

# Series Theory of Heterogeneous Complex Variable Function

Yanhui Yang<sup>1</sup>, Yujie Jiang<sup>1</sup>, Jicheng Tao<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Information and Computer Sciences, China Jiliang University, Hangzhou Zhejiang

<sup>2</sup>Department of Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou Zhejiang

Email: yyh0831@163.com, 1059530837@qq.com, jchtaofd@sina.com

Received: Jan. 30<sup>th</sup>, 2020; accepted: Feb. 12<sup>th</sup>, 2020; published: Feb. 19<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, the series theory of complex variable function is applied to heterogeneous complex variable function. The convergence region and the radius of convergence ellipse of heterogeneous power series are established by using the theory of heterogeneous analytic function. At the same time, the Taylor's theorem of heterogeneous analytic function is established by using the heterogeneous Cauchy integral formula and the high order derivative formula of Cauchy integral.

## Keywords

Heterogeneous Power Series, Radius of Convergence Ellipse, Taylor's Theorem of Heterogeneous Analytic Function

---

# 非均匀复变函数的级数理论

杨彦晖<sup>1</sup>, 江宇婕<sup>1</sup>, 陶继成<sup>2</sup>

<sup>1</sup>中国计量大学信息科学系, 浙江 杭州

<sup>2</sup>中国计量大学应用数学系, 浙江 杭州

Email: yyh0831@163.com, 1059530837@qq.com, jchtaofd@sina.com

收稿日期: 2020年1月30日; 录用日期: 2020年2月12日; 发布日期: 2020年2月19日

---

## 摘要

本文把复变函数的级数理论[1] [2] [3]推广到非均匀复变函数上, 运用非均匀解析函数理论建立了非均匀幂级数的收敛域和收敛椭圆半径, 同时利用非均匀Cauchy积分公式和Cauchy积分的高阶导数公式建立了非均匀解析函数的泰勒定理。

## 关键词

非均匀幂级数, 收敛椭圆半径, 非均匀泰勒定理

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

作者们在文献[4] [5]推广了复变函数理论, 建立了非均匀复变函数理论, 给出了非均匀复数域, 非均匀解析函数和非均匀积分的定义, 在此基础上建立了非均匀拉普拉斯方程与非均匀 Cauchy-Riemann 方程组的关系, 获得了非均匀 Cauchy 积分定理, Cauchy 积分公式。随后在文献[6]中建立了非均匀拉普拉斯方程与非均匀解析函数的关系。因此本文利用复变函数[4] [5]中的理论推广文献[1] [2] [3]的级数理论, 建立非均匀级数理论, 另外, 该论文的后续研究工作可以进一步研究有关非均匀复变函数理论的可视化问题[3]。

## 2. 预备知识

下面给出非均匀复数、非均匀复变函数的一些基本定义及性质, 具体参考文献[4] [5]。

### 2.1. 非均匀复数的定义

本文考虑到复数在各个领域的广泛应用, 我们对复数单位做进一步推广, 定义非均匀复数。

定义集合  $C_k = \{z | z = a + jb\}$ , 其中  $a, b$  为实数  $R$ ,  $j^2 = -k, k \geq 0$ 。

在  $C_k$  中引入数乘

$$z = a + jb, z \in C_k, m \in R, mz = ma + jmb,$$

在  $C_k$  中引入加法

$$z_1 = a_1 + jb_1, z_2 = a_2 + jb_2, z_1 \in C_k, z_2 \in C_k, \\ z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

**定理 2.1. [4]:** 在上式数乘和加法运算下,  $C_k$  为  $R$  上的一个线性空间。

**定理 2.2. [4]:** 在上面的数乘、加法和乘法运算下,  $C_k$  为  $R$  上的一个域, 称为非均匀复数域。

### 2.2. 非均匀复变函数的定义及性质

非均匀复变函数的定义, 类似于复变函数的定义, 形式上和数学分析中函数定义相同, 此时自变量和函数的取值均为新定义的非均匀复数。在定义函数之前, 根据复平面点集的几个基本概念, 我们可以推广到非均匀复平面上。

**定义 2.3.** 由  $|z - z_0| < \rho$  由不等式所确定的平面点集(简称点集), 就是以  $z_0$  为圆心, 以  $\rho$  为半径的圆, 称为点  $z_0$  的  $\rho$ -邻域。

**注 2.4.** 考虑点集  $E$ , 同样也有聚点或极限点、孤立点、外点、闭集、内点、开集、边界点、边界的概念, 与复变平面定义相同, 在此不再一一赘述。

**定义 2.5.** 设  $f$ : 从  $C_K$  到  $C_K$  的映射, 则称为  $f$  为  $C_K$  上的非均匀复函数。

非均匀函数的导数, 解析的定义及与偏微分方程组的关系在文献[1]中给出, 下面直接给出结论不予证明:

**定义 2.6.** 设函数  $w = f(z)$  在点  $z_0$  的邻域内或者包含  $z_0$  的区域  $D$  内有定义, 考虑比值

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (\Delta z \neq 0)$$

如果当  $z$  按照任意方式趋于  $z_0$  时, 即当  $\Delta z$  按照任意方式趋于 0 时, 比值  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  的极限都存在, 且其值有限, 则称此极限为函数  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 并记为  $f'(z_0)$ , 即

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

这时称函数  $f(z)$  于点  $z_0$  可导。

**定义 2.7.** 如果函数  $w = f(z)$  在区域  $D$  内可微, 则称  $f(z)$  为区域  $D$  内的解析函数, 或称函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析。函数在某点解析, 是指在该点的某一个邻域内是解析的: 函数在某个闭域解析, 是指在包含该闭域的某区域内解析。

**定理 2.8. [4] [5]:** 设函数  $f(z) = p(x, y) + jq(x, y)$  在区域  $D$  内解析, 则

- 1) 偏微分  $p_x, p_y, q_x, q_y$  在区域  $D$  内连续;
- 2)  $p(x, y), q(x, y)$  在区域  $D$  内满足非均匀 C.-R. 方程。

这也是可微的充要条件。

其中非均匀 C.-R. 方程为:  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$ 。

### 2.3. 非均匀复变函数的积分

非均匀复变函数的积分见文献[5]。

**定义 2.9.** 设非均匀复数域  $Z_k$  上的有向曲线  $C$ :

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

以  $a = z(\alpha)$  为起点,  $b = z(\beta)$  为终点,  $f(z)$  沿  $C$  有定义, 顺着  $C$  从  $a$  到  $b$  的方向在  $C$  上取分点:  $a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ , 这样可以将曲线  $C$  划分为  $n$  个弧段, 在从  $z_{i-1}$  到  $z_i$  的每一个弧段上任取一点  $\xi_i$ , 那么

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta z_i, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

当分点增多时, 弧段逐渐加细, 如果和数  $S_n$  极限存在且为  $S$ , 则称  $f(z)$  沿  $C$  (从  $a$  到  $b$ ) 可积,  $S$  为其上的积分, 记号为  $\int_C f(z) dz$ , 其中  $C$  为积分路径。

**定理 2.10. [5]:** 若函数  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  沿曲线  $C$  连续, 则该函数沿曲线  $C$  可积, 且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - kv dy + j \int_C v dx + u dy.$$

**定理 2.11. [5]:** 设有非均匀复数域  $C_K$  上的光滑曲线  $C_j: z = z(t) = x(t) + jy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ ,  $z'(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续且有不为零的导数  $z'(t) = x'(t) + jy'(t)$ ,  $f(z)$  沿  $C$  连续, 令

$f[z(t)] = u[x(t), y(t)] + jv[x(t), y(t)] = u(t) + jv(t)$ , 则有  $\int_C f(z) dz = \int_a^\beta f[z(t)z'(t)] dt$ 。

**定理 2.12. [5]:** 设函数  $f(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  上的单连通区域  $D$  内解析,  $C_j$  为  $D$  内任一条周线, 且则有  $\int_{C_j} f(z) dz = 0$ 。

**定理 2.13. [5]:** 设函数  $f(z)$  在  $z$  平面上的单连通区域  $D$  内解析, 则由

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \begin{pmatrix} \text{定点 } z_0 \in D \\ \text{动点 } z \in D \end{pmatrix}$$

定义的函数  $F(z)$  在  $D$  内解析, 且  $F'(z) = f(z)$ , 其中,  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ ,  $z_0$  为  $C_K$  上固定点。

**定理 2.14. [5]:** 设区域  $D$  的边界是非均匀复数域  $C_K$  上周线(复周线)  $C_j$ , 函数  $f(z)$  在  $D$  内解析, 在  $\bar{D} = D + C_j$  上连续, 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (z \in D).$$

### 3. 非均匀复级数理论文

#### 3.1. 非均匀复数项级数基本性质

**定义 3.1.** 设  $C_K$  是非均匀复数域,  $\xi_i \in C_K, i=1,2,\dots$ , 我们称下面的级数为非均匀复数项无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i + \dots \quad (3.1)$$

记  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  若非均匀复数列  $S_n (n=1,2,\dots)$  存在有限极限  $S$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 。

则称非均匀复数项无穷级数(3.1)收敛, 且称  $S$  为级数(3.1)的和, 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

若非均匀复数列  $S_n (n=1,2,\dots)$  没有极限, 则称非均匀级数(3.1)为发散。

类似于[2]的证明, 我们有下面的定理:

**定理 3.2.** 设  $\xi_n = \xi_n^1 + j\xi_n^2, n=1,2,\dots$ ,  $\xi_n^1$  及  $\xi_n^2$  为实数, 则非均匀复级数(3.1)收敛于  $S = S_1 + jS_2$  ( $S_1, S_2$  为实数)的充要条件为: 实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^1$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$  分别收敛于  $S_1$  及  $S_2$ 。

为了更好地讨论非均匀级数收敛的一些判定准则, 我们提出下面非均匀模的概念:

设  $C_K$  是非均匀复数域, 在  $C_K$  上定义非均匀模  $|\bullet|_k$  若满足下面的关系,  $|\xi|_k = \sqrt{a^2 + kb^2}$ , 其中  $\xi = a + jb$ ,  $j^2 = -k$ 。

容易证明这样定义的模, 三角不等式成立。

**定理 3.3.** 非均匀复级数(3.1)收敛的充要条件为, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$ , 对于任意正整数  $p$ , 有下面不等式

$$|\xi_{n+1} + \xi_{n+2} + \dots + \xi_{n+p}|_k < \varepsilon。$$

由上面不等式可知非均匀收敛级数的通项必趋于零:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  并且非均匀收敛级数的各项必然有界。

**证明:** 令  $\xi_n = \xi_n^1 + j\xi_n^2 = \xi_n^1 + i\sqrt{k}\xi_n^2 = \xi_n^1 + i\eta_n$ , 其中  $\eta_n = \sqrt{k}\xi_n^2$ , 级数(3.1)的收敛性等价实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^1$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$  收敛, 也等价与实级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^1$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$  的收敛, 由文献[2]得可西判定准则, 从而获得定理 3.3。

**定理 3.4.** 若非均匀正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|_k$  收敛, 则非均匀级数(3.1)也收敛。

**证明:** 由定理 3.3 和三角不等式结论是非常明显的。

**定义 3.5.** 根据定理 3.4 可知: 若非均匀正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|_k$  收敛, 则原非均匀级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ , 则称其为非均匀级数绝对收敛; 不是绝对收敛的非均匀收敛级数, 称为非均匀条件收敛。

### 3.2. 一致非均匀收敛的非均匀复函数项级数

**定义 3.6.** 设下面的非均匀复变函数项级数的每一项在非均匀复数域  $C_K$  的子集  $E$  上都有定义

$$g_1(z) + g_2(z) + \dots + g_n(z) + \dots \tag{3.2}$$

且在  $E$  上存在一个非均匀复变函数  $g(z)$ , 且任意  $z \in E$ , 非均匀级数(3.2)均收敛于  $g(z)$ , 则称  $g(z)$  为非均匀级数(3.2)的和函数, 记为  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ 。

下面我们类似文献[2]给出一致收敛的定义:

**定义 3.7.** 对于非均匀级数(3.2), 如果在非均匀复数域  $C_K$  的集合  $E$  上存在一个非均匀复变函数  $g(z)$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时, 对任意的  $z \in E$ , 都有

$$|g(z) - S_n(z)|_k < \varepsilon,$$

则称非均匀级数(3.2)在  $E$  上一致收敛于  $g(z)$ 。

我们也有类似的柯西一致收敛准则:

**定理 3.8.** 非均匀级数(3.2)在非均匀复数域  $C_K$  的集合  $E$  上一致收敛于非均匀函数  $g(z)$  的充要条件是: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使当  $n > N$  时, 对任意的  $z \in E$ , 都有

$$|g_{n+1}(z) + g_{n+2}(z) + \dots + g_{n+p}(z)|_k < \varepsilon, (p = 1, 2, \dots).$$

由这个准则, 可得出一致收敛的优级数准则:

如果存在一列与  $z$  无关的正项数列  $M_n (n = 1, 2, \dots)$ , 使对任意的  $z \in E$ , 有

$$|g_n(z)|_K \leq M_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛, 则非均匀复函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  的集合  $E$  上绝对收敛且一致收敛:

我们称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  为非均匀复函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  的优级数。

利用数学分析知识不难获得下面的定理:

**定理 3.9.** 设非均匀复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  一致收敛到  $g(z)$ , 且  $g_n(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  的集合  $E$  上连续, 则和函数  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  也在  $E$  上连续。

**定理 3.10.** 设非均匀复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  一致收敛到  $g(z)$ , 且  $g_n(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  的集合  $E$  上连续, 则有下面交换运算:

$$\int_{C_k} g(z) dz = \int_{C_k} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) dz.$$

**定义 3.11.** 设非均匀复变函数  $g_n(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  的区域  $D$  内有定义, 若级数(3.2)在  $D$  内任一有界闭集上一致收敛, 则称此级数在  $D$  内内闭一致收敛。

**定理 3.12.** 非均匀复数项级数(3.2)在  $T:|z-a|_k < R$  内内闭一致收敛的充要条件是任意正数  $\rho$ , 只要  $\rho < R$ , 级数(3.2)在椭圆闭域  $T_\rho:|z-a|_k \leq \rho$  上一致收敛。

**证明:** 必要性由定义 3.11 直接获得, 充分性  $T:|z-a|_k < R$  内的任意闭集  $K$ , 存在充分接近正数  $R$  的正数  $\rho$  使得  $\rho < R$ , 使得  $T_\rho:|z-a|_k \leq \rho$  且  $K \subset T_\rho$ , 级数(3.2)在  $T_\rho:|z-a|_k \leq \rho$  上一致收敛, 由定义 3.2, 级数(3.2)在  $K$  上一致收敛, 由定义 3.11, 在  $T:|z-a|_k < R$  内内闭一致收敛。

**定理 3.13.** 设非均匀复数项级数的各项  $g_n(z)$  在非均匀复数域  $C_K$  的区域  $D$  内非均匀解析且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  在  $D$  内内闭一致收敛于非均匀复变函数  $g(z)$ : 即

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z),$$

则: 1)非均匀复变函数  $g(z)$  在区域  $D$  内非均匀解析;

$$2) g^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(p)}(z), p = 1, 2, \dots。$$

**证明:** 1) 在区域  $D$  内任取一点  $z_0$ , 必存在正数  $\rho$ , 使得  $T_\rho:|z-a|_k \leq \rho$  在区域  $D$  内, 设  $C$  是  $T_\rho$  内任意一条闭曲线, 而函数  $g_n(z)$  在  $C$  内非均匀解析, 在  $C$  上连续, 由定理 2.12, 我们有  $\int_C g_n(z)dz = 0$ , 如

是有  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_C g_n(z)dz = 0$ , 由定理 3.10,  $\int_C g(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C g_n(z)dz = 0$  运用文献[5]中的定理 4.5, 可以得到莫雷拉定理  $g(z)$  在  $C$  内非均匀解析, 由  $C$  的任意性,  $g(z)$  在  $T_\rho$  内非均匀解析, 因此  $g(z)$  在区域  $D$  内非均匀解析。

2) 利用高阶导数的非均匀 Cauchy 积分公式(文献[5]定理 4.8)和等式  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ , 结论是显然的。

### 3.3. 非均匀幂级数敛散性

设  $c_0, c_1, c_2, \dots$  和  $a$  是非均匀复常数, 我们称下面的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \tag{3.3}$$

为非均匀幂级数。

我们类似文献[2]有下面的阿贝尔定理:

**定理 3.14.** 如果非均匀幂级数(3.3)在点  $z_1(z_1 \neq a)$  收敛, 则它必在椭圆域  $|z-a|_k < |z_1-a|_k$  内绝对收敛且内闭一致收敛到非均匀解析函数。

**证明:** 非均匀幂级数(3.3)在点  $z_1(z_1 \neq a)$  收敛, 因此存在正数  $M$ , 使得  $|c_n(z_1-a)^n|_K < M$ ,

$$\left| c_n(z-a)^n \right|_K \leq \left| c_n(z_1-a)^n \right|_K \frac{\left| (z-a)^n \right|_K}{\left| (z_1-a)^n \right|_K} < M \frac{\left| (z-a)^n \right|_K}{\left| (z_1-a)^n \right|_K},$$

因此, (3.3)在椭圆域  $T:|z-a|_k < |z_1-a|_k$  内绝对收敛。

任取正数  $\rho < |z_1-a|_k$ , 于是任意在区域  $T_\rho:|z-a|_k < \rho$  中的元素  $z$ , 我们有

$$\left| c_n(z-a)^n \right|_K \leq \left| c_n(z_1-a)^n \right|_K \frac{\left| \rho^n \right|_K}{\left| (z_1-a)^n \right|_K} < M \frac{\left| \rho^n \right|_K}{\left| (z_1-a)^n \right|_K}$$

由定理 3.12, (3.3)在椭圆域  $|z-a|_k < |z_1-a|_k$  内内闭一致收敛到非均匀解析函数。

下面利用阿贝尔定理给出收敛椭圆半径  $R$  的求法, 即, 柯西 - 阿达马(Cauchy-Hadamard)公式, 其中收敛椭圆半径  $R$  定义为: 若非均匀幂级数(3.3)在椭圆域  $T: |z-a|_k = \sqrt{(x-m)^2 + k(y-n)^2} < R$  内内闭一致收敛, 在  $|z-a|_k = \sqrt{(x-m)^2 + k(y-n)^2} > R$  内发散, 这里  $z = x + jy, a = m + jn, j^2 = -k$ 。

**定理 3.15.** 若非均匀幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的系数  $c_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|_k = l$  (达朗贝尔(d'Alembert))或

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|c_n|_k} = \frac{1}{l}$  (柯西)或  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|c_n|_k} = \frac{1}{l}$  (柯西 - 阿达马)则幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的收敛椭圆半径

$$R = \begin{cases} l, & 0 < l < +\infty \\ +\infty, & l = +\infty \\ 0, & l = 0 \end{cases} .$$

**证明:** 我们只证第一种情况, 其他情况好数学分析的证明方式一样, 在此省略。令  $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ ,

于是  $\left| \frac{f_n(z)}{f_{n+1}(z)} \right|_k = \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|_k \left| \frac{1}{z-a} \right|_k$ 。

当  $n$  很大时,  $\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|_k$  很接近  $l$ , 定义椭圆域  $K_l: |z-a|_k < l$ , 则任取一点  $z_0 \in K_l$ , 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  是收敛的, 由阿贝尔定理可以知道在  $|z-a|_k < |z_0-a|_k$  每点都内闭且一致收敛, 由  $z_0$  的任意性, 以及在  $|z-a|_k > l$  的发散性, 得收敛椭圆半径为  $l$ 。

结合定理 3.13, 3.14 和 3.15, 我们可得下面非均匀幂级数和的解析性:

**定理 3.16.** 非均匀幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  在其收敛椭圆域  $T: |z-a|_k < R$  内绝对且内闭一致收敛到解析函数  $g(z)$ , 即

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.4}$$

而且在  $T$  内, 幂级数(3.4)可以逐项求导, 即

$$g^{(p)}(z) = c_p p! + c_{p+1} (p+1)P(p-1) \cdots 2(z-a) + \cdots + c_n n(n-1) \cdots (n-p+1)(z-a)^p + \cdots \tag{3.5}$$

同时(3.4)和(3.5)的收敛椭圆半径  $R$  相同, 其中的系数  $c_p$  满足下面的关系

$$c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (p = 0, 1, 2, \dots) . \tag{3.6}$$

**例子 3.17.**

1)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  的收敛椭圆半径为 1, 且  $j^2 = -k$ , 当  $k = 1, j = i$ , 与复变函数的理论一致, 且收敛到解析函数  $\frac{1}{1-z}$ , 当  $k \neq 1, j = i\sqrt{k}$ , 转化成复数项级数的形式, 利用复变函数级数理论, 非均匀幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z|_k < 1$

内绝对且内闭一致收敛于非均匀解析函数  $\frac{1}{1-z}$ 。

2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$  的收敛半径为  $\infty$ ，且如 1) 一样的方法可知：非均匀幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$  在收敛椭圆域  $|z-a|_k < \infty$  内绝对且内闭一致收敛于非均匀解析函数  $e^{z-a}$ 。

3)  $\sum_{n=0}^{\infty} n(z-a)^n$  的收敛半径为 0，因此除  $z=a$  处处发散。

### 3.4. 非均匀解析函数的泰勒级数展开

我们在 3.3 节已经知道，幂级数在收敛椭圆半径内绝对且内闭一致收敛到一非均匀解析函数，本节我们讨论它的逆问题，任何非均匀解析函数是否对应一幂级数，使得非均匀解析函数与幂级数在收敛椭圆半径内收敛到的非均匀解析函数一致的。

**定理 3.18.** 设函数  $g(z)$  是区域  $D$  内的非均匀解析函数， $a \in D$ ，则只要椭圆  $T: |z-a|_k < R$  且  $T \subset D$  内，则  $g(z)$  在  $T$  内能展开成非均匀幂级数：

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中系数  $c_p = \frac{g^{(p)}(a)}{p!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{p+1}}$  ( $p=0,1,2,\dots$ )，( $T_\rho = |\xi-a|_k = \rho, \rho < R$ ) 且展开是唯一的。

**证明：**任取一点  $z \in T$ ，因此存在  $T_\rho = |\xi-a|_k = \rho, \rho < R$ ，使得  $z$  在  $T_\rho$  的内部。根据非均匀柯西积分公式：

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi,$$

$$\frac{g(\xi)}{\xi-z} = \frac{g(\xi)}{\xi-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}$$

当  $\xi$  在  $T_\rho$  上时， $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| < 1$ ，由例子 3.17, 1)  $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi)}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n$$

由文献[5]定理 4.18，有  $\frac{g^{(p)}(a)}{p!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\rho} \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{p+1}}$  ( $p=0,1,2,\dots$ ) 唯一性由系数的唯一性决定。

## 致 谢

本文作者对审稿人提出的很有价值的意见表示感谢！

## 基金项目

中国计量大学第二十二届学生科研计划项目资助。

## 参考文献

- [1] 李忠. 复分析导引[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.
- [2] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [3] 戴滨林, 杨世海. 复变函数[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2019.
- [4] 赵雪娇, 陈雲, 陶继成. 非均匀复数和非均匀复变函数[J]. 应用数学进展, 2017, 6(1): 69-77.
- [5] 陈雲, 赵雪娇, 陶继成. 非均匀复变函数的积分[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 153-164.
- [6] Tao, J.C., Chen, Y. and Zhao, X.J. (2017) Heterogeneous Complex Function. 2017 *International Conference on Applied Mathematics, Modelling and Statistics Application*, Beijing, China, May 22-27 2017, 345-348. <https://doi.org/10.2991/ammsa-17.2017.77>