 0, v_5 = 0, v_6 = \frac{k_h \mu_h + \mu_h \mu_v}{\Lambda_v \beta_{v1}}.$$

接下来计算 f_i 在无病平衡点 \mathcal{E}_0 处的二阶偏导数。因为特征向量 $v_1 = 0, v_3 = 0, v_4 = 0$ 和 $v_5 = 0$ 。所以不需要计算 f_1, f_3, f_4 和 f_5 的偏导数, 只需计算 f_2 和 f_6 的二阶导数。那么 f_2 和 f_6 的二阶导数如下,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_6 \partial x_1} = \beta_{h1}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_6 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_6 \partial x_3} = -\beta_{h2} \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial \beta_{h1}} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_{h1} \partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial \beta_{h1}} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_{h1} \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial \beta_{h1}} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_{h1} \partial x_3} = 0, \\ &\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_6 \partial \beta_{h1}} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_{h1} \partial x_6} = \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, \\ \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_3 \partial x_2} = -\beta_{v2} \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_5} = \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_5 \partial x_2} = \beta_{v1}, \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_6 \partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_3 \partial x_5} &= \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_5 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_3 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_6 \partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_5 \partial x_6} = \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_6 \partial x_5} = 0. \end{aligned}$$

接下来, 参照文献[1]中定理 4.1, 计算系数 A 和 B 如下,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k,i,j=1}^6 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{E}_0, \beta_{h1}^*) = \sum_{k,i,j=1}^6 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) \\ &= 2 \left(v_2 w_1 w_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + v_2 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + v_2 w_1 w_6 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_6} \right. \\ &\quad \left. + v_2 w_2 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} + v_2 w_2 w_6 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_6} + v_2 w_3 w_6 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + v_6 w_2 w_3 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_3} + v_6 w_2 w_5 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_5} + v_6 w_2 w_6 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_2 \partial x_6} \\
 & + v_6 w_3 w_5 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_3 \partial x_5} + v_6 w_3 w_6 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_3 \partial x_6} + v_6 w_5 w_6 \frac{\partial^2 f_6}{\partial x_5 \partial x_6} \Big) \\
 & = - \frac{2(\gamma_h + \mu_h)}{\Lambda_h \beta_{v1} k_h^2 m \mu_v^2} \left(\Lambda_h \Lambda_v \beta_{h2} \beta_{v1}^2 k_h + \Lambda_h \beta_{v1}^2 \gamma_h k_h m \mu_v \right. \\
 & \quad + \Lambda_h \beta_{v1}^2 \gamma_h m \mu_h \mu_v + \Lambda_h \beta_{v1}^2 k_h m \mu_h \mu_v + \Lambda_h \beta_{v1}^2 m \mu_h^2 \mu_v \\
 & \quad + \Lambda_h \beta_{v2} k_h^2 \mu_v^2 + \Lambda_h \beta_{v2} k_h \mu_h \mu_v^2 + \beta_{v1} \gamma_h k_h^2 m \mu_v^2 \\
 & \quad \left. + \beta_{v1} \gamma_h m \mu_h^2 \mu_v^2 + \beta_{v1} k_h^2 m \mu_h \mu_v^2 + 2\beta_{v1} k_h m \mu_h^2 \mu_v^2 + \beta_{v1} m \mu_h^3 \mu_v^2 \right) \\
 & < 0 \\
 \mathbf{B} & = \sum_{k,i=1}^6 v_k w_i \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial \beta_{h1}} (\mathcal{E}_0, \beta_{h1}^*) = \sum_{k,i=1}^6 v_2 w_6 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_6 \partial \beta_{h1}} (0,0) \\
 & = \frac{\Lambda_h \Lambda_v \beta_{v1} (\gamma_h + \mu_h)}{k_h \mu_h \mu_v^2} > 0
 \end{aligned}$$

显而易见 $\mathbf{A} < 0, \mathbf{B} > 0$ ，因此，系统(1)在 $\mathcal{E}_0 = 1$ 时总是出现前向分支。

综上所述，社会上媒体报道有关登革热病毒的消息越多，越能抑制疾病传播。媒体报道所包含的信息繁杂，不同的报道对传染病的传染产生的作用也不相同。其次，一些当地政府对登革热的爆发及时迅速采取强有力的措施，大力推动媒体报道促使人们加强预防，虽然不能立即消灭病毒，但却能直接影响传染病的传染及传播。

参考文献

- [1] Yang, H.M. (2023) Thresholds, Bifurcation and Chaos in Biological Phenomena: Comment on “Mathematical Models for Dengue Fever Epidemiology: A 10-Year Systematic Review” by M. Aguiar *et al. Physics of Life Reviews*, **44**, 6-8.
- [2] 王晓娜, 刘茂省, 李有文. 媒体报道对一类具有潜伏期的传染病控制的影响[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(23): 173-178.
- [3] Liu, R., Wu, J. and Zhu, H. (2007) Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **8**, 153-164. <https://doi.org/10.1080/17486700701425870>
- [4] Sun, C., Yang, W., Arino, J., *et al.* (2011) Effect of Media-Induced Social Distancing on Disease Transmission in a Two Patch Setting. *Mathematical Biosciences*, **230**, 87-95. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.01.005>
- [5] 丁亮, 王炜辰, 陈志兰, 等. 媒体报道对广州市登革热疫情的影响[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2016, 19(1): 18-21.
- [6] 姜大要, 薛亚奎. 一类受媒体影响的传染病模型的动力学分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2019, 33(1): 175-182.
- [7] Dipo, A. (2021) Optimal Control for Dengue Eradication Program under the Media Awareness Effect. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **24**, 95-122. <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2020-0142>
- [8] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. and Roberts, M.G. (2010) The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *Journal of the Royal Society Interface*, **7**, 873-885. <https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0386>