Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 78-82
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145163

带有移民的上临界Galton-Watson过程的Cramer中偏差

彭　超，王　娟

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月15日；录用日期：2024年4月5日；发布日期：2024年5月16日

摘　要

我们令$\{X_n;n\geq 0\}$是一个后代平均值为m的带有移民的上临界分支过程。Lotka-Nagaev估计量X_{n+1}/X_n是用来估计后代均值的常用估计量。在本论文中，我们通过构造鞅得到了带有移民的Galton-Watson过程的Cramer中偏差结果。对于我们的证明，我们使用了著名的Cramer方法来证明自变量和的中偏差以满足我们的需要。

关键词

中偏差，上临界，Galton-Watson过程，Cramer方法

Cramer Moderate Deviations for a Supercritical Galton-Watson Process with Immigration

Chao Peng, Juan Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 15th, 2024; accepted: Apr. 5th, 2024; published: May 16th, 2024

Abstract

Let $\{X_n;n\geq 0\}$ be a supercritical branching process with immigration and offspring mean m. The Lotka-Nagaev estimator X_{n+1}/X_n is a common estimator for the offspring mean. In this paper, we establish some kinds of Cramer moderate deviation results for the Lotka-Nagaev estimator via a martingale method. For our proofs, we use the well-known Cramer method to prove the mod-

文章引用: 彭超, 王娟. 带有移民的上临界 Galton-Watson 过程的 Cramer 中偏差[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 78-82.
DOI: 10.12677/pm.2024.145163

erate deviation of the sum of independent variables to satisfy our needs.

Keywords

Moderate Deviation, Supercritical, Galton-Watson Process, Cramer Method

1. 引言

定义 $(Z_i)_{i\ge 1}$ 是一列均值为 0，方差为 σ^2 的独立同分布随机变量序列。我们用 $L_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i$ 来表示 $(Z_i)_{i\ge 1}$ 的部分和。假设 $E\exp\left[C_0\left|Z_1\right|\right]<\infty$ 对于所有的常数 $C_0>0$ 都成立，对于所有满足条件 $0\le x=o\left(n^{1/2}\right)$ 的 x，Cramer 建立了如下渐近中偏差结果

$$\left|\ln\frac{P\left(L_n>x\sigma\sqrt{n}\right)}{1-\phi(x)}\right|=O\left(\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right) \tag{1.1}$$

其中 $n\to\infty$，$\phi(x)=1\big/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2/2\right)\mathrm{d}t$ 是一个标准的正态分布。上式结果通常被称为 Cramer 中偏差。

我们如下定义带有移民的 Galton-Watson 过程：

$$X_0=1,\quad X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n} Z_i^n+Y_n\text{，对于所有的 } n\ge 0\text{。} \tag{1.2}$$

若用 m 来表示个体的后代均值，则

$$m=EX_1. \tag{1.3}$$

若用 v 来表示 X_1 的标准方差，则

$$v^2=E\left(X_1-m\right)^2=Var\left(X_1\right). \tag{1.4}$$

为了方便讨论，本文中所有的 v 都是正的。Lotka-Nagaev 估计量 X_{n+1}/X_n 是用来估计后代均值 m 的常用估计量。在本论文中，我们假设 $p_0=0$，则 Lotka-Nagaev 估计量是定义良好的 P-a.s。

从各国相关的文献中来看，中偏差是研究 Galton-Watson 过程的重要方向之一，引起了各国学者的广泛关注。孙和张[1]研究了带有移民的上临界分支过程的调和矩的收敛速率。刘和张[2]研究了带有移民的上临界分支过程的大偏差，改进了之前学者对于不带移民的上临界分支过程的研究结果。刘和张[3]研究了随机环境下的上临界多型分支过程的 Kesten-Stigum 型定理。

近些年来，Lotka-Nagaev 估计量也引起了各国学者的广泛关注。例如，Paul Doukhan Fan 和 Gao [4]利用鞅方法得到了 Lotka-Nagaev 估计量的 Cramer 中偏差结果。Bercu 和 Touati [5]通过自归一化鞅方法得到了 Lotka-Nagaev 估计量的指数不等式。Fleischmann 和 Wachtel [6]考虑了 Lotka-Nagaev 估计量的 S_{Z_n}/Z_n 的推广，并且还在文献[7]研究了上临界 GW 过程的低偏差概率。朱和高[8]研究了简单分支过程的 Lotka-Nagaev 估计量的中偏差，得到了经典分支过程的 Lotka-Nagaev 估计量的中偏差呈指数衰减。范和邵[9]研究了自归一化 Cramer 中偏差。Ney 和 Vidyashanka [10]研究了 Lotka-Nagaev 估计量的大偏差衰减速率。Athreya [11]研究了 Galton-Watson 过程的 Lotka-Nagaev 估计量的大偏差。

本论文在下一节中介绍得到的带有移民的上临界 Galton-Watson 过程的 Cramer 中偏差结果。

2. 主要定理以及证明

引理 4.2.1 对于 GWI 过程，我们有

$$P\left(X_n \le n\right) \le C_1 \exp\left(-C_0 n\right). \tag{2.1}$$

其中 $C_0 > 0$。

证明：

$$\begin{aligned} P\left(X_n \le n\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i + Y_{n-1} \le n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \le n - Y_{n-1}\right) \\ &\le P\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \le n\right) \le C_1 \exp\left(-C_0 n\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

定理 4.2.2 假设有 $E\exp\left[C_0\left|X_1\right|\right] < \infty$ 成立，其中对于所有的常数 $C_0 > 0$，对于所有的 x，都有 $0 \le x = o\left(n^{1/2}\right)$，则以下等式成立

$$\left|\ln\frac{P\left(S_n > x\sigma\sqrt{n}\right)}{1-\phi(x)}\right| = O\left(\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.3}$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i + Y_n$，$\phi(x) = 1\Big/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2/2\right)\mathrm{d}t$ 是一个标准的正态分布。

证明：根据全概率公式，我们有

$$\begin{aligned} P\left(S_n > x\sigma\sqrt{n}\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i + Y_n > x\sigma\sqrt{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(Y_n = j\right) P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i > x\sigma\sqrt{n} - j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(Y_n = j\right) P\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i > \sigma\sqrt{n}\left(\frac{x\sigma\sqrt{n} - j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\ &=: \sum_{j=1}^{\infty} P\left(Y_n = j\right) P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

根据文献[4]中的(1.1)式，我们可以得到以下两个不等式

$$P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) < C_1\left[1 - \phi\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\exp\left[\frac{1 + \left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3}{\sqrt{n}}\right], \tag{2.5}$$

$$P_n\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) > C_2\left[1 - \phi\left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{1 + \left(x - \frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{2.6}$$

再结合下面的不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x)}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} \le 1 - \phi(x) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+x)}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}, \quad x \ge 0 \tag{2.7}$$

我们可以得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\exp\left[\frac{-\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2}\right] \le 1-\phi\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\left(1+x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\exp\left[\frac{-\left(x-\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2}\right], x\ge 0 \tag{2.8}$$

根据(2.7)和(2.8)，我们有

$$\frac{1-\phi(x-t)}{1-\phi(x)} < \frac{\sqrt{2}(1+x)}{1+x-t}\exp\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)，\text{其中 } t=\frac{j}{\sigma\sqrt{n}} \tag{2.9}$$

$$\frac{1-\phi(x-t)}{1-\phi(x)} > \frac{1+x}{\sqrt{2}(1+x-t)}\exp\left(xt-\frac{t^2}{2}\right) \tag{2.10}$$

再根据(2.5)和(2.9)，我们可以得到

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i > x\sigma\sqrt{n}-j\right) < C_1\frac{\sqrt{2}(1+x)}{1+x-t}\left[1-\phi(x)\right]\exp\left[\frac{1+(x-t)^3}{\sqrt{n}}+x\frac{j}{\sigma\sqrt{n}}-\frac{j^2}{2\sigma^2 n}\right] < C_4\left[1-\phi(x)\right]\exp\left(\frac{C_1+C_2x+C_3x^2+x^3}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.11}$$

以及

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i > x\sigma\sqrt{n}-j\right) > C_5\left[1-\phi(x)\right]\exp\left(\frac{C_1+C_2x+C_3x^2+x^3}{\sqrt{n}}\right), \tag{2.12}$$

最终，我们得到结论，

$$\left|\ln\frac{P\left(S_n > x\sigma\sqrt{n}\right)}{1-\phi(x)}\right| = O\left(\frac{C_1+C_2x+C_3x^2+x^3}{\sqrt{n}}\right).$$

参考文献

[1] Sun, Q. and Zhang, M. (2017) Harmonic Moments and Large Deviations for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1201-1220. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0642-3

[2] Liu, J.N. and Zhang, M. (2016) Large Deviation for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 893-900. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5437-z

[3] Grama, I., Liu, Q.S. and Pin, E.W. (2023) A Kesten-Stigum Type Theorem for a Supercritical Multitype Branching Process in a Random Environment. *The Annals of Applied Probability*, **33**, 1213-1251. https://doi.org/10.1214/22-AAP1840

[4] Doukhan, P., Fan, X.Q. and Gao, Z.Q. (2023) Cramér Moderate Deviations for a Supercritical Galton-Watson Process. *Statistics and Probability Letters*, **192**, 109711. https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109711

[5] Bercu, B. and Touati, A. (2008) Exponential Inequalities for Self-Normalized Martingales with Applications. *The Annals of Applied Probability*, **18**, 1848-1869. https://doi.org/10.1214/07-AAP506

[6] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2008) Large Deviations for Sums Indexed by the Generations of a Galton-Watson

Process. *Probability Theory and Related Fields*, **141**, 445-470. https://doi.org/10.1007/s00440-007-0090-1

[7] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2007) Lower Deviation Probabilities for Supercritical Galton-Watson Processes. *Annales de l'IHP Probabilites et Statistiques*, **43**, 233-255. https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2006.03.001

[8] Zhu, Y.J. and Gao, Z.L. (2020) Moderate Deviations for Lotka-Nagaev Estimator of a Simple Branching Process. *Mathematica Applicata*, **33**, 240-245.

[9] Fan, X.Q. and Shao, Q.M. (2023) Self-Normalized Cramer Moderate Deviation for a Supercritical Galton-Watson Process. *Journal of Applied Probability*, **60**, 1281-1292. https://doi.org/10.1017/jpr.2022.134

[10] Ney, P.E. and Vidyashankar, A.N. (2003) Harmonic Moments and Large Deviation Rates for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **12**, 314-320. https://doi.org/10.1214/aoap/1050689589

[11] Athreya, K.B. (1994) Large Deviation Rates for Branching Processes—I. Single Type Case. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 779-790. https://doi.org/10.1214/aoap/1177004971