Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(5), 41-50
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.145159

Hans汉斯

三区间复合型Riccati-Bessel方程边值问题的相似构造法

何荣娇，郑鹏社，钱　雪，孙彩云，李顺初

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月8日；录用日期：2024年3月30日；发布日期：2024年5月15日

摘　要

针对三区间复合型Riccati-Bessel方程边值问题，通过对解式进行剖析和简化，发现该类边值问题的解具有连分数的形式且具有相似性，是由引解函数、相似核函数、内外边界和衔接条件系数组合而成。由此得到求解该类三区间复合型Riccati-Bessel方程边值问题的一种新方法——相似构造法。该方法极大地简化了求解过程，得到的解表达式简洁美观。

关键词

Riccati-Bessel方程，边值问题，相似构造法，相似核函数

Similar Construction Method of Boundary Value Problem of Three-Interval Composite Riccati-Bessel Equation

Rongjiao He, Pengshe Zheng, Xue Qian, Caiyun Sun, Shunchu Li

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 8th, 2024; accepted: Mar. 30th, 2024; published: May 15th, 2024

Abstract

By analysing and simplifying the solution expressions of the three-interval composite Riccati-Bessel equation, it is found that the solutions of this type of boundary value problems are in the form of continuous fractions and similarity, which are combined by the induced solution function, similar kernel function, inner and outer boundaries, and articulation condition coefficients. Therefore, a new method to solve this type of three-interval composite Riccati-Bessel equation boundary value

文章引用: 何荣娇, 郑鹏社, 钱雪, 孙彩云, 李顺初. 三区间复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题的相似构造法[J]. 理论数学, 2024, 14(5): 41-50. DOI: 10.12677/pm.2024.145159

problems—“similarity construction method” is obtained. This method greatly simplifies the solution process, and the obtained solution expressions are simple and beautiful.

Keywords

Riccati-Bessel Equation, Boundary Value Problem, Similar Construction Method, Similar Kernel Function

1. 引言

近年来，许多物理以及实际工程技术问题的解决都转化为微分方程边值问题进行求解，所以各类微分方程边值问题的求解变得越来越重要。2010 年，李顺初[1]通过分析一类二阶常微分方程边值问题解的结构，发现其解呈现统一的连分数的形式，进而提出了一种构造这类边值问题解的新方法——相似构造法。自此，研究者们将其方法应用于不同的微分方程(如 Hermit 方程[2]、复合型 Laguerre 方程[3]、复合连带 Legendre 方程[4]、三区复合型超几何方程[5]、三区复合型 Tschebycheff 方程[6])边值问题的求解中。此外，在石油工程中不少研究者将各类油藏(如均质油藏[7]、双孔非稳态油藏[8]、分形均质油藏[9]、复合油藏[10])的渗流模型转化为各类微分方程的边值问题，并利用相似构造法进行求解，最后得到模型在 Laplace 空间的解表达式简洁，也呈现统一的连分数的形式，更能清晰地反映各个参数对解的影响。

Riccati-Bessel 方程是特殊的 Riccati 方程，在球体的电磁散射[11]研究中 Riccati-Bessel 方程的解 Riccati-Bessel 函数有着重要的意义和作用。那么对于 Riccati-Bessel 方程的求解研究重要性不言而喻。近年来，李顺初等人对 Riccati-Bessel 方程[12]、复合 Riccati-Bessel 方程[13]的求解进行了研究，并得到了解的相似结构，但是尚未对于三区复合型及其以上的 Riccati-Bessel 方程边值问题解的研究。基于以上基础，本文研究如下的三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + \left[\left(\dfrac{\mu_{n1}}{a_1}\right)^2 x^2 - l_1(l_1+1)\right] y_1 = 0, (a \le x \le b) \\ x^2 y_2'' + \left[\left(\dfrac{\mu_{n2}}{a_2}\right)^2 x^2 - l_2(l_2+1)\right] y_2 = 0, (b \le x \le c) \\ x^2 y_3'' + \left[\left(\dfrac{\mu_{n3}}{a_3}\right)^2 x^2 - l_3(l_3+1)\right] y_3 = 0, (c \le x \le d) \\ \left[E y_1 + (1+EF) y_1'\right]\Big|_{x=a} = D, \\ y_1\big|_{x=b} = \gamma_1 y_2\big|_{x=b}, y_1'\Big|_{x=b} = \gamma_2 y_2'\Big|_{x=b}, \\ y_2\big|_{x=c} = \eta_1 y_3\big|_{x=c}, y_2'\Big|_{x=c} = \eta_2 y_3'\Big|_{x=c}, \\ \left[G y_3 + H y_3'\right]\Big|_{x=d} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a,b,c,d,\gamma_1,\gamma_2,\eta_1,\eta_2,D,E,F,G,H$ 为实常数， $a_i\left(i=1,2,3\right)$ 是非负数， $l_i\left(i=1,2,3\right)$ 是非负整数，且 $\gamma_1,\gamma_2,\eta_1,\eta_2\neq 0,D\neq 0,G^2+H^2\neq 0,0\leq a\leq b\leq c\leq d$ 。

2. 预备知识

引理 1 Riccati-Bessel 方程 $x^2y_i''+\left[\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2x^2-l_i\left(l_i+1\right)\right]y_i=0$ 的通解为[14]

$$y_i=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left[M_iY_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)+N_iJ_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\right],$$

其中 M_i,N_i 为任意常数，$Y_{l_i+\frac{1}{2}}(\bullet),J_{l_i+\frac{1}{2}}(\bullet),(i=1,2,3)$ 分别为第一类、第二类 $l_i+\frac{1}{2},(i=1,2,3)$ 阶 Bessel 函数。

引理 2 利用 Riccati-Bessel 方程的两个线性无关解构造如下引解函数

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}^i\left(x,\xi\right)&=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\right)-\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\right)\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\right)\\&=\frac{\pi}{2}\sqrt{x\xi}\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}^i\left(x,\xi\right)&=\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_{0,0}^i\left(x,\xi\right)\\&=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[\left(l_i+1\right)\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right],\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0}^i\left(x,\xi\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}^i\left(x,\xi\right)\\&=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[\left(l_i+1\right)\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right],\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^i\left(x,\xi\right)&=\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\varphi_{0,0}^i\left(x,\xi\right)\\&=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[\left(l_i+1\right)^2\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)-\left(l_i+1\right)\frac{\mu_{ni}}{a_i}\xi\psi_{l_i+\frac{1}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(l_i+1\right)\frac{\mu_{ni}}{a_i}x\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{1}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)+\frac{\mu_{ni}^2}{a_i^2}x\xi\psi_{l_i+\frac{3}{2},l_i+\frac{3}{2}}\left(x,\xi,\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)\right].\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $i=1$ 代表内区 $\left(a\leq x\leq b\right)$， $i=2$ 代表中区 $\left(b\leq x\leq c\right)$， $i=3$ 代表外区 $\left(c\leq x\leq d\right)$，

$$\psi_{m,n}\left(x,y,t\right)=Y_m\left(xt\right)J_n\left(yt\right)-J_m\left(xt\right)Y_n\left(yt\right).$$

其中 m,n 为实常数。

3. 主要定理及证明

定理 1 若三区间复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题有唯一解，则其内区 $\left(a\leq x\leq b\right)$ 解为

$$y_1=D\cdot\frac{1}{E+\frac{1}{F+\Phi_1\left(a\right)}}\cdot\frac{1}{F+\Phi_1\left(a\right)}\cdot\Phi_1\left(x\right),\tag{6}$$

中区 $(b \le x \le c)$ 解为

$$y_2 = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \Phi_1(a)}} \cdot \frac{1}{F + \Phi_1(a)} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(b,b)}{\gamma_1 \Phi_2(b) \varphi_{1,1}^1(a,b) - \gamma_2 \varphi_{1,0}^1(a,b)} \cdot \Phi_2(x), \tag{7}$$

外区 $(c \le x \le d)$ 解为

$$\begin{aligned} y_3 = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \Phi_1(a)}} \cdot \frac{1}{F + \Phi_1(a)} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(b,b)}{\gamma_1 \Phi_2(b) \varphi_{1,1}^1(a,b) - \gamma_2 \varphi_{1,0}^1(a,b)} \\ \cdot \frac{\varphi_{0,1}^2(c,c)}{\eta_1 \Phi_3(c) \varphi_{1,1}^2(b,c) - \eta_2 \varphi_{1,0}^2(b,c)} \Phi_3(x), \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\Phi_3(x)$ 称为外区相似核函数

$$\Phi_3(x) = \frac{G \varphi_{0,0}^3(x,d) + H \varphi_{0,1}^3(x,d)}{G \varphi_{1,0}^3(c,d) + H \varphi_{1,1}^3(c,d)}, (c \le x \le d) \tag{9}$$

$\Phi_2(x)$ 称为中区相似核函数

$$\Phi_2(x) = \frac{\eta_2 \varphi_{0,0}^2(x,c) - \eta_1 \Phi_3(c) \varphi_{0,1}^2(x,c)}{\eta_2 \varphi_{1,0}^2(b,c) - \eta_1 \Phi_3(c) \varphi_{1,1}^2(b,c)}, (b \le x \le c) \tag{10}$$

$\Phi_1(x)$ 称为内区相似核函数

$$\Phi_1(x) = \frac{\gamma_2 \varphi_{0,0}^1(x,b) - \gamma_1 \Phi_2(b) \varphi_{0,1}^1(x,b)}{\gamma_2 \varphi_{1,0}^1(a,b) - \gamma_1 \Phi_2(b) \varphi_{1,1}^1(a,b)}, (a \le x \le b) \tag{11}$$

证明：由引理 1 知，Riccati-Bessel 方程 $x^2 y_i'' + \left[\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2 x^2 - l_i(l_i+1)\right] y_i = 0$ 的通解为

$$y_i = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \left[M_i Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) + N_i J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) \right], (i = 1,2,3), \tag{12}$$

则其导数为

$$\begin{aligned} y_i' = M_i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[(l_i+1) x^{-\frac{1}{2}} Y_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) - x^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_{ni}}{a_i} Y_{l_i+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) \right] \\ + N_i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[(l_i+1) x^{-\frac{1}{2}} J_{l_i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) - x^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_{ni}}{a_i} J_{l_i+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i} x\right) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

将式(12)和式(13)代入边值问题(1)中的内边界条件、衔接条件、外边界条件中，

由内边界条件 $\left[E y_1 + (1+EF) y_1' \right]\Big|_{x=a} = D$ 有

$$\begin{aligned} M_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[E a^{\frac{1}{2}} + (1+EF)(l_1+1) a^{-\frac{1}{2}} \right] Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1} a\right) - (1+EF) a^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_{n1}}{a_1} Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1} a\right) \right\} \\ + N_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[E a^{\frac{1}{2}} + (1+EF)(l_1+1) a^{-\frac{1}{2}} \right] J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1} a\right) - (1+EF) a^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_{n1}}{a_1} J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1} a\right) \right\} = D. \end{aligned} \tag{14}$$

由衔接面条件 $y_1\big|_{x=b}=\gamma_1 y_2\big|_{x=b}$, $y_1'\big|_{x=b}=\gamma_1 y_2'\big|_{x=b}$, $y_2\big|_{x=c}=\eta_1 y_3\big|_{x=c}$, $y_2'\big|_{x=c}=\eta_1 y_3'\big|_{x=c}$

$$M_1 Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)+N_2 J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-M_2\gamma_1 Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-N_2\gamma_1 J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)=0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&M_1\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\\&+N_1\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\\&-M_2\gamma_2\left[(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right]\\&-N_2\gamma_2\left[(l_2+1)b^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}b\right)\right]=0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$M_2 Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)+N_2 J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-M_3\eta_1 Y_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)-N_3\eta_1 J_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)=0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&M_2\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]\\&+N_2\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]\\&-M_3\eta_2\left[(l_3+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}Y_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)\right]\\&-N_3\eta_2\left[(l_3+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}J_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}c\right)\right]=0.\end{aligned} \tag{18}$$

由外边界条件 $\left[Gy_3+Hy_3'\right]\big|_{x=d}=0$ 有

$$\begin{aligned}&M_3\left\{\left[Gd^{\frac{1}{2}}+H(l_3+1)d^{-\frac{1}{2}}\right]Y_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)-Hd^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}Y_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\right\}\\&+N_3\left\{\left[Gd^{\frac{1}{2}}+H(l_3+1)d^{-\frac{1}{2}}\right]J_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)-Hd^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}J_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\right\}=0.\end{aligned} \tag{19}$$

由于边值问题(1)的解存在且唯一，联立式(14)~(19)得到的关于 M_1,N_1,M_2,N_2,M_3,N_3 的线性方程组的系数矩阵 $\Delta\neq 0$，且

$$\begin{aligned}\Delta=(bc)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}&\left\{\gamma_2\eta_2\varphi_{1,0}^2(b,c)\left[E\varphi_{0,0}^1(a,b)+(1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,b)\right]\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\right.\\&-\gamma_1\eta_2\varphi_{0,0}^2(b,c)\left[E\varphi_{0,1}^1(a,b)+(1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,b)\right]\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&-\gamma_2\eta_1\varphi_{1,1}^2(b,c)\left[E\varphi_{0,0}^1(a,b)+(1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,b)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\\&\left.+\gamma_1\eta_1\varphi_{0,1}^2(b,c)\left[E\varphi_{0,1}^1(a,b)+(1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,b)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{20}$$

根据 Gramer 法则得到 M_1,N_1,M_2,N_2,M_3,N_3 的表达式如下：

$$\begin{aligned}M_1=\frac{D}{\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}c^{-\frac{1}{2}}&\Bigg\{\gamma_2\eta_2J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\varphi_{1,0}^2(b,c)\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&-\gamma_2\eta_1J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\varphi_{1,1}^2(b,c)\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\\&-\gamma_1\eta_2b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,0}^2(b,c)\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&+\gamma_1\eta_1b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,1}^2(b,c)\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}J_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}J_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}N_1=-\frac{D}{\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}c^{-\frac{1}{2}}&\Bigg\{\gamma_2\eta_2Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\varphi_{1,0}^2(b,c)\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&-\gamma_2\eta_1Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\varphi_{1,1}^2(b,c)\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\\&-\gamma_1\eta_2b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,0}^2(b,c)\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&+\gamma_1\eta_1b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,1}^2(b,c)\left[(l_1+1)b^{-\frac{1}{2}}Y_{l_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)-b^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n1}}{a_1}Y_{l_1+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n1}}{a_1}b\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}M_2=-\frac{D}{\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,1}^1(b,b)&\Bigg\{\eta_2J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&-\eta_1c^{-\frac{1}{2}}\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}J_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}J_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}N_2=\frac{D}{\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}b^{-\frac{1}{2}}\varphi_{0,1}^1(b,b)&\Bigg\{\eta_2Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\left[G\varphi_{1,0}^3(c,d)+H\varphi_{1,1}^3(c,d)\right]\\&-\eta_1c^{-\frac{1}{2}}\left[(l_2+1)c^{-\frac{1}{2}}Y_{l_2+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)-c^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n2}}{a_2}Y_{l_2+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n2}}{a_2}c\right)\right]\left[G\varphi_{0,0}^3(c,d)+H\varphi_{0,1}^3(c,d)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}M_3=\frac{D}{\Delta}(bc)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}\varphi_{0,1}^1(b,b)\varphi_{0,1}^1(c,c)&\Bigg\{Gd^{\frac{1}{2}}J_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\\&+H\left[(l_3+1)d^{-\frac{1}{2}}J_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)-d^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}J_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\right]\Bigg\},\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}N_3=-\frac{D}{\Delta}(bc)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}\varphi_{0,1}^1(b,b)\varphi_{0,1}^2(c,c)&\Bigg\{Gd^{\frac{1}{2}}Y_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\\&+H\left[(l_3+1)d^{-\frac{1}{2}}Y_{l_3+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)-d^{\frac{1}{2}}\frac{\mu_{n3}}{a_3}Y_{l_3+\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_{n3}}{a_3}d\right)\right]\Bigg\}.\end{aligned}\tag{26}$$

将式(21)~(26)代入 Riccati-Bessel 方程的通解式(12)中，并结合式(2)~(5)和式(9)~(11)进行整理即可得到三区复合型 Riccati-Bessel 方程的相似结构解为式(6)、式(7)、式(8)。

在实际工程问题研究中，经常需要应用以下推论：

推论 1 对于三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)，若内边界条件是 $y_1\big|_{x=a}=1$，则

$$y_1=\Phi_1(x), \tag{27}$$

推论 2 对于三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)，若外边界条件是 $y_3\big|_{x=d}=0$，则外区相似核函数为

$$\Phi_3(x)=\frac{\varphi_{0,0}^3(x,d)}{\varphi_{1,0}^3(c,d)}, \tag{28}$$

推论 3 对于三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)，若外边界条件是 $y_3'\big|_{x=d}=0$，则外区相似核函数为

$$\Phi_3(x)=\frac{\varphi_{0,1}^3(x,d)}{\varphi_{1,1}^3(c,d)}, \tag{29}$$

推论 4 对于三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)，有

$$\left[y_1(x)+Fy_1'(x)\right]\Big|_{x=a}=\frac{D}{E+\dfrac{1}{F+\Phi_1(a)}}. \tag{30}$$

4. 相似构造法的求解步骤

根据上面的论述，可将相似构造法求解三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题(1)的步骤归纳如下：

第一步，构造内区、中区、外区引解函数

求解出边值问题(1)中 3 个定解方程 $x^2y_i''+\left[\left(\frac{\mu_{ni}}{a_i}\right)^2x^2-l_i(l_i+1)\right]y_i=0\ (i=1,2,3)$ 的各自的线性无关解，再根据引理 2，得到内区、中区、外区引解函数。

第二步，构造内区、中区、外区相似核函数

利用外边界的系数 G、H 和外区引解函数构造外区相似核函数 $\Phi_3(x)$，即式(9)；其次利用衔接面条件系数 η_1、η_2、中区引解函数和 $\Phi_3(c)$ 构造中区相似核函数 $\Phi_2(x)$，即式(10)；最后利用衔接面条件系数 γ_1、γ_2、内区引解函数和 $\Phi_2(b)$ 构造内区相似核函数 $\Phi_1(x)$，即式(11)。

第三步，构造内区、中区、外区相似结构解

利用内区相似核函数 $\Phi_1(x)$，$\Phi_1(a)$ 和内边界条件系数 E、F、D 构造内区解 y_1，即式(6)；其次利用部分内区解、中区相似核函数 $\Phi_2(x)$，$\Phi_2(b)$、衔接面条件系数 γ_1、γ_2 和中区引解函数构造中区解 y_2，即式(7)；最后利用部分中区解、外区相似核函数 $\Phi_3(x)$，$\Phi_3(c)$、衔接面条件系数 η_1、η_2 和外区引解函数构造外区解 y_3，即式(8)。

5. 实例

求解如下具体的三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题($\frac{\mu_{n1}}{a_1}=1,\frac{\mu_{n2}}{a_2}=2,\frac{\mu_{n3}}{a_3}=3,l_1=1,l_2=2,l_3=3,$
$\gamma_1=\eta_1=1,\gamma_2=\eta_2=2,a=1,b=2,c=3,d=4,D=2,E=2,F=3,G=3,H=4$)

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + \left[x^2 - 2\right] y_1 = 0, (1 \le x \le 2) \\ x^2 y_2'' + \left[4x^2 - 6\right] y_2 = 0, (2 \le x \le 3) \\ x^2 y_3'' + \left[9x^2 - 12\right] y_3 = 0, (3 \le x \le 4) \\ \left[2y_1 + 7y_1'\right]\Big|_{x=1} = 2, \\ y_1\big|_{x=2} = y_2\big|_{x=2}, y_1'\Big|_{x=2} = 2y_2'\Big|_{x=2}, \\ y_2\big|_{x=3} = y_3\big|_{x=3}, y_2'\Big|_{x=3} = 2y_3'\Big|_{x=3}, \\ \left[3y_3 + 4y_3'\right]\Big|_{x=4} = 0, \end{cases} \tag{31}$$

对于边值问题(31)，$\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{\frac{3}{2}}(x)$ 和 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$ 是内区定解方程 $x^2 y_1'' + \left[x^2 - 2\right] y_1 = 0$ 的两个线性无关解；$\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{\frac{5}{2}}(2x)$ 和 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\frac{5}{2}}(2x)$ 是中区定解方程 $x^2 y_2'' + \left[4x^2 - 6\right] y_2 = 0$ 的两个线性无关解；$\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{\frac{7}{2}}(3x)$ 和 $\sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\frac{7}{2}}(3x)$ 是外区定解方程 $x^2 y_3'' + \left[9x^2 - 12\right] y_3 = 0$ 的两个线性无关解。

对于上述边值问题，传统的求解方法是利用待定系数法[15]。首先求出定解方程的通解，然后对通解进行求导运算，再代入内边界、衔接和外边界条件得到一个线性方程组，最后利用 Gramer 法得到边值问题的解。待定系数法计算过程非常复杂，无法避免繁琐的导数计算。而相似构造法简化了计算过程，消除了导数计算的必要性，使用引解函数、相似核函数、内外边界和衔接条件系数组合即可得到边值问题的解。

第一步：构造内区、中区、外区引解函数

利用内区、中区、外区定解方程的线性无关解分别构造对应的引解函数，即

内区引解函数：

$$\varphi_{0,0}^1(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{x\xi}\, \psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1),$$

$$\varphi_{0,1}^1(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{\xi}} \left[2\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1) - \xi\psi_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,1)\right],$$

$$\varphi_{1,0}^1(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \left[2\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1) - x\psi_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1)\right],$$

$$\varphi_{1,1}^1(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{x\xi}} \left[4\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1) - 2\xi\psi_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,1) - 2x\psi_{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}(x,\xi,1) + x\xi\psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,1)\right].$$

中区引解函数：

$$\varphi_{0,0}^2(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{x\xi}\, \psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2),$$

$$\varphi_{0,1}^2(x,\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x}{\xi}} \left[3\psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2) - 2\xi\psi_{\frac{5}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,2)\right],$$

$$\varphi_{1,0}^{2}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[3\psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2)-2x\psi_{\frac{7}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2)\right],$$

$$\varphi_{1,1}^{2}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[9\psi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2)-6\xi\psi_{\frac{5}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,2)-6x\psi_{\frac{7}{2},\frac{5}{2}}(x,\xi,2)+4x\xi\psi_{\frac{7}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,2)\right].$$

外区引解函数：

$$\varphi_{0,0}^{3}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x\xi}\psi_{\frac{7}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3),$$

$$\varphi_{0,1}^{3}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\left[4\psi_{\frac{7}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3)-3\xi\psi_{\frac{7}{2},\frac{9}{2}}(x,\xi,3)\right],$$

$$\varphi_{1,0}^{3}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{x}}\left[4\psi_{\frac{7}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3)-3x\psi_{\frac{9}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3)\right],$$

$$\varphi_{1,1}^{3}(x,\xi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x\xi}}\left[16\psi_{\frac{7}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3)-12\xi\psi_{\frac{7}{2},\frac{9}{2}}(x,\xi,3)-12x\psi_{\frac{9}{2},\frac{7}{2}}(x,\xi,3)+9x\xi\psi_{\frac{9}{2},\frac{9}{2}}(x,\xi,3)\right].$$

第二步：构造内区、中区、外区相似核函数

根据式(9)~(11)，可以得到边值问题(31)的内、中、外区相似核函数，即

$$\Phi_1(x)=\frac{2\varphi_{0,0}^{1}(x,2)-\Phi_2(2)\varphi_{0,1}^{1}(x,2)}{2\varphi_{1,0}^{1}(1,2)-\Phi_2(2)\varphi_{1,1}^{1}(1,2)},$$

$$\Phi_2(x)=\frac{2\varphi_{0,0}^{2}(x,3)-\Phi_3(3)\varphi_{0,1}^{2}(x,3)}{2\varphi_{1,0}^{2}(2,3)-\Phi_3(3)\varphi_{1,1}^{2}(2,3)},$$

$$\Phi_3(x)=\frac{3\varphi_{0,0}^{3}(x,4)+4\varphi_{0,1}^{3}(x,4)}{3\varphi_{1,0}^{3}(3,4)+4\varphi_{1,1}^{3}(3,4)}.$$

第三步：构造内区、中区、外区相似结构解

根据式(6)~(8)，可以得到边值问题(31)的内、中、外区相似结构解，即

$$y_1=2\frac{1}{2+\frac{1}{3+\Phi_1(1)}}\cdot\frac{1}{3+\Phi_1(1)}\cdot\Phi_1(x),$$

$$y_2=2\frac{1}{2+\frac{1}{3+\Phi_1(1)}}\cdot\frac{1}{3+\Phi_1(1)}\cdot\frac{\varphi_{0,1}^{1}(2,2)}{\Phi_2(2)\varphi_{1,1}^{1}(1,2)-2\varphi_{1,0}^{1}(1,2)}\cdot\Phi_2(x),$$

$$y_3=2\frac{1}{2+\frac{1}{3+\Phi_1(1)}}\cdot\frac{1}{3+\Phi_1(1)}\cdot\frac{\varphi_{0,1}^{1}(2,2)}{\Phi_2(2)\varphi_{1,1}^{1}(1,2)-2\varphi_{1,0}^{1}(1,2)}$$
$$\cdot\frac{\varphi_{0,1}^{2}(3,3)}{\Phi_3(3)\varphi_{1,1}^{2}(2,3)-2\varphi_{1,0}^{2}(2,3)}\Phi_3(x).$$

6. 结论

1) 三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题的内区、中区、外区解都呈现连分数的形式且具有相似性，

并且针对不同边界条件系数的设定，其解的相似结构仍然保持不变。

2) 对于三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题，先利用定解方程的线性无关解构造的内、中、外区引解函数，再利用引解函数和外边界、衔接面条件的系数构造相似核函数，最后组装内边界系数、引解函数和相似核函数即可得到边值问题的解。

3) 利用相似构造法求解三区复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题时，简化了求解过程，加快了求解速度，得到的解表达式简洁，更能清晰地反映各个参数对解的影响。然而，这一方法仍需要进一步深入研究和探索，以确定其在处理更复杂的复合型 Riccati-Bessel 方程边值问题以及边值问题为双边非齐次的问题时的有效性和适用性。

基金项目

页岩气藏渗流特征研究，四川省科技厅科技计划项目(基本科研－重点研发) (2015JY0245)；西华大学研究生课程思政示范课程，西华大学研究生教育质量工程项目资助(YJSKC202204)。

参考文献

[1] 李顺初. 微分方程解的相似结构初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226.

[2] 石俊华, 王小林, 许东旭. 求解 Hermit 方程的边值问题的相似构造法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013, 32(1): 27-30.

[3] 李顺初, 张红丽, 郑鹏社, 等. 复合型 Laguerre 方程边值问题解的相似结构[J]. 韶关学院学报, 2019, 40(9): 1-6.

[4] 李顺初, 赵超超, 桂钦民. 复合型连带 Legendre 方程边值问题解的相似结构[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2018, 33(2): 13-17.

[5] 郑鹏社, 汤杰. 三区间复合型超几何方程边值问题解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2023, 42(2): 103-110.

[6] 郑鹏社, 杨雨, 李顺初, 等. 三区复合型 Tschebycheff 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2022, 37(4): 8-14.

[7] Li, S.C., Zhao, C.C., Zheng, P.S., *et al*. (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **175**, 280-285. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042

[8] Li, S.C., Zhou, M., Zheng, P.S., *et al*. (2019) Analysis of Seepage Pressure in Dual-Porosity Reservoir under Elastic Boundary. *Journal of Mathematical and Computational Science*, **10**, 316-338.

[9] Li, S.C., Guo, H., Zheng, P.S., *et al*. (2020) The Elastic Boundary Value Problem of Extended Modified Bessel Equation and Its Application in Fractal Homogeneous Reservoir. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, 1-16. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1104-1

[10] Dong, X.X., Li, S.C., Liu, Z.B., *et al*. (2021) Similar Constructing Method and Gaver-Stehfest Numerical Inversion Equation for Solving the Composite Reservoir Models under Three Outer Boundary Conditions. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **47**, 11239-11253. https://doi.org/10.1007/s13369-021-05896-x

[11] 吴振森, 王一平. 多层球电磁散射的一种新算法[J]. 电子科学学刊, 1993(2): 174-180.

[12] 王强, 李顺初, 蒲俊. 求解一类 Riccati-Bessel 方程边值问题的新方法[J]. 绵阳师范学院学报, 2015, 34(5): 1-7+11.

[13] 彭春, 李顺初, 李伟. 复合 Riccati-Bessel 方程边值问题的相似构造法[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 701-710.

[14] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 第 2 版. 北京: 气象出版社, 2002.

[15] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.