Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 783-790
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97102

Lie Super-Bialgebra Structures on a Super Heisenberg-Virasoro Algebra

Meijun Li

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 835102578@qq.com

Received: Aug. 6th, 2019; accepted: Aug. 26th, 2019; published: Sep. 2nd, 2019

Abstract

In this paper we investigate Lie super-bialgebra structures on a super Heisenberg-Virasoro algebra. We obtain sufficient and necessary conditions for this type Lie super-bialgebra structures to be triangular coboundary.

Keywords

Lie Super-Bialgebras, Yang-Baxter Equations, A Super Heisenberg-Virasoro Algebra

一类超Heisenberg-Virasoro代数的超双代数结构

李美君

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 835102578@qq.com

收稿日期：2019年8月6日；录用日期：2019年8月26日；发布日期：2019年9月2日

摘　要

本文主要研究了一类超Heisenberg-Virasoro代数上的超双代数结构，得到了该类超李双代数为三角余边缘的充分必要条件。

关键词

超李双代数，Yang-Baxter方程，超Heisenberg-Virasoro代数

文章引用：李美君. 一类超 Heisenberg-Virasoro 代数的超双代数结构[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 783-790.
DOI: 10.12677/pm.2019.97102

1. 引言

为了研究量子群，Drinfeld 于 1983 年在文献[1] [2]中引入了李双代数。无限维李代数的双代数结构无法统一分类，文献[3]引入了构造三角余边缘李双代数的方法，文献[4]构造了 Witt 型和 Virasoro 型李双代数，文献[5]给出了相应分类。文献[6] [7] [8]研究了 Schrödinger-Virasoro 李代数、广义 Witt 型李代数和 Virasoro 李代数等无限维李代数的双代数结构。本文将研究超 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 上的超双代数结构，它是复数域 $\mathbb{C}$ 上的无限维李超代数，以 $\{L_n, I_n, G_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 为一组基，且满足以下运算

$$\begin{aligned}&[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n},\ [L_m,I_n]=-nI_{m+n},\ [L_m,G_n]=-nG_{m+n},\\&[I_n,G_n]=[I_m,I_n]=0,\ [G_m,G_n]=I_{m+n}\end{aligned} \tag{1.1}$$

2. 预备知识

给定超向量空间 $L=L^{\bar{0}}\oplus L^{\bar{1}}$，假设以下元素都是 $\mathbb{Z}_2$-分次的，用 $|x|\in\mathbb{Z}_2$ 表示 x 的次，即 $x\in L^{|x|}$。引入 $\tau(x\otimes y)=(-1)^{|x||y|}y\otimes x$，$\xi(x\otimes y\otimes z)=(-1)^{|x|(|y|+|z|)}y\otimes z\otimes x$，$\forall x,y,z\in L$。

定义 2.1： 李超代数 (L,φ) 由超向量空间 L 和双线性映射 $\varphi: L\otimes L\to L$ 构成，且满足

$$\varphi(L^i,L^j)\subset L^{i+j}，\ \mathrm{Ker}(1-\tau)\subset \mathrm{Ker}\varphi，\ \varphi\cdot(1\otimes\varphi)\cdot(1+\xi+\xi^2)=0。$$

定义 2.2： 李超余代数 (L,Δ) 由超向量空间 L 和线性映射 $\Delta: L\to L\otimes L$ 构成，且满足

$$\Delta(L^i)\subset\sum_{j+k=i}L^j\otimes L^k，\ \mathrm{Im}\Delta\subset\mathrm{Im}(1-\tau)，\ (1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta=0。$$

定义 2.3： 李超双代数 (L,φ,Δ) 满足：(L,φ) 是李超代数，(L,Δ) 是超余代数，且有 $\Delta\varphi(x,y)=x\cdot\Delta y-(-1)^{|x||y|}y\cdot\Delta x$，$\forall x,y\in L$，其中“$\cdot$”表示对角伴随作用

$$x\cdot\left(\sum_i a_i\otimes b_i\right)=\sum_i\left([x,a_i]\otimes b_i+(-1)^{|x||a_i|}a_i\otimes[x,b_i]\right) \tag{2.1}$$

用 $\mathcal{U}$ 表示 L 的泛包络代数，记 $r=\sum_i a_i\otimes b_i\in L\otimes L$，引入 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ 的元素

$$r^{13}=\sum_i a_i\otimes\mathbf{1}\otimes b_i=(\tau\otimes\mathbf{1})(\mathbf{1}\otimes r)=(\mathbf{1}\otimes\tau)(r\otimes\mathbf{1}),$$

$$r^{12}=\sum_i a_i\otimes b_i\otimes\mathbf{1}=r\otimes\mathbf{1}，\ r^{23}=\sum_i\mathbf{1}\otimes a_i\otimes b_i=\mathbf{1}\otimes r. \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是泛包络代数 $\mathcal{U}$ 的单位元，则定义 $\mathbf{c}(r)\in L\otimes L\otimes L$ 如下

$$\mathbf{c}(r)=[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]，\ \forall r\in L\otimes L.$$

定义 2.4： 1) 余边缘李超双代数 (L,φ,Δ,r) 是一个四元组，其中 (L,φ,Δ) 是李超双代数，并且有 $r\in\mathrm{Im}(1-\tau)\subset L\otimes L$，使得 $\Delta=\Delta_r$ (称为 r 的余边缘)，即对任意 $x\in L$，有 $\Delta_r(x)=(-1)^{|r||x|}x\cdot r$。

2) 我们称 (L,φ,Δ,r) 为三角的，若满足经典的 Yang-Baxter 方程(CYBE)

$$\mathbf{c}(r)=0 \tag{2.3}$$

3) 元素 $r\in \mathrm{Im}(1-\tau)\subset L\otimes L$ 称为满足修正的 Yang-Baxter 方程，如果

$$x\cdot \mathbf{c}(r)=0，\quad \forall x\in L \tag{2.4}$$

文献[1]给出了以下两个结果，元素 r 满足(2.3)当且仅当满足(2.4)。设 L 是李超代数，且 $r\in \mathrm{Im}(1-\tau)\subset L\otimes L$，则有 $(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta_r)\cdot\Delta_r(x)=x\cdot\mathbf{c}(r)$，三元组 $(L,[\cdot,\cdot],\Delta_r)$ 是李双代数当且仅当 r 满足(2.3)。

我们可把 $\mathcal{V}=\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}=\mathcal{V}^{\bar{0}}\oplus\mathcal{V}^{\bar{1}}$ 看作对角伴随作用下的 $\mathcal{L}$-模。用 $\mathrm{Der}(\mathcal{L},\mathcal{V})=\mathrm{Der}^{\bar{0}}(\mathcal{L},\mathcal{V})+\mathrm{Der}^{\bar{1}}(\mathcal{L},\mathcal{V})$ 表示导子 $D:\mathcal{L}\to\mathcal{V}$ 的集合，且 D 满足

$$D([x,y])=(-1)^{|D||x|}x\cdot D(y)-(-1)^{|y|(|D|+|x|)}y\cdot D(x)，\quad \forall x,y\in\mathcal{L} \tag{2.5}$$

导子是偶(奇)的，若 $|D|=0\quad(|D|=1)$。用 $\mathrm{Inn}(\mathcal{L},\mathcal{V})$ 表示内导子 v_{inn} 的集合，其中 $v_{\mathrm{inn}}:x\mapsto(-1)^{|v||x|}x\cdot v$。用 $H^1(\mathcal{L},\mathcal{V})$ 表示李代数 $\mathcal{L}$ 系数在 $\mathcal{L}$-模 $\mathcal{V}$ 上的一阶上同调群，则 $H^1(\mathcal{L},\mathcal{V})\cong\mathrm{Der}(\mathcal{L},\mathcal{V})/\mathrm{Inn}(\mathcal{L},\mathcal{V})$。$\mathbb{Z}^*$ 表示非零整数且 $\mathbb{Z}\setminus A=\{n\in\mathbb{Z},n\notin A\}$。对任意 $\lambda,\eta,\rho,\omega,\nu,\nu'\in\mathbb{C}$，我们可引入以下导子 $\mathcal{D}\in\mathrm{Der}(\mathcal{L},\mathcal{V})$

$$\mathcal{D}(L_0)\equiv0\equiv\mathcal{D}(I_0)，\quad \mathcal{D}(I_n)=2\nu(I_0\otimes I_n-I_n\otimes I_0)，\quad \forall n\in\mathbb{Z}^*，\quad m\in\mathbb{Z},$$

$$\mathcal{D}(G_m)=\nu(I_0\otimes G_m-G_m\otimes I_0)+\nu'(I_m\otimes G_0-G_0\otimes I_m)+\omega(I_0\otimes I_m-I_m\otimes I_0),$$

$$\mathcal{D}(L_n)=((2-n)\lambda+(n-1)\eta)I_n\otimes I_0+\left((n-2)\lambda+\frac{2-n}{2}\eta+\frac{n}{2}\rho\right)I_0\otimes I_n. \tag{2.6}$$

$\mathcal{D}(L_0)\equiv0$ 表示 $\mathcal{D}(L_0)\equiv0(\mathrm{mod}\,\mathbb{C}(I_0\otimes I_0))$，即 $\mathcal{D}(L_0)\in\mathbb{C}(I_0\otimes I_0)$。

3. 主要结果及证明过程

本文的主要结果可表述为以下两个定理。

定理 3.1： $H^1(\mathcal{L},\mathcal{V})\cong\mathbb{C}\mathcal{D}$。

定理 3.2： 李双代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是三角余边缘的当且仅当 $\lambda=\eta=\rho=\omega=\nu=\nu'=0$。

引理 3.1： 把 $\mathcal{L}$ 的 n 次张量积 $\mathcal{L}^{\otimes n}$ 看作 $\mathcal{L}$ 对角伴随作用下的 $\mathcal{L}$-模。如果对某个 $r\in\mathcal{L}^{\otimes n}$ 和任意 $x\in\mathcal{L}$，使得 $x\cdot r=0$，则 $r\in I_0^{\otimes n}$。

证明： 可运用文献[1] [5]相应结论的证明得到。

引理 3.2： 对所有 $x\in\mathcal{L}$，假设 $v\in\mathcal{V}$，使得 $x\cdot v\in\mathrm{Im}(1-\tau)$，则对某个 $c\in\mathbb{C}$，有 $v-cI_0\otimes I_0\in\mathrm{Im}(1-\tau)$。

证明： 可运用文献[6]中引理 3.2 的技巧得证。

定理 3.1： 由断言 1~4 得到。

断言 1： 如果 $n\in\mathbb{Z}^*$，则 $D_n\in\mathrm{Inn}(\mathcal{L},\mathcal{V})$。

证明： 首先记 $y=\dfrac{D_n(L_0)}{n}\in\mathcal{V}_n$，$\forall n\in\mathbb{Z}^*$。把 D_n 作用在 $[L_0,x_j]=-jx_j$ 上，再利用 $D_n(x_j)\in\mathcal{V}_{n+j}$，有 $D_n(x_j)=x_j\cdot\dfrac{D_n(L_0)}{n}=x_j\cdot y$，$\forall x_j\in\mathcal{L}_j$，从而 $D_n=y_{\mathrm{inn}}$ 为内导子。

断言 2： $D_0(L_0)\equiv0\equiv D_0(I_0)$。

证明： 把 D_0 作用在 $[L_0,x_j]=-jx_j$ 上，$\forall j\in\mathbb{Z}$，$x\in\mathcal{L}$，有 $x_j\cdot D_0(L_0)=0$。则由引理 3.1 可推出 $D_0(L_0)\equiv0$。

类似地，通过将 D_0 作用于 $[I_0,x]=0$ 上，有 $D_0(I_0)\equiv0$。

断言 3： 当 $D_0\in\mathrm{Der}^{\bar{0}}(\mathcal{L},\mathcal{V})$ 时，用 $D_0-u_{\mathrm{inn}}\quad(u\in\mathcal{V}_0)$代替 D_0，我们可假设 $D_0(\mathcal{L})=\mathcal{D}(\mathcal{L})$。

证明： 对 $\forall n\in\mathbb{Z}$， $D_0(L_n)$， $D_0(I_n)$ 和 $D_0(G_n)$ 如下所示

$$D_0(L_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(a_{n,i}L_i\otimes L_{n-i}+b_{n,i}L_i\otimes I_{n-i}+b_{n,i}^{\dagger}I_i\otimes L_{n-i}+c_{n,i}I_i\otimes I_{n-i}+e_{n,i}G_i\otimes G_{n-i}\right),$$

$$D_0(I_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\alpha_{n,i}L_i\otimes L_{n-i}+\beta_{n,i}L_i\otimes I_{n-i}+\beta_{n,i}^{\dagger}I_i\otimes L_{n-i}+\gamma_{n,i}I_i\otimes I_{n-i}+f_{n,i}G_i\otimes G_{n-i}\right),$$

$$D_0(G_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\mu_{n,i}L_i\otimes G_{n-i}+\mu_{n,i}^{\dagger}G_i\otimes L_{n-i}+\nu_{n,i}I_i\otimes G_{n-i}+\nu_{n,i}^{\dagger}G_i\otimes I_{n-i}\right),$$

其中，所有张量积的系数都在复数域 $\mathbb{C}$ 中，且它们的和是有限的。对于 $\forall n\in\mathbb{Z}$，下列恒等式成立，

$$L_1\cdot(L_n\otimes L_{-n})=(1-n)L_{n+1}\otimes L_{-n}+(1+n)L_n\otimes L_{1-n},$$

$$L_1\cdot(I_n\otimes I_{-n})=-nI_{n+1}\otimes I_{-n}+nI_n\otimes I_{1-n},\quad L_1\cdot(G_n\otimes G_{-n})=-nG_{n+1}\otimes G_{-n}+nG_n\otimes G_{1-n},$$

$$L_1\cdot(L_n\otimes I_{-n})=(1-n)L_{n+1}\otimes I_{-n}+nL_n\otimes I_{1-n},\quad L_1\cdot(I_n\otimes L_{-n})=-nI_{n+1}\otimes L_{-n}+(1+n)I_n\otimes L_{1-n},$$

用 D_0-u_{inn} 代替 D_0，其中 u 是 $L_p\otimes L_{-p}$， $L_p\otimes I_{-p}$， $I_p\otimes L_{-p}$， $I_p\otimes I_{-p}$ 和 $G_p\otimes G_{-p}$ （$p\in\mathbb{Z}$）的适当的线性组合，假设对任意 $i\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,2\}$，$j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,2\}$，$k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ 和 $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$，有 $a_{1,i}=b_{1,j}=b_{1,k}^{\dagger}=c_{1,m}=e_{1,m}=0$。则 $D_0(L_1)$ 化简为

$$\begin{aligned}D_0(L_1)=&a_{1,-1}L_{-1}\otimes L_2+a_{1,2}L_2\otimes L_{-1}+b_{1,0}L_0\otimes I_1+b_{1,2}L_2\otimes I_{-1}+b_{1,-1}^{\dagger}I_{-1}\otimes L_2\\&+b_{1,1}^{\dagger}I_1\otimes L_0+c_{1,0}I_0\otimes I_1+c_{1,1}I_1\otimes I_0+e_{1,0}G_0\otimes G_1+e_{1,1}G_1\otimes G_0\end{aligned}.$$

将 D_0 作用在 $[L_{-1},L_1]=-2L_0$ 上，有

$$a_{-1,i}=0,\quad \forall i\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,\pm1,0\},\quad a_{-1,-2}=-a_{1,-1}+\frac{1}{3}a_{-1,0},\quad a_{-1,1}=-a_{1,2}-\frac{1}{3}a_{-1,0},\tag{3.1}$$

$$b_{-1,i_1}=b_{-1,i_2}^{\dagger}=c_{-1,i_3}=e_{-1,i_3}=0,\quad \forall i_1\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0\},\quad i_2\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0\},\quad i_3\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},$$

$$b_{1,0}=b_{1,2}=b_{1,-1}^{\dagger}=b_{1,1}^{\dagger}=0,\quad b_{-1,0}=-2b_{-1,-1}=-2b_{-1,1},\quad b_{-1,-1}^{\dagger}=-2b_{-1,-2}^{\dagger}=-2b_{-1,0}^{\dagger}.$$

从而，进一步得到 $D_0(L_{\pm1})$ 的简化式如下

$$\begin{aligned}D_0(L_{-1})=&a_{-1,-2}L_{-2}\otimes L_1+a_{-1,0}(-L_{-1}\otimes L_0+L_0\otimes L_{-1})+a_{-1,1}L_1\otimes L_{-2}\\&+b_{-1,-1}(L_{-1}\otimes I_0-2L_0\otimes I_{-1}+L_1\otimes I_{-2})\\&+b_{-1,0}^{\dagger}(I_{-2}\otimes L_1-2I_{-1}\otimes L_0+I_0\otimes L_{-1})\\&+c_{-1,-1}I_{-1}\otimes I_0+c_{-1,0}I_0\otimes I_{-1}+e_{-1,-1}G_{-1}\otimes G_0+e_{-1,0}G_0\otimes G_{-1}\end{aligned},$$

$$D_0(L_1)=a_{1,-1}L_{-1}\otimes L_2+a_{1,2}L_2\otimes L_{-1}+c_{1,0}I_0\otimes I_1+c_{1,1}I_1\otimes I_0+e_{1,0}G_0\otimes G_1+e_{1,1}G_1\otimes G_0.$$

将 D_0 作用在 $[L_{-2},L_1]=-3L_{-1}$ 上，结合(3.1)得

$$a_{-1,1}=-\frac{1}{3}a_{-1,0},\quad 2a_{-2,-1}+3a_{-2,0}-3a_{-1,0}=0,\quad a_{-2,0}+4a_{-2,1}-3a_{-1,1}=0,\tag{3.2}$$

$$a_{-1,-2}=\frac{1}{3}a_{-1,0},\quad 4a_{-2,-3}+a_{-2,-2}-3a_{-1,-2}=0,\quad 3a_{-2,-2}+2a_{-2,-1}+3a_{-1,0}=0.\tag{3.3}$$

将 D_0 作用在 $[L_{-1},L_2]=-3L_1$ 上，有

$$a_{-1,0}=a_{2,-1}-a_{2,3}=a_{2,0}+4a_{2,3}=a_{2,1}-6a_{2,3}=a_{2,2}+4a_{2,3}=a_{2,i}=b_{2,i_1}=b_{2,i_2}^{\dagger}=c_{2,i_3}=e_{2,i_3}=0,$$

$$\forall i\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0,2,3\},\quad i_1\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0,2,3\},\quad i_2\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0,2,3\},\quad i_3\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,2\},$$

此时，由(3.2)和(3.3)得

$$b_{2,0}+3b_{2,-1}=b_{2,3}-b_{-1,-1}=b_{2,1}-3b_{2,-1}-b_{-1,-1}=3b_{2,2}+b_{2,1}+5b_{-1,-1}=0, \tag{3.4}$$

$$3b^{\dagger}_{2,3}+b^{\dagger}_{2,2}=b^{\dagger}_{2,-1}-b^{\dagger}_{-1,0}=b^{\dagger}_{2,1}+3b^{\dagger}_{2,0}+5b^{\dagger}_{-1,0}=-3b^{\dagger}_{2,3}+b^{\dagger}_{2,1}-b^{\dagger}_{-1,0}=0. \tag{3.5}$$

将 D_0 作用在 $\left[L_{-2},L_2\right]=-4L_0$ 上，结合(3.4)和(3.5)得，则有

$$a_{2,3}+a_{-2,1}=c_{2,1}+c_{-2,-1}=e_{2,1}+e_{-2,-1}=0,$$

$$b_{2,-1}=b_{-2,0}=0,\quad b_{-2,-1}=-3b_{2,1}=-3b_{-1,-1},\quad b_{-2,-2}=-b_{2,2}=2b_{-1,-1},\quad b_{-2,1}=b_{-1,-1},$$

$$b^{\dagger}_{-2,-2}=b^{\dagger}_{2,3}=0,\quad b^{\dagger}_{-2,-1}=-3b^{\dagger}_{2,1}=-3b^{\dagger}_{-1,0},\quad b^{\dagger}_{-2,0}=-b^{\dagger}_{2,0}=2b^{\dagger}_{-1,0},\quad b^{\dagger}_{-2,-3}=b^{\dagger}_{-1,0}.$$

记 $u_1=L_1\otimes L_{-1}-2L_0\otimes L_0+L_{-1}\otimes L_1$，$u_2=L_1\otimes I_{-1}-L_0\otimes I_0$，$u_3=I_{-1}\otimes L_1-I_0\otimes L_0$，用 $D_0-a_{2,3}\left(u_1\right)_{\text{inn}}-b_{-1,-1}\left(u_2\right)_{\text{inn}}-b^{\dagger}_{-1,0}\left(u_3\right)_{\text{inn}}$ 代替 D，有 $a_{2,3}=b_{-1,-1}=b^{\dagger}_{-1,0}=0$。则有

$$D_0\left(L_{\pm1}\right)=c_{\pm1,0}I_0\otimes I_{\pm1}+c_{\pm1,\pm1}I_{\pm1}\otimes I_0+e_{\pm1,0}G_0\otimes G_{\pm1}+e_{\pm1,\pm1}G_{\pm1}\otimes G_0,$$

$$D_0\left(L_{\pm2}\right)=c_{\pm2,0}I_0\otimes I_{\pm2}\pm c_{2,1}I_{\pm1}\otimes I_{\pm1}+c_{\pm2,\pm2}I_{\pm2}\otimes I_0+e_{\pm2,0}G_0\otimes G_{\pm2}\pm e_{2,1}G_{\pm1}\otimes G_{\pm1}+e_{\pm2,\pm2}G_{\pm2}\otimes G_0.$$

且系数满足以下关系式

$$c_{-1,-1}+c_{-1,0}+c_{1,0}+c_{1,1}=c_{-2,-2}+c_{-2,0}+c_{2,0}+c_{2,2}=2c_{2,0}+c_{2,1}+c_{-1,0}-3c_{1,0}=0,$$

$$2c_{2,2}+c_{2,1}+c_{-1,-1}-3c_{1,1}=2c_{-2,0}-c_{2,1}+c_{1,0}-3c_{-1,0}=2c_{-2,-2}-c_{2,1}+c_{1,1}-3c_{-1,-1}=0.$$

将 D_0 作用在 $\left[L_{-1},I_1\right]=-I_0$ 上，有

$$\alpha_{1,i}=\beta_{1,i_1}=\beta^{\dagger}_{1,i_2}=\gamma_{1,i_3}=f_{1,i_3}=\alpha_{1,1}+3\alpha_{1,2}=\alpha_{1,0}-3\alpha_{1,2}=\alpha_{1,-1}+\alpha_{1,2}=0,$$

$$\forall i\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0,2\},\quad i_1\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,0\},\quad i_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,2\},\quad i_3\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\},$$

$$\beta_{1,0}=-2\beta_{1,-1}=-2\beta_{1,1},\quad \beta^{\dagger}_{1,1}=-2\beta^{\dagger}_{1,0}=-2\beta^{\dagger}_{1,2},\quad \gamma_{1,0}+\gamma_{1,1}=f_{1,0}+f_{1,1}=0.$$

将 D_0 作用在 $\left[L_1,I_{-1}\right]=I_0$ 上，同理有

$$\begin{aligned}D_0\left(I_{-1}\right)=&\alpha_{-1,1}\left(-L_{-2}\otimes L_1+3L_{-1}\otimes L_0-3L_0\otimes L_{-1}+L_1\otimes L_{-2}\right)\\&+\beta_{-1,1}\left(L_{-1}\otimes I_0-2L_0\otimes I_{-1}+L_1\otimes I_{-2}\right)\\&+\beta^{\dagger}_{-1,0}\left(I_{-2}\otimes L_1-2I_{-1}\otimes L_0+I_0\otimes L_{-1}\right)\\&+\gamma_{-1,-1}\left(I_{-1}\otimes I_0-I_0\otimes I_{-1}\right)+f_{-1,-1}\left(G_{-1}\otimes G_0-G_0\otimes G_{-1}\right)\end{aligned}.$$

将 D_0 作用在 $\left[L_2,I_{-1}\right]=I_1$ 上，有

$$\alpha_{-1,1}=\alpha_{1,2}=\beta_{-1,1}=\beta_{1,1}=\beta^{\dagger}_{-1,0}=\beta^{\dagger}_{1,2}=0,\quad \gamma_{1,0}+\gamma_{-1,-1}=f_{1,0}+f_{-1,-1}=0.$$

此时，$D_0\left(I_{\pm1}\right)=\gamma_{1,0}\left(I_0\otimes I_{\pm1}-I_{\pm1}\otimes I_0\right)+f_{1,0}\left(G_0\otimes G_{\pm1}-G_{\pm1}\otimes G_0\right)$。

将 D_0 作用在 $\left[L_1,G_0\right]=0$ 和 $\left[L_{-1},G_0\right]=0$ 上，可得

$$D_0\left(G_0\right)=\nu_{0,0}I_0\otimes G_0+\nu^{\dagger}_{0,0}G_0\otimes I_0,$$

$$D_0\left(L_{\pm1}\right)=c_{\pm1,0}I_0\otimes I_{\pm1}+c_{\pm1,\pm1}I_{\pm1}\otimes I_0.$$

将 D_0 作用在 $\left[I_{-1},G_1\right]=0$ 和 $\left[I_1,G_{-1}\right]=0$ 上，分别有以下系数关系式

$$\mu_{1,1}=\mu^{\dagger}_{1,-1}=-\mu_{1,2}=-\mu^{\dagger}_{1,0}=f_{1,0},\quad \mu_{1,i_1}=\mu^{\dagger}_{1,i_2}=0,\quad \forall i_1\in\mathbb{Z}\setminus\{1,2\},\quad i_2\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},$$

$$\mu_{-1,-2}=\mu^{\dagger}_{-1,0}=-\mu_{-1,-1}=-\mu^{\dagger}_{-1,1}=f_{1,0}，\quad \mu_{-1,i_3}=\mu^{\dagger}_{-1,i_4}=0，\quad \forall i_3\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1\}，\quad i_4\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}.$$

将 D_0 作用在 $[L_1,G_{-1}]=G_0$ 和 $[L_{-1},G_1]=-G_0$ 上，我们可以推导出

$$f_{1,0}=\nu_{1,i_1}=\nu^{\dagger}_{1,i_1}=\nu_{1,1}+\nu_{1,0}-\nu_{0,0}=\nu^{\dagger}_{1,1}+\nu^{\dagger}_{1,0}-\nu^{\dagger}_{0,0}=0，\quad \forall i_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\},$$

$$\nu_{-1,i_2}=\nu^{\dagger}_{-1,i_2}=\nu_{-1,-1}+\nu_{-1,0}-\nu_{0,0}=\nu^{\dagger}_{-1,-1}+\nu^{\dagger}_{-1,0}-\nu^{\dagger}_{0,0}=0，\quad \forall i_2\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}.$$

且有 $D_0(I_{\pm1})=\gamma_{1,0}(I_0\otimes I_{\pm1}-I_{\pm1}\otimes I_0)$。

将 D_0 作用在 $[L_2,G_{-1}]=G_1$ 和 $[L_{-2},G_1]=-G_{-1}$ 上，可得 $e_{2,0}=e_{2,1}=e_{2,2}=0$，

从而有 $D_0(L_{\pm2})=c_{\pm2,0}I_0\otimes I_{\pm2}\pm c_{2,1}I_{\pm1}\otimes I_{\pm1}+c_{\pm2,\pm2}I_{\pm2}\otimes I_0$。

将 D_0 作用在 $[G_{-1},G_1]=I_0$ 上，有

$$D_0(G_0)=\nu_{0,0}(I_0\otimes G_0-G_0\otimes I_0),$$

$$D_0(G_{\pm1})=\nu_{1,0}(I_0\otimes G_{\pm1}-G_{\pm1}\otimes I_0)+\nu_{1,1}(I_{\pm1}\otimes G_0-G_0\otimes I_{\pm1})。$$

且满足 $\nu_{0,0}=\nu_{1,0}+\nu_{1,1}$，$\gamma_{1,0}=2\nu_{1,0}$。

根据以下记法：$c_{1,1}=\lambda$，$c_{2,0}=\eta$，$c_{2,1}=\kappa$，$c_{2,2}=\rho$，$\nu_{1,0}=\nu$，$\nu_{1,1}=\nu'$，利用数学归纳法，并考虑(1.1)中所有的李括号可得

$$D_0(L_0)\equiv0\equiv D_0(I_0)，\quad D_0(I_n)=2\nu(I_0\otimes I_n-I_n\otimes I_0),$$

$$D_0(L_n)=((2-n)\lambda+(n-1)\eta)I_n\otimes I_0+\left((n-2)\lambda+\frac{2-n}{2}\eta+\frac{n}{2}\rho\right)I_0\otimes I_n,$$

$$D_0(G_m)=\nu(I_0\otimes G_m-G_m\otimes I_0)+\nu'(I_m\otimes G_0-G_0\otimes I_m)，\quad \forall n\in\mathbb{Z}^*，\quad m\in\mathbb{Z}.$$

断言 4：当 $D_0\in\mathrm{Der}^{\bar{1}}(\mathcal{L},\mathcal{V})$ 时，用 D_0-u_{inn} $(u\in\mathcal{V}_0)$代替 D_0，我们可假设 $D_0(\mathcal{L})=\mathcal{D}(\mathcal{L})$。

证明：对 $\forall n\in\mathbb{Z}$，$D_0(L_n)$，$D_0(I_n)$ 和 $D_0(G_n)$ 如下所示

$$D_0(L_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(a_{n,i}L_i\otimes G_{n-i}+a^{\dagger}_{n,i}G_i\otimes L_{n-i}+b_{n,i}I_i\otimes G_{n-i}+b^{\dagger}_{n,i}G_i\otimes I_{n-i}\right),$$

$$D_0(I_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\alpha_{n,i}L_i\otimes G_{n-i}+\alpha^{\dagger}_{n,i}G_i\otimes L_{n-i}+\beta_{n,i}I_i\otimes G_{n-i}+\beta^{\dagger}_{n,i}G_i\otimes I_{n-i}\right),$$

$$D_0(G_n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\mu_{n,i}L_i\otimes L_{n-i}+\nu_{n,i}L_i\otimes I_{n-i}+\nu^{\dagger}_{n,i}I_i\otimes L_{n-i}+\omega_{n,i}I_i\otimes I_{n-i}+\lambda_{n,i}G_i\otimes G_{n-i}\right),$$

其中，所有张量积的系数都在复数域 $\mathbb{C}$ 中，且它们的和是有限的。对于 $\forall n\in\mathbb{Z}$，下列恒等式成立，

$$L_1\cdot(L_n\otimes G_{-n})=(1-n)L_{n+1}\otimes G_{-n}+nL_n\otimes G_{1-n}，\quad L_1\cdot(I_n\otimes G_{-n})=-nI_{n+1}\otimes G_{-n}+nI_n\otimes G_{1-n},$$

$$L_1\cdot(G_n\otimes L_{-n})=-nG_{n+1}\otimes L_{-n}+(n+1)G_n\otimes L_{1-n}，\quad L_1\cdot(G_n\otimes I_{-n})=-nG_{n+1}\otimes I_{-n}+nG_n\otimes I_{1-n}.$$

用 D_0-u_{inn} 代替 D_0，其中 u 是 $L_p\otimes G_{-p}$，$G_p\otimes L_{-p}$，$I_p\otimes G_{-p}$ 和 $G_p\otimes I_{-p}$ 的适当的线性组合，$\forall p\in\mathbb{Z}$，假设对于任意 $i\in\mathbb{Z}\setminus\{0,2\}$，$j\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ 和 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$，有 $a_{1,i}=a^{\dagger}_{1,i}=b_{1,k}=b^{\dagger}_{1,k}=0$。则 $D_0(L_1)$ 可写成

$$\begin{aligned}D_0(L_1)=&\,a_{1,0}L_0\otimes G_1+a_{1,2}L_2\otimes G_{-1}+a^{\dagger}_{1,-1}G_{-1}\otimes L_2+a^{\dagger}_{1,1}G_1\otimes L_0\\&+b_{1,0}I_0\otimes G_1+b_{1,1}I_1\otimes G_0+b^{\dagger}_{1,0}G_0\otimes I_1+b^{\dagger}_{1,1}G_1\otimes I_0\end{aligned}.$$

将 D_0 作用在 $[L_{-1},L_1]=-2L_0$ 上，记 $u_1=-L_0\otimes G_0+L_1\otimes G_{-1}$，$u_2=G_{-1}\otimes L_1-L_0\otimes G_0$，用 $D_0-a_{-1,-1}(u_1)_{\mathrm{inn}}-a^{\dagger}_{-1,0}(u_2)_{\mathrm{inn}}$ 代替 D，可得

$$D_0(L_{\pm1})=b_{\pm1,0}I_0\otimes G_{\pm1}+b_{\pm1,\pm1}I_{\pm1}\otimes G_0+b^{\dagger}_{\pm1,0}G_0\otimes I_{\pm1}+b^{\dagger}_{\pm1,\pm1}G_{\pm1}\otimes I_0.$$

将 D_0 依次作用在 $[L_{-2},L_1]=-3L_{-1}$，$[L_{-1},L_2]=-3L_1$ 和 $[L_{-2},L_2]=-4L_0$ 上，我们可以推导出 $D_0(L_{\pm2})$ 如下

$$\begin{aligned}D_0(L_{\pm2}) &= b_{\pm2,0}I_0\otimes G_{\pm2}\pm b_{2,1}I_{\pm1}\otimes G_{\pm1}+b_{\pm2,\pm2}I_{\pm2}\otimes G_0\\ &\quad +b^{\dagger}_{\pm2,0}G_0\otimes I_{\pm2}\pm b^{\dagger}_{2,1}G_{\pm1}\otimes I_{\pm1}+b^{\dagger}_{\pm2,\pm2}G_{\pm2}\otimes I_0\end{aligned}.$$

且系数满足以下关系

$$2b^{\dagger}_{2,0}+b^{\dagger}_{2,1}+b^{\dagger}_{-1,0}-3b^{\dagger}_{1,0}=2b^{\dagger}_{2,2}+b^{\dagger}_{2,1}+b^{\dagger}_{-1,-1}-3b^{\dagger}_{1,1}=0\,, \tag{3.6}$$

$$2b_{2,0}+b_{2,1}+b_{-1,1}-3b_{1,0}=2b_{2,2}+b_{2,1}+b_{-1,-1}-3b_{1,1}=2b^{\dagger}_{-2,0}-b^{\dagger}_{2,1}+b^{\dagger}_{1,0}-3b^{\dagger}_{-1,0}=0 \tag{3.7}$$

$$2b_{-2,-2}-b_{2,1}+b_{1,1}-3b_{-1,-1}=2b_{-2,0}-b_{2,1}+b_{1,0}-3b_{-1,0}=2b^{\dagger}_{-2,-2}-b^{\dagger}_{2,1}+b^{\dagger}_{1,1}-3b^{\dagger}_{-1,-1}=0\,. \tag{3.8}$$

将 D_0 依次作用在 $[L_{-1},I_1]=-I_0$，$[L_1,I_{-1}]=I_0$ 和 $[L_2,I_{-1}]=I_1$ 上，我们可将 $D_0(I_{\pm1})$ 化简为

$$D_0(I_{\pm1})=\beta_{1,0}(I_0\otimes G_{\pm1}-I_{\pm1}\otimes G_0)+\beta^{\dagger}_{1,0}(G_0\otimes I_{\pm1}-G_{\pm1}\otimes I_0).$$

将 D_0 作用在 $[L_{\pm1},G_0]=0$ 和 $[I_{-1},G_0]=0$ 上，可得

$$D_0(G_0)=\omega_{0,0}I_0\otimes I_0+\lambda_{0,0}G_0\otimes G_0.$$

将 D_0 作用在 $[L_{\pm1},G_{\mp1}]=\pm G_0$ 和 $[L_2,G_{-1}]=G_1$ 上，再结合(3.6)~(3.8)，可以推导出

$$D_0(L_{\pm1})=D_0(L_{\pm2})=D_0(G_0)=0\,,$$

$$D_0(G_{\pm1})=\omega_{1,0}(I_0\otimes I_{\pm1}-I_{\pm1}\otimes I_0)+\lambda_{1,0}(G_0\otimes G_{\pm1}-G_{\pm1}\otimes G_0).$$

将 D_0 作用在 $[I_{-1},G_1]=0$ 上，有 $D_0(I_{\pm1})=0$。

将 D_0 作用在 $[G_{-1},G_1]=I_0$ 上，有 $D_0(G_{\pm1})=\omega_{1,0}(I_0\otimes I_{\pm1}-I_{\pm1}\otimes I_0)$。

根据以下记法：$\omega_{1,0}=\omega$，利用数学归纳法，并考虑(1.1)所有李括号可推导出

$$D_0(G_0)=D_0(L_m)=D_0(I_m)=0\,,\quad D_0(G_n)=\omega(I_0\otimes I_n-I_n\otimes I_0)\,,\quad \forall m\in\mathbb{Z}\,,\quad n\in\mathbb{Z}^*.$$

则定理 3.1 最终由归纳法 $\mathcal{D}=D_0$ 可证得。

设 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是 $\mathcal{L}$ 上的超李双代数结构。由定理 3.1 得，在(2.6)中提到对某个 $r\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$，有 $\Delta=\Delta_r$ 当且仅当 $\lambda=\eta=\rho=\omega=\nu=\nu'=0$。结合 $\operatorname{Im}\Delta\subset\operatorname{Im}(1-\tau)$ 和引理 3.2，可以推导出对某个 $c\in\mathbb{C}$，有 $r-cI_0\otimes I_0\in\operatorname{Im}(1-\tau)$，则引理 3.1 得出 $\mathbf{c}(r)\in\mathbb{C}I_0\otimes I_0$。因此，$(\mathcal{L},[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是一个三角余边缘的超李双代数当且仅当 $\lambda=\eta=\rho=\omega=\nu=\nu'=0$。故定理 3.2 得证。

参考文献

[1] Drinfeld, V.G. (1983) Constant Quasiclassical Solutions of the Yang-Baxter Quantum Equation. *Soviet Mathematics Doklady*, **28**, 667-671.

[2] Belavin, A.A. and Drinfeld, V.G. (1982) Solutions of the Classical Yang-Baxter Equation for Simple Lie Algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, **16**, 159-180. https://doi.org/10.1007/BF01081585

[3] Michaelis, W. (1994) A Class of Infinite-Dimensional Lie Bialgebras Containing the Virasoro Algebras. *Advances in Mathematics*, **107**, 365-392. https://doi.org/10.1006/aima.1994.1062

[4] Taft, E.J. (1993) Witt and Virasoro Algebras as Lie Bialgebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **87**, 301-312. https://doi.org/10.1016/0022-4049(93)90116-B

[5] Ng, S.H. and Taft, E.J. (2000) Classification of the Lie Bialgebra Structures on the Witt and Virasoro Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151**, 67-88. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00045-6

[6] Han, J.Z., Li, J.B. and Su, Y.C. (2009) Lie Bialgebra Structures on the Schrödinger-Virasoro Lie Algebra. *Journal of*

Mathematical Physics, **50**, Article ID: 083504. https://doi.org/10.1063/1.3187784

[7] Song, G.A. and Su, Y.C. (2006) Lie Bialgebras of Generalized Witt Type. *Science in China*: *Series A*, **49**, 533-544. https://doi.org/10.1007/s11425-006-0533-7

[8] Wu, Y.Z., Song, G.A. and Su, Y.C. (2006) Lie Bialgebras of Generalized Virasoro-Like Type. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **22**, 1915-1922. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0742-y