Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(1), 43-49
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71007

Two Weak Endpoint Estimates on Bilinear Hardy Operators

Chunmei Zhang

School of Mathematics & Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu Anhui
Email: 957077345@qq.com

Received: Jan. 3rd, 2017; accepted: Jan. 19th, 2017; published: Jan. 22nd, 2017

Abstract

By strict calculation, we mainly give the weak estimate for the boundary of the bilinear Hardy operator on the Morrey space and the weighted Lebesgue space, which is a useful supplement to the existing theory.

Keywords

Hardy Operator, Multiple Hardy Operator, L^p Space, Morrey Space

关于双线性Hardy算子的两个端点弱型估计

张春梅

安徽师范大学数学与计算机科学学院，安徽 芜湖
Email: 957077345@qq.com

收稿日期：2017年1月3日；录用日期：2017年1月19日；发布日期：2017年1月22日

摘 要

通过严格的计算，对双线性Hardy算子在中心Morrey空间和加权Lebesgue空间上的边界进行了端点情形下的弱型估计，这是对现有理论的有益补充。

文章引用: 张春梅. 关于双线性 Hardy 算子的两个端点弱型估计[J]. 理论数学, 2017, 7(1): 43-49.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2017.71007

关键词

Hardy算子，双线性Hardy算子，L^p空间，Morrey空间

1. 引言和主要结果

对于 $\mathbb{R}^+$ 上的局部可积函数 f，经典的 Hardy 算子定义为

$$hf(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y,$$

它满足如下积分不等式：

$$\|hf\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)},\quad 1<p\le\infty,$$

这里的常数 $\frac{p}{p-1}$ 是最优的。关于 Hardy 算子的其他经典结果及最新的一些进展可见文献[1]-[18]，本文拟将已知的一些关于高维 Hardy 算子的结果推广到多线性情形。

为叙述方便，我们引入一些定义和记号。对于 $1\le i\le m(i,m\in\mathbb{N})$， $y_i=(y_{1i},y_{2i},\cdots,y_{ni})\in\mathbb{R}^n$，记每个 y_i 的欧氏范数为 $|y_i|=\sqrt{\sum_{j=1}^n|y_{ji}|^2}$，$m$ 元数组 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 的欧氏范数为 $|(y_1,\cdots,y_m)|=\sqrt{\sum_{i=1}^m|y_i|^2}$；同时，我们用 $B(0,|x|)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的以原点为中心，$|x|$为半径的球体，用 S^{n-1} 表示 n 维单位球面，用 $|B(0,|x|)|$ 和 ω_n 分别表示 $B(0,|x|)$ 和 S^{n-1} 的外测度，特别地，用 Ω_n 表示 $|B(0,1)|$；对于 $1<p<\infty$，我们用 p'表示 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。

设 z_1,z_2 是实部为正的复数，记 Gamma 函数为 $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ 。则 $\Omega_n=|B(0,1)|=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ 。

定义 1.1：设 $\omega(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非负局部可积函数，如果 f 满足

$$\|f\|_{L^p(\omega)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

则称 f 为加权 p 次可积函数，记作 $f\in L^p(\omega)$ 。

如果 f 满足

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\omega)}=\sup_{\lambda>0}\lambda\omega\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\right\}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

则称 f 为广义加权 p 次可积函数，记作 $f\in L^{p,\infty}(\omega)$ 。

其中， $\omega\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)>\lambda|\right\}\right)=\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)>\lambda\right\}}\omega(x)\mathrm{d}x$ 。而 $L^p(\omega)$， $L^{p,\infty}(\omega)$ 分别为加权 L^p 空间和加权弱型 L^p 空间。

定义 1.2：设 $1\le p<\infty$, $-\frac{1}{p}\le\lambda<0$, $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，称 $f\in\dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$，如果 f 满足

$$\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|^{1+\lambda p}}\int_{B(0,R)}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty;$$

称函数 $f\in W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$，如果 f 满足

$$\|f\|_{W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)}=\sup_{R>0}\left|B(0,R)\right|^{-\lambda-\frac{1}{p}}\|f\|_{WL^p(B(0,R))}<\infty$$

其中，$\|f\|_{WL^p(B(0,R))}=\sup_{\lambda>0}\lambda\left|\left\{x\in B(0,R):\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$。

这里，我们称 $\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 分别为 $\mathbb{R}^n$ 上的中心 Morrey 空间和中心弱型 Morrey 空间。

历史上，在 1995 年，Christ 和 Grafakos [19]引入了 n 维 Hardy 算子

$$Hf(x)=\frac{1}{\left|B(0,|x|)\right|}\int_{B(0,|x|)}f(y)\mathrm{d}y$$

并得到了如下形式的 Hardy 不等式

$$\|Hf\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)},\quad 1<p<\infty。$$

Fu Z [20]等研究了双线性函数的 Hardy 算子

$$H^2\left(f_1,f_2\right)(x)=\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\int_{\left|(y_1,y_2)\right|<|x|}f_1\left(y_1\right)f_2\left(y_2\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2。$$

他们得到了如下结论：

(1) [20]设 $f_i\in L^{p_i}\left(|x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}}\mathrm{d}x\right)$，$1<p_i<\infty$，$\alpha_i<pn\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$, $i=1,\ 2,\ \ 1\le p<\infty$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$，且 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。那么，$H^2:L^{p_1}\left(|x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}x\right)\times L^{p_2}\left(|x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}x\right)\to L^p\left(|x|^{\alpha}\mathrm{d}x\right)$是有界的，且其算子范数为

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{2n}}\frac{pn}{(2p-1)n-\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha_1}{pn}\right)\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha_2}{pn}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\left(2-\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{pn}\right)\right)}.$$

(2) [20]设 $f_i\in\dot{B}^{p_i\lambda_i}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$-\frac{1}{p_i}\le\lambda_i<0$，$i=1,2,\ \frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$，$1<p<\infty$, 且 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. 则 $H^2:\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\times\dot{B}^{p_2,\lambda_2}\to\dot{B}^{p,\lambda}$ 是有界的，且其算子范数为

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{2n}}\frac{1}{\lambda+2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}(\lambda_1+1)\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}(\lambda_2+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}(2+\lambda)\right)}.$$

最近，Long R L [13]，Xiao J [14]，Gao G，Zhao F [21]等研究了 n 维 Hardy 算子的弱型估计，并得到了如下的结果：

$$\|Hf\|_{W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le 1\cdot\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)};$$

$$\|Hf\|_{L^{p,\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le 1\cdot\|f\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)};$$

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}\left(|x|^{\alpha}\right)}\le 1\cdot\|f\|_{L^1\left(|x|^{\alpha}\right)}.$$

其中，$1\le p<\infty,\ -\frac{1}{p}\le\lambda<0,\ -n<\alpha\le 0$。

受以上文章的启发，本文试图考虑多线性 Hardy 算子在加权 Lebesgue 空间和 Morrey 空间上的弱型估计。需要指出的是，本文的方法不同于 Gao G [13]等的研究方法。我们的结果如下：

定理 1.1： 设 $f_i\in L^{p_i}\left(|x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}}\mathrm{d}x\right)$，$1<p_i<\infty,\ 1\le p<\infty,\ -n<\alpha_i\le 0,\ i=1,2,\ \frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\ \alpha>-n,$ 且 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。那么，

$$\left\|H^2(f_1,f_2)\right\|_{L^{p,\infty}\left(|x|^{\alpha}\mathrm{d}x\right)}\le\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|f_1\right\|_{L^{p_1}\left(|x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}x\right)}\left\|f_2\right\|_{L^{p_2}\left(|x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}x\right)}.$$

注记： 令 $\alpha_1=\alpha_2=0$，则有 $L^{p_i}\left(|x|^{\frac{\alpha_i p_i}{p}}\mathrm{d}x\right)=L^{p_i}\left(\mathbb{R}^n\right)(i=1,2)$，$L^{p,\infty}\left(|x|^{\alpha}\right)=L^{p,\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$，因此定理 1.1 蕴含了下面的不等式也是成立的，

$$\left\|H^2(f_1,f_2)\right\|_{L^{p,\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|f_1\right\|_{L^{p_1}\left(\mathbb{R}^n\right)}\left\|f_2\right\|_{L^{p_2}\left(\mathbb{R}^n\right)}.$$

定理 1.2： 设 $f_i\in\dot{B}^{p_i,\lambda_i}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$-\frac{1}{p_i}\le\lambda_i<0$，$i=1,2,\ 1<p<\infty$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, 且 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$。那么

$$\left\|H^2(f_1,f_2)\right\|_{W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left\|f_1\right\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\left(\mathbb{R}^n\right)}\left\|f_2\right\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}\left(\mathbb{R}^n\right)}.$$

2. 主要结果的证明

首先，对于加幂权 Lebesgue 空间，我们证明了其乘积空间到弱型空间的 Hardy 算子范数是有界的。

定理 1.1 的证明：

易见，$\left|(y_1,y_2)\right|<|x|$ 蕴含了 $|y_1|<|x|$，$|y_2|<|x|$，从而，利用 Hölder 不等式，我们有如下的点态估计，

$$\begin{aligned}\left|H^2(f_1,f_2)(x)\right|&=\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\left|\int_{|(y_1,y_2)|<|x|}f_1(y_1)f_2(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\\&\le\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|\mathrm{d}y_1\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|\mathrm{d}y_2\\&\le\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|^{p_1}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left(\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|^{p_2}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\\&\quad\left(\int_{|y_2|<|x|}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2'}}\\&\le\frac{\Omega_n^{2-\frac{1}{p}}}{\Omega_{2n}}|x|^{-\frac{n+\alpha}{p}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|^{p_1}|y_1|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|^{p_2}|y_2|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\\&\le\frac{\Omega_n^{2-\frac{1}{p}}}{\Omega_{2n}}|x|^{-\frac{n+\alpha}{p}}\left\|f_1\right\|_{L^{p_1}\left(|x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}x\right)}\left\|f_2\right\|_{L^{p_2}\left(|x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}x\right)}.\end{aligned}$$

令

$$A=\frac{\Omega_n^{2-\frac{1}{p}}}{\Omega_{2n}}\|f\|_{1L^{p_1}\left(|x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}x\right)}\|f_2\|_{L^{p_2}\left(|x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}x\right)},$$

由 $n+\alpha>0$ 可得

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|H^2(f_1,f_2)\right|>\lambda\right\}\subset\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<\left(\frac{\lambda}{A}\right)^{-\frac{p}{n+\alpha}}\right\},$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n,\left|H^2(f_1,f_2)\right|>\lambda\right\}}|x|^\alpha\mathrm{d}x&\le\int_{|x|<\left(\frac{\lambda}{A}\right)^{-\frac{p}{n+\alpha}}}|x|^\alpha\mathrm{d}x\\&=\int_{S^{n-1}}\int_0^{\left(\frac{\lambda}{A}\right)^{-\frac{p}{n+\alpha}}}r^{n+\alpha-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x'\\&=\frac{n}{n+\alpha}\Omega_n\left(\frac{A}{\lambda}\right)^p.\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}\left\|H^2\le\sup_{\lambda>0}\lambda\left(\frac{n}{n+\alpha}\Omega_n\right)^{\frac{1}{p}}\frac{A}{\lambda}(f_1,f_2)\right\|_{L^{p,\infty}\left(|x|^\alpha\right)}&\\=\sup_{\lambda>0}\lambda\left(\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n,\left|H^2(f_1,f_2)\right|>\lambda\right\}}|x|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&\\=\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\|f_1\|_{L^{p_1}\left(|x|^{\frac{\alpha_1 p_1}{p}}\mathrm{d}x\right)}\|f_2\|_{L^{p_2}\left(|x|^{\frac{\alpha_2 p_2}{p}}\mathrm{d}x\right)}.&\end{aligned}$$

其次，对于 Morrey 空间，我们也证明了其乘积空间到弱型空间的 Hardy 算子范数是有界的。

定理 1.2 的证明：

类似于定理 1.2 的证明，由 Hölder 不等式，我们有如下点态估计，

$$\begin{aligned}\left|H^2(f_1,f_2)(x)\right|&=\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\left|\int_{|(y_1,y_2)|<|x|}f_1(y_1)f_2(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\\&\le\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|\mathrm{d}y_1\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|\mathrm{d}y_2\\&\le\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|^{p_1}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left(\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|^{p_2}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\int_{|y_2|<|x|}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2'}}\\&=\frac{1}{\Omega_{2n}}\frac{1}{|x|^{2n}}\left|B(0,|x|)\right|^{\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2'}}\left(\int_{|y_1|<|x|}\left|f_1(y_1)\right|^{p_1}\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{|y_2|<|x|}\left|f_2(y_2)\right|^{p_2}\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\\&\le\frac{\Omega_n^{2+\lambda}}{\Omega_{2n}}|x|^{n\lambda}\|f_1\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}\|f_2\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

令

$$A=\frac{\Omega_n^{2+\lambda}}{\Omega_{2n}}\|f_1\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}\|f_2\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)},$$

由 $\lambda<0$ 可以得到

$$\left\|H^2\left(f_1,f_2\right)\right\|_{W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le\sup_{R>0}\sup_{t>0}t\left|B(0,R)\right|^{-\lambda-\frac{1}{p}}\left|\left\{x\in B(0,R):A|x|^{n\lambda}>t\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{R>0}\sup_{t>0}t\left|B(0,R)\right|^{-\lambda-\frac{1}{p}}\left|\left\{|x|\le R:|x|<\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

若 $0<R\le\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}$，那么，因为 $\lambda<0$，从而

$$\sup_{t>0}\sup_{0<R\le\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}}t\left|B(0,R)\right|^{-\lambda-\frac{1}{p}}\left|\left\{|x|\le R:|x|<\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{t>0}t\Omega_n^{-\lambda}\frac{A}{t}=\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left\|f_1\right\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\left(\mathbb{R}^n\right)}\left\|f_2\right\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}\left(\mathbb{R}^n\right)}.$$

若 $R>\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}>0$，由 $\lambda\ge-\frac{1}{p}$ 可得

$$\sup_{t>0}\sup_{R>\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}}t\left|B(0,R)\right|^{-\lambda-\frac{1}{p}}\left|\left\{|x|\le R:|x|<\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$=\Omega_n^{-\lambda}\sup_{t>0}\sup_{R>\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{n\lambda}}}tR^{-n\left(\lambda+\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{A}{t}\right)^{\frac{1}{\lambda p}}$$

$$=\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left\|f_1\right\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\left(\mathbb{R}^n\right)}\left\|f_2\right\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}\left(\mathbb{R}^n\right)}.$$

从而有

$$\left\|H^2\left(f_1,f_2\right)\right\|_{W\dot{B}^{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{2n}}\left\|f_1\right\|_{\dot{B}^{p_1,\lambda_1}\left(\mathbb{R}^n\right)}\left\|f_2\right\|_{\dot{B}^{p_2,\lambda_2}\left(\mathbb{R}^n\right)}.$$

致　谢

本文的写作感谢瞿萌老师指导！

基金项目

安徽师范大学本科生优秀毕业论文(设计、创作)培育计划项目资助。

参考文献 (References)

[1] Anderson, K. and Muckenhoupt, B. (1982) Weighted Weak Type Hardy Inequalities with Application to Hilbert Transforms and Maximal Functions. *Studia Mathematica*, **72**, 9-26.

[2] Chen, J.C., Fan, D.S. and Wang, S.L. (2013) Hausdorff Operators on Euclidean Spaces. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **28**, 548-564. https://doi.org/10.1007/s11766-013-3228-1

[3] Bennet, C., Devore, R.A. and Sharpley, R.C. (1981) Weak L^∞ and BMO. *Annals of Mathematics*, **113**, 601-611. https://doi.org/10.2307/2006999

[4] Bliss, G.A. (1930) An Integral Inequality. *Journal London Mathematical Society*, **317**, 40-46. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-5.1.40

[5] Broadbent, T.A.A. (1928) A Proof of Hardy's Convergence Theorem. *Journal London Mathematical Society*, **3**, 242-243. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-3.4.242

[6] Levinson, N. (1964) Generalizations of an Inequality of Hardy. *Duke Mathematical Journal*, **31**, 389-394. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03137-0

[7] Muckenhoupt, B. (1972) Hardy's Inequality with Weights. *Studia Mathematica*, **44**, 31-38.

[8] Golubov, B.I. (1997) Boundedness of the Hardy and the Hardy-Littlewood Operators in the Spaces ReH1 and BMO. *Sbornik*: *Mathematics*, **188**, 1041-1054. https://doi.org/10.1070/SM1997v188n07ABEH000246

[9] Rakotondratsimba, Y. (1998) On the Boundedness of Classical Operators on Weighted Lorentz Spaces. *Georgian Mathematical Journal*, **5**, 177-200. https://doi.org/10.1007/BF02767995

[10] Calderon, A.P. (1966) Space between L^1 and L^∞ and the Theorem of Marcikiewiez. *Studia Mathematica*, **26**, 273-299.

[11] Hardy, G.H. (1928) Note on Some Points in the Integral Calculus. *Messenger of Mathematics*, **57**, 12-16.

[12] Martin-Reyes, F. and Ortega, P. (1998) On Weighted Weak Type Inequalities for Modified Hardy Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**, 1739-1746. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04247-6

[13] Long, R.L. (1985) Hp Martingale Theory. Peking University Press, Beijing.

[14] Xiao, J. (2001) L^p and BMO Bounds of Weighted Hardy-Littlewood Averages. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **262**, 660-666. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7594

[15] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1934) Inequalities. Cambridge University Press, London and New York.

[16] Edmunds, D., Gurka, P. and Pick, L. (1994) Compactness of Hardy Type Operators in Weighted Banach Function Spaces. *Studia Mathematica*, **109**, 73-90.

[17] Christ, M. and Grafakos, L. (1995) Best Constants for Two Non-Convolution Inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **123**, 1687-1687. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1995-1239796-6

[18] Gao, G., Hu, X. and Zhang, C. (2016) Sharp Weak Estimates for Hardy-Type Operators. *Annals of Functional Analysis*, **7**, 421-433. https://doi.org/10.1215/20088752-3605447

[19] Zhao, F.Y., Fu, Z.W. and Lu, S.Z. (2012) Endpoint Estimates for *n*-Dimensional Hardy Operators and Their Commutators. *Science China Mathematics*, **55**, 1977-1990. https://doi.org/10.1007/s11425-012-4465-0

[20] Fu, Z., Grafakos, L., Lu, S.Z., *et al*. (2012) Sharp Bounds for *m*-Linear Hardy and Hilbert Operators. *Houston Journal of Mathematics*, **38**, 225-244.

[21] Gao, G. and Zhao, F. (2015) Sharp Weak Bounds for Hausdorff Operators. *Analysis Mathematica*, **41**, 163-173. https://doi.org/10.1007/s10476-015-0204-4