

Study on Optimal Design of High-Order FIR Filter with Multi-Band Stop Based on BP Neural Network

Chunlong Zhang, Dechao Li, Yuhuan Zhang

State Grid Bozhou Electric Power Supply Company, Bozhou
Email: bzywxb@126.com

Received: Jan. 2nd, 2014; revised: Feb. 1st, 2014; accepted: Feb. 10th, 2014

Copyright © 2014 Chunlong Zhang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2014 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Chunlong Zhang et al. All Copyright © 2014 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: This paper improves the traditional neural network and conquers its disadvantages of the slow convergence speed and the low learning efficiency with cosine basis functions as output functions of neural network unit. It studies on the amplitude-frequency characteristic of the FIR filters with linear phase by putting up models of neural network based on the cosine basis functions, and drawing the conclusion of relationship between them. The simulation results show that the algorithm has advantages over the design field of high-order FIR filter with multi-band stop.

Keywords: BP Neural Network; FIR Filter with Multi-Band Stop; Optimal Design

基于 BP 神经网络的高阶 FIR 多阻带滤波器优化设计

张春龙, 李德超, 张玉环

国网亳州供电公司, 亳州
Email: bzywxb@126.com

收稿日期: 2014 年 1 月 2 日; 修回日期: 2014 年 2 月 1 日; 录用日期: 2014 年 2 月 10 日

摘要: 本文对传统 BP 神经网络算法加以改进, 以余弦基函数作神经元的输出函数, 克服了传统 BP 神经网络收敛速度慢、学习步长低的致命缺陷。通过对线性相位 FIR 滤波器幅频特性和搭建余弦基神经网络模型对二者进行研究, 并通过仿真研究得出该算法在高阶多阻带滤波器设计中的具有很强的优越性。

关键词: BP 神经网络; FIR 多阻带滤波器; 优化设计

1. 引言

FIR 数字滤波器的传输函数是全零点型, 不会出现因极点跑到单位圆外而导致的系统不稳定, 并且, FIR 可以做到严格的线性相位^[1,2], 因而在电力数据通信、自动控制、图象处理、语音处理等工程领域中均得到了广泛的应用, 在工程实际中有着重大意义。

FIR 滤波器的设计重点就在于寻求一系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}, \text{ 使其频率响应}$$

$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$ 逼近 $H_d(e^{j\Omega})$ 。常用设计方法主要有窗口法和频率取样法, 但这两种方法对带通和带阻边界频率 Ω_p 与 Ω_s 难以控制。为此, 学者们也提出过各种设计方法, 却都各自存在不足之处, 如加权最小平方 WLS 算法^[3]需要计算一个矩阵的逆; 随机抽样递归最小平方(RS-RLS)算法^[4]又存在误差加权函数不易确定等缺点。

本文基于 BP 神经网络来进行设计, 利用余弦基

函数网络算法去实现用有限长傅里叶级数表示的 FIR 线性相位滤波器的幅频特性, 使理想频响与所设计频响之间的整体全局误差在阻带和通带为最小。利用该方法设计的滤波器, 其阻带边界和通带边界频率 Ω_r 与 Ω_p 容易得到精准控制, 且具有学习步长高、初始条件可随机设定等优点, 在滤波器设计方面具有一定优越性。

2. 线性相位 FIR 滤波器幅频特性

一般情况下, 一个 N 阶 FIR 滤波器的系统函数可如下表示:

$$H_z = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (1)$$

当 N 为奇数且满足脉冲响应 $h(n)$ 偶对称的条件时, 则有

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (2)$$

那么, 幅频响应特性可用如下函数表示:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} p_n \cos(n\Omega) \quad (3)$$

这里, $H(e^{j\Omega})$ 是 FIR 线性相位滤波器的幅频响应, 且

$$p_0 = h\left(\frac{N-1}{2}\right), p_n = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (4)$$

从(3)式我们可以看出 FIR 线性相位滤波器的幅频响应是傅里叶级数, p_n 是傅里叶系数。一旦获得 p_n , 就可通过(4)获得 $h(n)$, 即 $h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) = \frac{p_n}{2}$, 这里 $n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。再根据(2)式的对称性, 可设计出 FIR 线性相位滤波器, 即 $h(n)$, 这里 $n = 1, 2, \dots, N-1$ 。很显然, 我们首先要获得 p_n , 现在我们来讨论用神经网络算法来训练理想 FIR 相位滤波器, 以获得网络权值 p_n 。

3. 余弦基 BP 神经网络模型

BP 神经网络是一种反向传播神经网络, 分为输入层、隐含层和输出层。学习过程大致可分输正向传播和反向误差传播两过程。

本余弦基神经网络模型如图 1 所示, 其中输入层至隐层联接权值恒为 1, 隐层至输出层权值为 p_n , ($n = 1, 2, \dots, N-1$), $c_0(\Omega), c_1(\Omega), c_2(\Omega), \dots, c_n(\Omega)$ 为余弦基函数。

3.1. 余弦基神经网络算法

神经网络输出为:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} p_n \cos(n\Omega) \quad (5)$$

式中,

$$c_0(\Omega) = 1, c_1(\Omega) = \cos(\Omega), \\ c_2(\Omega) = \cos(2\Omega), \dots, c_n(\Omega) = \cos(n\Omega).$$

$$\text{设 } P = \left[P_0, P_0, \dots, P_{\frac{N-1}{2}} \right]^T,$$

$$C = \left[c_0(\Omega), c_1(\Omega), \dots, c_{\frac{N-1}{2}}(\Omega) \right]^T, \text{ 式(5)可以表示为}$$

$$H(e^{j\Omega}) = P^T C \quad (6)$$

式中, P 和 C 均是长度为 $\frac{N+1}{2}$ 的一维向量。

误差函数:

$$e(k) = \left| H_d(e^{j\Omega_k}) \right| - H(e^{j\Omega_k}) \quad (7)$$

其中, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 。m 为训练样本数, $H_d(e^{j\Omega_k})$ 为期望输出, $H(e^{j\Omega_k})$ 为神经网络实际输出。

性能函数:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} e^2(k) \quad (8)$$

权值调整:

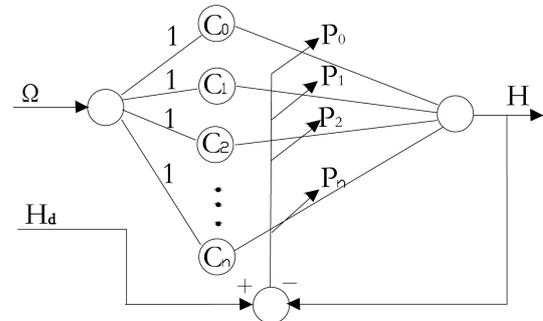


Figure 1. Neural network model
图 1. 神经网络模型

$$P_n(k+1) = P_n(k) - \eta \frac{\partial J}{\partial P_n(k)} \quad (9)$$

这里, $\eta > 0$, 是学习步长。由式(6)、(7)、(8)可得

$$\frac{\partial J}{\partial P_n(k)} = \frac{\partial J}{\partial e(k)} \frac{\partial e(k)}{\partial H(e^{j\Omega_k})} \frac{\partial H(e^{j\Omega_k})}{\partial P_n(k)} = e(k) C_n(\Omega_k) \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式, 可得

$$P_n(k+1) = P_n(k) + \eta e(k) C_n(\Omega_k) \quad (11)$$

通过式(5)~式(11)可知, 式(6)中的权向量 P^T 也即神经网络输出函数式(5)中的向量 P , 通过对 FIR 线性相位滤波器的理想幅频率响应 H_d 进行训练即可得到, 进而便可设计出想要的滤波器。

其中, 学习步长 η 的取值对于神经网络算法的收敛性至关重要, 它决定着每次学习训练所产生的权值变化量。若 η 取值过大, 则可能导致训练时间过长, 参数幅值调整较大, 容易在误差函数最小点附近出现过冲现象, 使权值出现震荡, 收敛性较差; 若 η 取值过小, 则权值调整幅度也会很小, 以至于需要多次调整才能将误差函数曲面降低, 收敛速度较慢, 不过能保证最终获取最小误差, 所以 η 一般可按偏小原则选取。

本文所提及的算法中, 学习步长 η 的可取范围为: $0 < \eta \leq \frac{4}{N+1}$ [5], 经验证, 此时网络计算具有很好的收敛性。

3.2. 神经网络训练过程

根据神经网络特点, 样本数据输入经隐含层处理, 传向输出层并获取网络输出, 若输出得没有达到期望值, 则将输出误差沿原通道方向反向传播, 通过修改权值使误差逐步减小, 直到获取期望值。其训练过程 BP 神经网络计算流程图如图 2 所示:

根据图 2 所示, 神经网络训练的步骤可大致分为 5 步, 如下所述:

第 1 步 对 $\left| H_d(e^{j\Omega_k}) \right|$ 进行取样, 获取训练样本: $\left\{ \Omega_k, \left| H_d(e^{j\Omega_k}) \right| \right\}$, 同时令 $J = 0$, 产生随机权值 $P_n = \text{zeros}(N, 1)$, 给定任意小正实数绝对误差值 ε ;

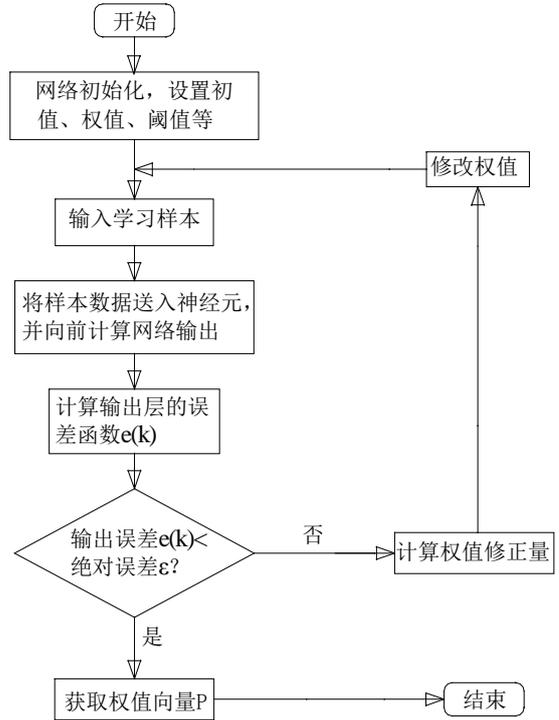


Figure 2. BP neural network calculation flowchart
图 2. BP 神经网络计算流程图

第 2 步 计算神经网络输出

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n \cos(n\Omega)$$

第 3 步 计算误差函数与性能函数

$$e(k) = \left| H_d(e^{j\Omega_k}) \right| - H(e^{j\Omega_k}), J = J + \frac{1}{2} e^2(k);$$

第 4 步 调整权值:

$$P_n(k+1) = P_n(k) + \eta e(k) C_n(\Omega_k)$$

第 5 步 判断是否训练完毕。若 $J > \varepsilon$, 则令 $J = 0$, 返回第二步继续训练, 若 $J \leq \varepsilon$, 则结束训练。

3.3. 计算线性相位 FIR 滤波器脉冲响应

将第 4 步中训练完的权值 P 代入式(4)中, 则有:

$$p_0 = h\left(\frac{N-1}{2}\right) = P_0, h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) = \frac{P_n}{2},$$

其中, $n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。因为线性相位 FIR 滤波器脉冲响应具有偶对称性, 即 $h(n) = h(N-1-n)$, 则具有线性相位特性的 FIR 滤波器设计完成。

4. 线性相位 FIR 滤波器设计实例

例 1. 一个线性相位 FIR 四阻带滤波器，其频率响应指标为：

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0.4 < \Omega < 0.7, 1.0 < \Omega < 1.4, \\ 1.8 < \Omega < 2.4, 2.8 < \Omega < 3.0 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

要求设计一个 600 阶的 FIR 数字滤波器。

取有限脉冲响应的长度为： $N = 601$ ，对 Ω 在 $[0, \pi]$ 单位内均匀取样，共取 $P = 300$ 个样点，即 $\Omega_k = \frac{\pi}{300}k$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, 299$ ，为了使带通与阻带内无过冲、波动，在过度带内取两个点：幅值为 0.75 与 0.25，因此，实际的幅频取样点为： $H_d(k) = [\text{ones}(1,37), 0.75, 0.25, \text{zeros}(1,27), 0.25, 0.75, \text{ones}(1,26), 0.75,$

$0.25, \text{zeros}(1,37), 0.25, 0.75, \text{ones}(1,36), 1.75, 0.25, \text{zeros}(1,49), 0.75, 0.25, \text{ones}(1,42), 0.25, 0.75, \text{zeros}(1,17), 0.75, 0.25, \text{ones}(1,13)]$ ，取 $\varepsilon = 1.0e-11$ ， $\eta = 2.8/60$ 网络结构为： $1 \times 300 \times 1$ ，则经过 20 次运算，带通与阻带性能指标为： $J = 7.055945952822414e-12$ ，其中，FIR 数字滤波器的脉冲响应、幅频特性和衰耗特性分别如图 3、图 4 和图 5 所示。

5. 结论

基于神经网络算法的 FIR 数字滤波器能够达到很好的设计效果，计算过程中不涉及矩阵逆运算，速度快，编程容易。由给出的设计实例仿真可知，其衰耗特性好，带阻衰耗在 160 分贝以上，幅频响应在通带与阻带范围均无过冲现象，过度带比较窄，通带无衰耗，频率选择性好，容易精确控制通带与阻带边界频率。并且设计精度高，可以给定任意小精度，十分逼

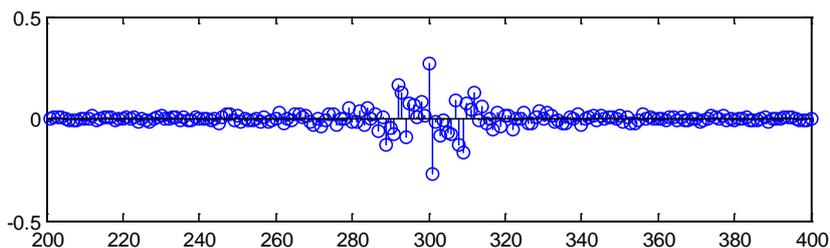


Figure 3. Pulse characteristic
图 3. 脉冲特性

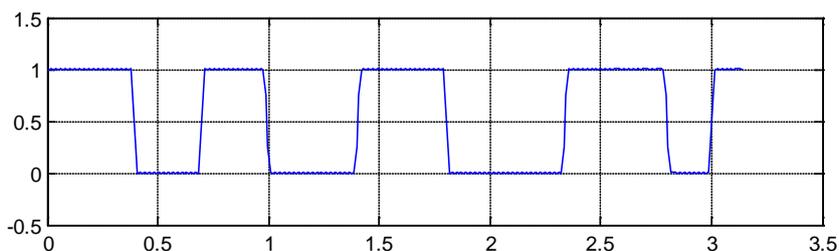


Figure 4. Amplitude-frequency characteristic
图 4. 幅频特性

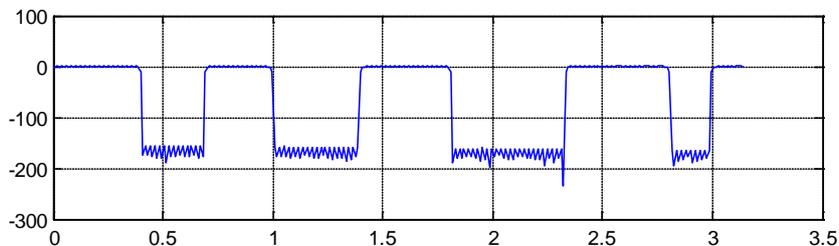


Figure 5. Attenuation characteristic
图 5. 衰耗特性

近理想滤波器的幅频特性, 是设计数字多阻带滤波器的一种有效方法。

参考文献 (References)

- [1] 刘益成, 孙祥娥 (2005) 数字信号处理. 电子工业出版社, 北京.
- [2] 吴湘淇 (1996) 信号、系统与信号处理(下). 第一版, 电子工业出版社, 北京.
- [3] Lee, J.H., Chen, C.K. and Lim, Y.C. (1993) Design of discrete coefficient FIR digital filters with arbitrary amplitude and phase response. *IEEE Transactions on Circuits and System*, **40**, 444-448.
- [4] 赖晓平 (1999) FIR 数字滤波器的递推最小二乘设计算法. *信号处理*, **15**.
- [5] Zeng, Z.-Z. (2004) Study on optimal design of high-order FIR digital filter with multi-band stop. *长沙电力学院学报*, **8**.