

# A 4D Hyperchaotic System with Any Given Number of Equilibria

Liqin Zhang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong  
Email: 1164488281@qq.com

Received: Jul. 31<sup>st</sup>, 2020; accepted: Aug. 18<sup>th</sup>, 2020; published: Aug. 26<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

This paper introduces a 4D hyperchaotic ODE system based on segmented disc dynamo system. The system can have any given number of equilibrium when parameters vary. Many interesting chaotic properties of the system are also given: (i) a hidden chaotic attractor exists with no equilibria; (ii) a hyperchaotic attractor exists with two non-hyperbolic equilibria; (iii) a chaotic attractor exists with six unstable equilibria; (iv) chaotic attractors coexist with infinitely many unstable isolated equilibria; (v) a chaotic attractor exists with line equilibrium. The paper further proves that Hopf bifurcation occurs simultaneously at two equilibria in the system under appropriate parameter conditions. Numerical simulation demonstrates the emergence of the Hopf bifurcation.

## Keywords

Segmented Disc Dynamo, Hyperchaotic, Chaotic, Hopf Bifurcation

---

# 一个有任意给定数目平衡点的四维超混沌系统

张李钦

华南理工大学数学学院, 广东 广州  
Email: 1164488281@qq.com

收稿日期: 2020年7月31日; 录用日期: 2020年8月18日; 发布日期: 2020年8月26日

---

## 摘要

本文介绍了一种基于分段盘式发电机系统的四维超混沌ODE系统。当参数变化时, 该系统可以有任意给定数量的平衡点。本文给出了该系统的许多有趣的混沌性质: (i) 没有平衡点的系统存在隐藏混沌吸引子; (ii) 具有两个非双曲平衡点的系统存在超混沌吸引子; (iii) 具有六个不稳定平衡点的系统存在混沌

吸引子; (iv) 具有无穷多个不稳定孤立平衡点的系统存在无穷多个混沌吸引子; (v) 具有线平衡点的系统存在混沌吸引子。本文进一步证明了在适当的参数条件下, 系统在两个平衡点上同时发生Hopf分叉。数值模拟证明了Hopf分叉的存在。

## 关键词

分段盘式发电机, 超混沌, 混沌, Hopf分叉

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近几十年以来, 非线性动力系统的研究获得了很大的发展。学者们对动力系统的平衡点稳定性、分叉、混沌等性质进行了深入的研究, 并发展出了超混沌、混沌吸引子、隐藏吸引子、多稳态等新的概念 [1]-[6]。

在人们所研究的动力系统中, 平衡点的数量和分叉的类型也不尽相同。经典的 Lorenz 族系统[7] [8] [9] [10] [11] 和 Rössler 系统[12] [13] 有着有限个平衡点。Wei 研究了没有平衡点但存在隐藏超混沌吸引子的系统[14]; Jafari 和 Sprott 所研究的系统具有线平衡点, 同样可以产生混沌吸引子[15]; 另外在一些文章中, 系统具有无穷多个平衡点, 但是吸引子的数量却是有限的[16]。本文基于 Moffatt [17] 提出的分段盘式发电机系统构造了一个新的四维系统, 它可以有任意给定数量的平衡点: 在没有平衡点或有线平衡点的情形下可以存在隐藏混沌吸引子; 在具有有限个平衡点的情形下可以存在超混沌吸引子; 在具有无穷多个平衡点的情形下可以存在无穷多个混沌吸引子。这项工作综合地说明了具有各种数量平衡点的动力系统都可以存在混沌吸引子, 并且创新性地找到了具有无穷多个混沌吸引子的系统。此外, 新系统在某些参数条件下可以使得两个平衡点同时发生 Hopf 分叉并产生两个有一定对称性的极限环。希望这项工作能为非线性动力系统的研究做出一定的贡献。

本文组织如下。第 2 节基于分段盘式发电机模型引入了新的四维超混沌系统, 研究了它在不同参数条件下可以拥有任意给定数量平衡点的特性, 并且给出了部分参数条件下平衡点的稳定条件。第 3 节研究了新系统的混沌特性, 利用数值模拟的方法说明了拥有各个数量平衡点的系统都具有混沌/超混沌的性质。第 4 节研究了新系统的分叉性质, 通过理论证明了系统在某些参数条件下拥有两个平衡点, 它们会同时经历 Hopf 分叉产生极限环, 并用数值模拟加以佐证。最后一节对全文进行了总结并简要给出了一些发展性的评论。

## 2. 新的四维超混沌系统

### 2.1. 系统形式

Moffatt [18] 提出了一种分段盘式发电机模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = r(y - x), \\ \dot{y} = mx - (1+m)y + xz, \\ \dot{z} = g(mx^2 + 1 - (1+m)xy). \end{cases}$$

基于上述系统，我们构造了一个如下带有两个三角函数项的四维系统

$$\begin{cases} \dot{x} = F_1(x, y, z, u) = r(y - x), \\ \dot{y} = F_2(x, y, z, u) = mx - (1+m)y + xz - k_7u, \\ \dot{z} = F_3(x, y, z, u) = g(mx^2 + 1 - (1+m)xy) + k_3x^2 - k_5z + k_2 \cos u - k_4, \\ \dot{u} = F_4(x, y, z, u) = -x + xz - k_1 \sin u. \end{cases} \quad (1)$$

记系统(1)的参数组为  $\bar{p} = (r, m, g, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_7)$ 。在本文中令  $\bar{p} \in S_0$ ，其中

$$S_0 = \left\{ (r, m, g, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_7) \mid \begin{array}{l} r, m, g > 0, k_5 \geq 0, k_2 \leq 0, \\ g - k_3 \neq 0, |k_1| < 1 + m + r + k_5 \end{array} \right\}.$$

可以算出系统(1)的散度为

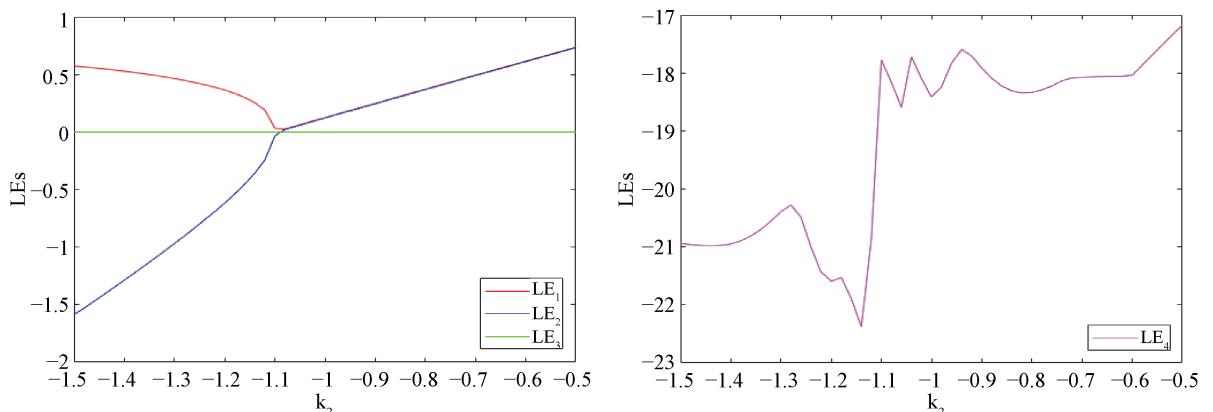
$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial u} = -(r + 1 + m + k_5 + k_1 \cos u) < 0.$$

因此系统(1)是耗散的。

令  $\bar{p} = (0.1, 100, 0.1, 0, -1, 1, -1, 0, 1)$ ，此时系统(1)没有平衡点。选取初始条件为  $(0, 0, 0, 0)$ ，则得到系统(1)有一个隐藏超混沌吸引子，四个李雅普诺夫指数为

$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (0.1904, 0.1877, 0.0000, -17.6277),$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 3.3388$ 。图 1 展示了  $k_2 \in [-1.5, -0.5]$  时的李雅普诺夫指数谱。



**Figure 1.** Parameters  $(r, m, g, k_1, k_3, k_4, k_5, k_7) = (0.1, 100, 0.1, 0, 1, -1, 0, 1)$ , the initial condition is  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $k_2 \in [-1.5, -0.5]$   
Lyapunov exponent spectrum of system (1)

**图 1.** 参数  $(r, m, g, k_1, k_3, k_4, k_5, k_7) = (0.1, 100, 0.1, 0, 1, -1, 0, 1)$ ，初始条件为  $(0, 0, 0, 0)$ ， $k_2 \in [-1.5, -0.5]$  时系统(1)的李雅普诺夫指数谱

## 2.2. 平衡点的数量

本小节研究系统(1)平衡点的数量。

**定理 1** 设  $\bar{p} \in S_0$ ，则系统(1)可以有任意给定数量的平衡点，具体可以罗列为如下的性质：

- (I)  $k_5 = 0$  的情形
  - (1) 令  $k_1 = 0$  并且  $k_7 \neq 0$ ，则

(a) 如果  $(k_2 + g - k_4)(g - k_3) < 0$ , 则系统(1)没有平衡点;

(b) 如果  $k_2 + g - k_4 = 0$ , 则系统(1)有一条线平衡点

$$E^*(0, 0, z^*, 0), z^* \in \mathbb{R}.$$

(c) 如果  $(k_2 + g - k_4)(g - k_3) > 0$ , 则系统(1)有两个平衡点

$$E_{\pm}(\pm x_0, \pm x_0, 1, 0),$$

其中

$$x_0 = \sqrt{\frac{k_2 + g - k_4}{g - k_3}}.$$

(2) 令  $k_1 k_2 \neq 0$ ,  $k_7 = 0$  并且  $|g - k_4| \leq |k_2|$ , 则系统(1)有无穷多个孤立平衡点, 具体如下:

(a) 如果  $k_2(g - k_3) > 0$ , 则系统(1)的平衡点为

$$E_{\pm,k}(\pm x^*, \pm x^*, 1, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

(b) 如果  $k_2(g - k_3) < 0$ , 则系统(1)的平衡点为

$$E_{\pm,k}(\pm x^*, \pm x^*, 1, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

其中

$$x^* = \sqrt{\frac{|k_2| \operatorname{sgn}(g - k_3) + g - k_4}{g - k_3}}.$$

(3) 令  $k_1 k_7 \neq 0$  并且  $k_2 = 0$ , 则

(a) 如果  $(g - k_3)(g - k_4) < 0$ , 则系统(1)没有平衡点;

(b) 如果  $g - k_4 = 0$ , 则系统(1)有一条线平衡点

$$E^*(0, 0, z^*, 0), z^* \in \mathbb{R}.$$

(c) 如果  $(g - k_3)(g - k_4) > 0$ , 则系统(1)有  $2(2N+1)$  个平衡点, 其中  $N$  可以是任意预先给定非负整数。

(4) 令  $k_1 k_2 k_7 \neq 0$  并且  $g - k_3 > 0$ , 则系统(1)有  $2N$  个平衡点, 其中  $N$  可以是任意预先给定非负整数。

(II)  $k_5 > 0$  并且  $g - k_3 > 0$  的情形

(1) 令  $k_1 = 0$ ,  $k_2 k_7 \neq 0$  并且  $-k_5 + k_2 + g - k_4 \leq 0$ , 则系统(1)有唯一平衡点

$$E_0\left(0, 0, \frac{k_2 + g - k_4}{k_5}, 0\right).$$

(2) 令  $k_1 k_2 \neq 0$ ,  $k_7 = 0$  并且  $-k_2 + g - k_4 \leq 0$ , 则系统(1)有无穷多个孤立平衡点

$$E_{1,k}\left(0, 0, \frac{k_2 + g - k_4}{k_5}, 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

$$E_{2,k}\left(0, 0, \frac{-k_2 + g - k_4}{k_5}, (2k+1)\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

(3) 令  $k_1 k_7 \neq 0$ ,  $k_2 = 0$  并且  $g - k_4 \leq k_5$ , 则系统(1)可以有任意给定奇数个平衡点。

**证明** 假设  $E_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$  是系统(1)的一个平衡点。由  $F_1(E_0) = 0$  可以得到  $x_0 = y_0$ , 因此  $E_0$  可以记为  $(x_0, x_0, z_0, u_0)$ 。此外, 我们有

$$\begin{cases} F_2(E_0) = x_0(z_0 - 1) - k_7 u_0 = 0, \\ F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (-k_5 z_0 + k_2 \cos u_0 + g - k_4) = 0, \\ F_4(E_0) = x_0(z_0 - 1) - k_1 \sin u_0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

(I)  $k_5 = 0$  的情形

(1) 当  $k_1 = 0$  并且  $k_7 \neq 0$  时, 由  $F_2(E_0) = F_4(E_0) = 0$  可得  $u_0 = 0$ 。于是

$$F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (k_2 + g - k_4).$$

因此,

(a) 如果  $(k_2 + g - k_4)(g - k_3) < 0$ , 则系统(1)没有平衡点;

(b) 如果  $k_2 + g - k_4 = 0$ , 由  $F_3(E_0) = 0$  可得  $x_0 = 0$ , 这直接可以推得  $F_4(E_0) = 0$ 。因此  $z_0 \in \mathbb{R}$ ;

(c) 如果  $(k_2 + g - k_4)(g - k_3) > 0$ , 由  $F_3(E_0) = 0$  可得

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{k_2 + g - k_4}{g - k_3}}.$$

而由于  $x_0 \neq 0$  以及  $F_2(E_0) = x_0(z_0 - 1) = 0$ ,  $z_0$  必须取 1。

(2) 当  $k_1 k_2 \neq 0$ ,  $k_7 = 0$  并且  $|g - k_4| \leq |k_2|$  时, 由  $F_2(E_0) = F_4(E_0) = 0$  可得  $u_0 = k\pi$ , 因此  $\cos u_0 = \pm 1$ 。很显然,

$$\operatorname{sgn}(k_2 \cos u_0 + g - k_4) = \operatorname{sgn}(k_2 \cos u_0) \neq 0.$$

考慮到  $F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (k_2 \cos u_0 + g - k_4) = 0$ , 有

$$\operatorname{sgn}(g - k_3) = \operatorname{sgn}(k_2 \cos u_0 + g - k_4) = \operatorname{sgn}(k_2 \cos u_0).$$

也就是说,  $\cos u_0 = \operatorname{sgn}(k_2(g - k_3))$ , 因此  $k_2 \cos u_0 = |k_2| \operatorname{sgn}(g - k_3)$ 。于是  $x_0 = \pm x^*$ , 其中

$$x^* = \sqrt{\frac{|k_2| \operatorname{sgn}(g - k_3) + g - k_4}{g - k_3}}.$$

由于  $x_0 \neq 0$  以及  $F_2(E_0) = x_0(z_0 - 1) = 0$ ,  $z_0$  必须为 1。因此,

(a) 如果  $k_2(g - k_3) > 0$ , 则系统(1)的平衡点为

$$E_{\pm,k}(\pm x^*, \pm x^*, 1, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

(b) 如果  $k_2(g - k_3) < 0$ , 则系统(1)的平衡点为

$$E_{\pm,k}(\pm x^*, \pm x^*, 1, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

(3) 当  $k_1 k_7 \neq 0$  并且  $k_2 = 0$  时, 有

$$F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (g - k_4).$$

如果  $(g - k_3)(g - k_4) < 0$ , 则系统(1)没有平衡点。若  $g - k_4 = 0$ , 则有  $x_0 = 0$ , 再结合  $F_2(E_0) = F_4(E_0) = 0$  可以得到  $u_0 = 0$  以及  $z_0 \in \mathbb{R}$ 。

现在考虑  $(g - k_3)(g - k_4) > 0$  的情形。由  $F_2(E_0) = F_4(E_0) = 0$  可得

$$k_7 u_0 = k_1 \sin u_0,$$

该方程关于  $u_0$  有  $2N+1$  个解  $0, \pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_N$ , 其中  $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_N$ 。于是系统(1)可以有  $2(2N+1)$  个平衡点

$$E_{\pm}(\pm x^*, \pm x^*, 1, 0),$$

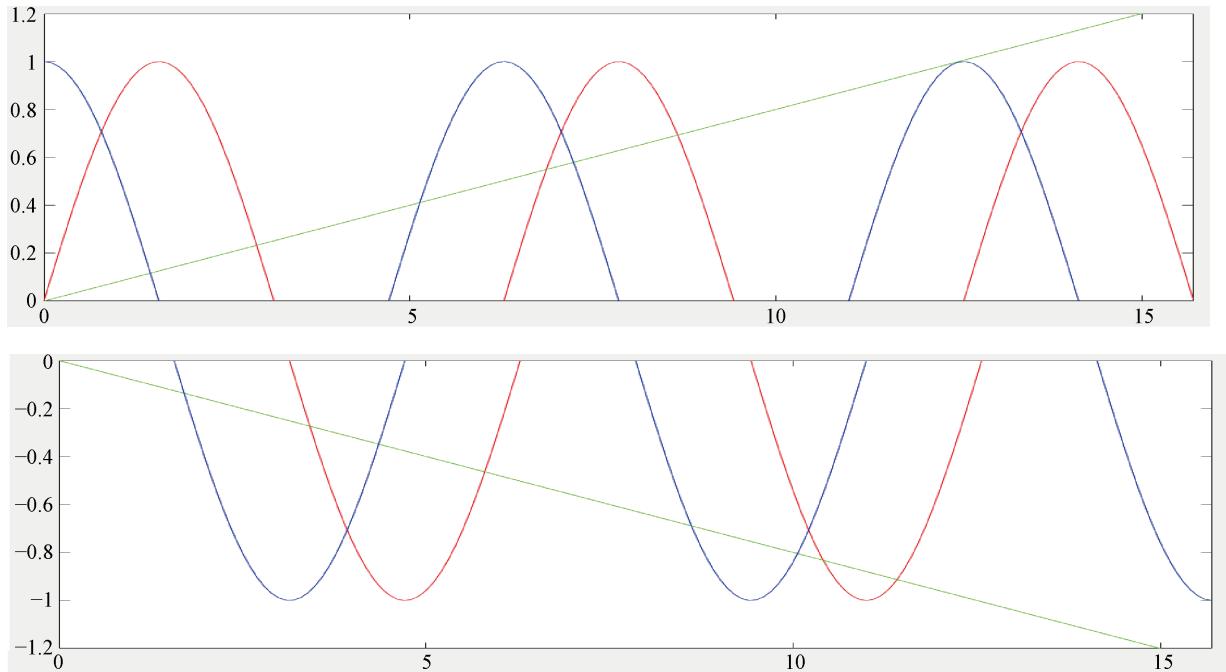
$$P_{\pm}^{(n)}\left(\pm x^*, \pm x^*, \frac{\pm x^* + k_7 u_n}{\pm x^*}, u_n\right), n = 1, 2, \dots, N,$$

$$Q_{\pm}^{(n)}\left(\pm x^*, \pm x^*, \frac{\pm x^* - k_7 u_n}{\pm x^*}, -u_n\right), n = 1, 2, \dots, N.$$

其中，

$$x^* = \sqrt{\frac{g - k_4}{g - k_3}}.$$

(4) 当  $k_1 k_2 k_7 \neq 0$  并且  $g - k_3 > 0$  时，仍设关于  $u_0$  的方程  $k_7 u_0 = k_1 \sin u_0$  有  $2N+1$  个解  $0, \pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_N$ ，并且  $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_N$ 。图 2 显示了当  $\frac{k_7}{k_1} > 0 (< 0)$  时曲线  $v = \sin u$  和直线  $v = \frac{k_7}{k_1} u$  在  $u-v$  平面第一(四)象限的交点。



**Figure 2.** The intersection of curve  $v = \sin u$  and straight line  $v = \frac{k_7}{k_1} u$

**图 2.** 曲线  $v = \sin u$  和直线  $v = \frac{k_7}{k_1} u$  的交点

可以看出， $\cos u_{2k} > 0$ ， $\cos u_{2k+1} < 0$  并且  $|\cos u_n| > |\cos u_{n+1}|$ ，即

$$\cos u_1 < \cos u_3 < \dots < \cos u_{2\left[\frac{N}{2}\right]+1} < 0 < \cos u_{2\left[\frac{N}{2}\right]} < \dots < \cos u_2 < \cos 0 = 1.$$

对这些解做一个重排

$$\left(u_1, u_3, \dots, u_{2\left[\frac{N}{2}\right]+1}, u_{2\left[\frac{N}{2}\right]}, \dots, u_2, 0\right) = (w_1, w_2, \dots, w_N, w_{N+1}).$$

则有

$$\cos w_1 < \cos w_2 < \cdots < \cos w_N < \cos w_{N+1} = 1.$$

考虑

$$F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (k_2 \cos u_0 + g - k_4).$$

定义一个函数  $f(u) = k_2 \cos u_0 + g - k_4$ 。结合  $k_2 < 0$  可知

$$f(w_1) > f(w_2) > \cdots > f(w_N) > f(w_{N+1}) = k_2 + g - k_4.$$

因此，

- (a) 如果  $f(w_1) = f(u_1) < 0$ ，则系统(1)没有平衡点；
- (b) 如果存在  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ，使得  $f(w_i) > 0 > f(w_{i+1})$ ，则系统(1)有  $4i$  个平衡点

$$P_{\pm}^{(n)} = \left( \pm x_n, \pm x_n, \frac{\pm x_n + k_7 w_n}{\pm x_n}, w_n \right), n = 1, 2, \dots, i,$$

$$Q_{\pm}^{(n)} = \left( \pm x_n, \pm x_n, \frac{\pm x_n - k_7 w_n}{\pm x_n}, -w_n \right), n = 1, 2, \dots, i,$$

其中

$$x_n = \sqrt{\frac{k_2 \cos w_n + g - k_4}{g - k_3}};$$

(c) 如果  $f(w_{N+1}) = f(0) = k_2 + g - k_4 > 0$ ，则系统(1)有  $4N + 2$  个平衡点  $P_{\pm}^{(n)}, Q_{\pm}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 及

$$E_{\pm} = (\pm x_{N+1}, \pm x_{N+1}, 1, 0),$$

其中

$$x_{N+1} = \sqrt{\frac{k_2 + g - k_4}{g - k_3}}.$$

(II)  $k_5 > 0$  并且  $g - k_3 > 0$  的情形

- (1) 当  $k_1 = 0$ ,  $k_2 k_7 \neq 0$  并且  $-k_5 + k_2 + g - k_4 \leq 0$ ，可以得到  $u_0 = 0$  以及  $x_0(z_0 - 1) = 0$ 。假设  $x_0 \neq 0$ ，则  $z_0 = 1$  并且有

$$F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (-k_5 z_0 + k_2 + g - k_4) < 0.$$

因此， $x_0$  必须为 0。所以系统(1)只有唯一平衡点

$$E_0 \left( 0, 0, \frac{k_2 + g - k_4}{k_5}, 0 \right).$$

(2) 当  $k_1 k_2 \neq 0$ ,  $k_7 = 0$  并且  $-k_2 + g - k_4 \leq 0$  时，可以得到  $u_0 = k\pi$ ，于是  $\cos u_0 = \pm 1$ 。由  $-k_2 + g - k_4 \leq 0$  和  $k_2 \leq 0$  可得  $-k_5 + k_2 \cos u_0 + g - k_4 \leq 0$ 。同样地，若假设  $x_0 \neq 0$  则有  $z_0 = 1$ ，并有

$$F_3(E_0) = -(g - k_3)x_0^2 + (-k_5 z_0 + k_2 \cos u_0 + g - k_4) < 0.$$

因此  $x_0$  同样必须为 0。此时系统(1)有无穷多个孤立平衡点

$$E_{1,k} \left( 0, 0, \frac{k_2 + g - k_4}{k_5}, 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z},$$

$$E_{2,k} \left( 0, 0, \frac{-k_2 + g - k_4}{k_5}, (2k+1)\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

(3) 当  $k_1 k_7 \neq 0$ ,  $k_2 = 0$  并且  $g - k_4 \leq k_5$  时, 仍设  $k_7 u_0 = k_1 \sin u_0$  的解为  $0, \pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_N$ 。对于  $u_0 = 0$  可以得到一个平衡点

$$E_0 \left( 0, 0, \frac{g - k_4}{k_5}, 0 \right).$$

而对于  $u_0 \neq 0$ , 由  $F_2(E_0) = x_0(z_0 - 1) - k_7 u_0 = 0$  可得  $z_0 \neq 1$  以及  $x_0 = k_7 u_0 / (z_0 - 1)$ 。将此式代入  $F_3(E_0) = 0$  可得

$$(g - k_3)(k_7 u_0)^2 + k_5 z_0(z_0 - 1)^2 = (g - k_4)(z_0 - 1)^2.$$

作变换  $z_1 = z_0 - 1$  可得

$$(g - k_3)(k_7 u_0)^2 + k_5(z_1 + 1)z_1^2 = (g - k_4)z_1^2. \quad (3)$$

即

$$z_1^3 + \frac{[k_5 - (g - k_4)]}{k_5} z_1^2 + \frac{(g - k_3)(k_7 u_0)^2}{k_5} = 0. \quad (4)$$

由于  $k_5 > 0$ ,  $g - k_3 > 0$  以及  $g - k_4 \leq k_5$ , 关于  $z_1$  的一元三次方程(4)的判别式

$$\Delta = \frac{(g - k_3)(k_7 u_0)^2}{k_5} \left( \left( \frac{[k_5 - (g - k_4)]}{3k_5} \right)^3 + \frac{1}{4} \frac{(g - k_3)(k_7 u_0)^2}{k_5} \right) > 0.$$

于是对于每一个给定的  $u_0 \neq 0$ , 方程(4)都有唯一解, 进而关于  $z_0$  的方程(4)亦有唯一解。因此, 系统(1)有  $2N+1$  个平衡点

$$E_0 = \left( 0, 0, \frac{g - k_4}{k_5}, 0 \right),$$

$$P_{\pm}^{(n)} = \left( \frac{k_7 u_n}{z(u_n) - 1}, \frac{k_7 u_n}{z(u_n) - 1}, z(u_n), u_n \right), n = 1, 2, \dots, N,$$

$$Q_{\pm}^{(n)} = \left( \frac{-k_7 u_n}{z(u_n) - 1}, \frac{-k_7 u_n}{z(u_n) - 1}, z(u_n), -u_n \right), n = 1, 2, \dots, N,$$

其中,  $z(u_n)$  是下列关于  $z_0$  的方程的唯一解:

$$(g - k_3)(k_7 u_n)^2 + k_5 z_0(z_0 - 1)^2 = (g - k_4)(z_0 - 1)^2.$$

### 2.3. 稳定性

本小节分析系统(1)在部分参数条件下平衡点的稳定性。

系统(1)的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -r & r & 0 & 0 \\ m+z & -(1+m) & x & -k_7 \\ g(2mx - (1+m)y) + 2k_3x & -g(1+m)x & -k_5 & -k_2 \sin u \\ -1+z & 0 & x & -k_1 \cos u \end{pmatrix}.$$

这里先给出三个下文常用的量的定义

$$C = gx_0^2(m+1), D = 2r(g-k_3)x_0^2, M = m+1. \quad (5)$$

其中  $x_0$  是正在讨论稳定性的平衡点的第一个分量。

(I)  $k_5 = 0$  的情形

(1) 当  $k_1 = 0, k_7 \neq 0$  并且  $(k_2 + g - k_4)(g - k_3) > 0$  时,  $E_{\pm}$  的特征多项式都为

$$\det(J(E_{\pm}) - \lambda I) = \lambda^4 + (1+m+r)\lambda^3 + C\lambda^2 + (D - k_7C)\lambda - k_7D.$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,  $E_{\pm}$  稳定当且仅当

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1+m+r > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+m+r & D - k_7C \\ 1 & C \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+m+r & D - k_7C & 0 \\ 1 & C & -k_7D \\ 0 & 1+m+r & D - k_7C \end{vmatrix} > 0, \\ -k_7D > 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (D - k_7C)[(M+r)C - (D - k_7C)] + k_7D(M+r)^2 > 0, \\ k_7 < 0 < g - k_3. \end{cases}$$

(2) 当  $k_1 k_2 \neq 0, k_7 = 0$  并且  $|k_4 - g| \leq |k_2|$ ,  $E_{\pm,k}$  的特征方程皆为

$$\det(J(E_{\pm,k}) - \lambda I) = (\lambda + k_1 \operatorname{sgn}(k_2(g - k_3)))(\lambda^3 + (1+m+r)\lambda^2 + C\lambda + D).$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,  $E_{\pm,k}$  稳定当且仅当

$$\begin{cases} k_1 k_2 (g - k_3) > 0, \\ \Delta_1 = 1+m+r > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+m+r & D \\ 1 & C \end{vmatrix} > 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} k_1 k_2 > 0, \\ (M+r)gM - 2r(g - k_3) > 0, \\ g - k_3 > 0. \end{cases}$$

(II)  $k_5 > 0$  并且  $g - k_3 > 0$  的情形

(1) 当  $k_1 = 0, k_2 k_7 \neq 0$  并且  $-k_5 - k_2 + g - k_4 \leq 0$  时,  $E_0$  的特征多项式为

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = (\lambda + k_5)(\lambda^3 + (1+m+r)\lambda^2 - r(z_0-1)\lambda + k_7r(z_0-1)).$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,  $E_0$  稳定当且仅当

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 + m + r > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+m+r & k_7r(z_0-1) \\ 1 & -r(z_0-1) \end{vmatrix} > 0, \\ k_7r(z_0-1) > 0. \end{cases}$$

由于  $z_0 = (k_2 + g - k_4)/k_5 \leq 0$ , 等价条件可以简化为

$$\begin{cases} 1 + m + r + k_7 > 0, \\ k_7 < 0. \end{cases}$$

(2) 当  $k_1 k_2 \neq 0$ ,  $k_7 = 0$  并且  $-k_2 + g - k_4 \leq 0$ ,  $E_{1,k}$  和  $E_{2,k}$  的特征多项式表示为

$$\det(J(E_{i,k}) - \lambda I) = (\lambda + k_1 \cos u_0)(\lambda + k_5)(\lambda^2 + (1 + m + r)\lambda - r(z_0 - 1)).$$

由此, 特征根分别为  $\lambda_1 = -k_1 \cos u_0$ ,  $\lambda_2 = -k_5 < 0$  以及

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1+m+r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+m+r)^2 + 4r(z_0-1)}.$$

由

$$z|_{E_{1,k}} = \frac{k_2 + g - k_4}{k_5} < z|_{E_{2,k}} = \frac{-k_2 + g - k_4}{k_5} \leq 0,$$

可得  $(1 + m + r)^2 + 4r(z_0 - 1) < (1 + m + r)^2$ , 于是  $\operatorname{Re}(\lambda_{3,4}) < 0$ 。又由

$$(\cos u)|_{E_{1,k}} = 1, \quad (\cos u)|_{E_{2,k}} = -1,$$

可知, 如果  $k_1 > 0$ , 则  $E_{1,k}$  稳定而  $E_{2,k}$  不稳定; 否则  $E_{1,k}$  不稳定而  $E_{2,k}$  稳定。

### 3. 混沌性质

#### 3.1. 没有平衡点的混沌系统

令  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 10, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ , 此时系统(1)没有平衡点。选取初始点为  $(1, 1, 1, 1)$  可得系统(1)是混沌的, 四个李雅普诺夫指数为

$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (1.0730, 0.0011, -0.5052, -1.6793),$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 3.3388$ 。数值模拟证实了系统(1)确实有一个隐藏混沌吸引子, 如图 3 所示。

#### 3.2. 具有有限个平衡点的超混沌/混沌系统

##### 3.2.1. 具有两个平衡点的超混沌系统

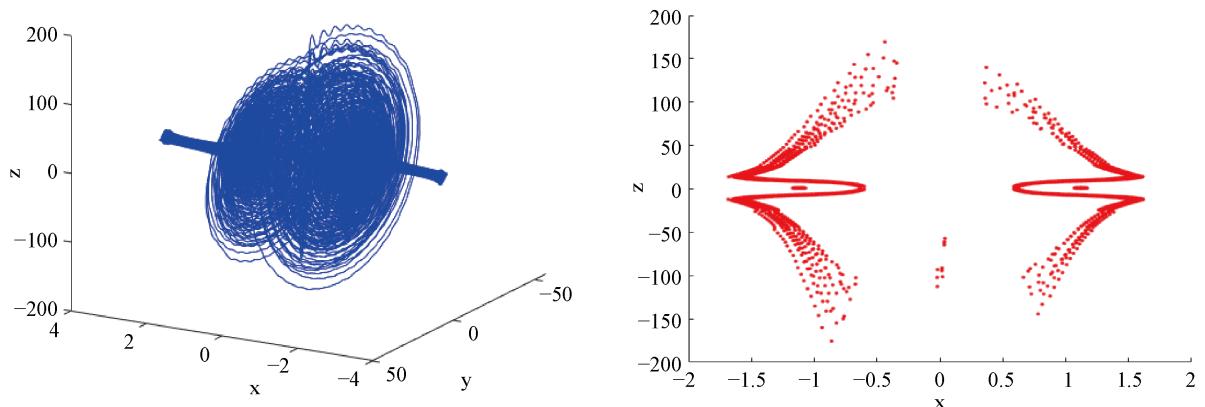
令  $\vec{p} = (0.1, 1, 0.01, -1, -0.1, -1, -10, 0, -1)$ , 此时系统(1)有两个非双曲平衡点

$$E_{\pm} = (\pm 3.1324, \pm 3.1324, 1, 0).$$

选取初始点为  $(3.1334, 3.1334, 1.0010, 0.0010)$  可得系统(1)是超混沌的, 四个李雅普诺夫指数为

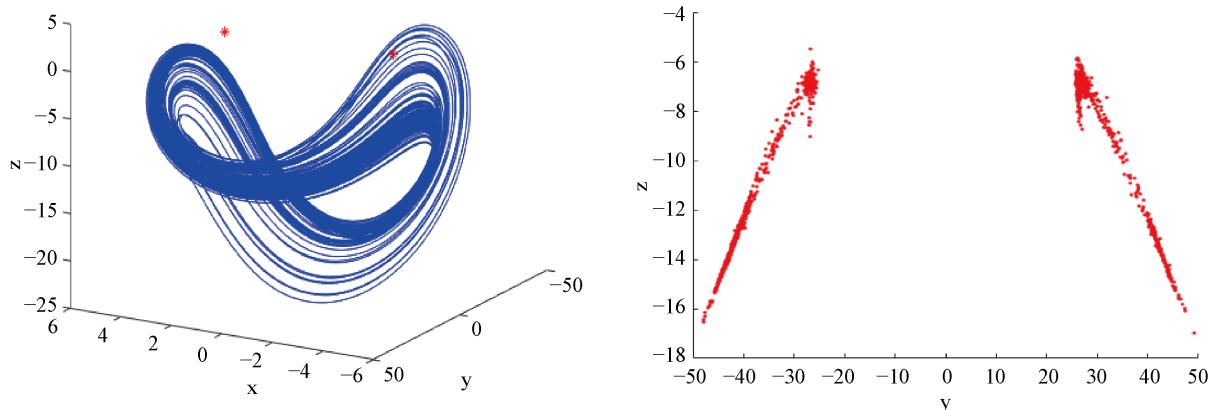
$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (0.6009, 0.6005, -0.0002, -2.3013),$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 3.5220$ 。数值模拟证实了系统(1)确实有一个超混沌吸引子, 如图 4 所示。



**Figure 3.** The parameter group is  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 10, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ , when the initial condition is selected as  $(1, 1, 1, 1)$ , the system (1) x-y-z space phase diagram (left picture) and Poincaré mapping on xz plane (right picture)

**图 3.** 参数组为  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 10, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ ，选取初始条件为  $(1, 1, 1, 1)$  时，系统(1)的 x-y-z 空间相图(左图)和 x-z 平面上的庞加莱映射(右图)



**Figure 4.** When the parameter group is  $\vec{p} = (0.1, 1, 0.01, -1, -0.1, -1, -10, 0, -1)$ , when the initial conditions are selected as  $(3.1334, 3.1334, 1.0010, 0.0010)$ , the system (1) the x-y-z space diagram (left picture) and the Poincaré map on the yz plane (right picture)

**图 4.** 参数组为  $\vec{p} = (0.1, 1, 0.01, -1, -0.1, -1, -10, 0, -1)$ ，选取初始条件为  $(3.1334, 3.1334, 1.0010, 0.0010)$  时，系统(1)的 x-y-z 空间相图(左图)和 y-z 平面上的庞加莱映射(右图)

### 3.2.2. 具有六个平衡点的混沌系统

令  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, 0, 0, -1, 0, -0.8)$ ，此时系统(1)有六个不稳定的平衡点

$$E_{\pm} = (\pm 1.4142, \pm 1.4142, 1, 0),$$

$$P_+^{(1)} = (1.4142, 1.4142, 0.3602, 1.1311),$$

$$P_-^{(1)} = (-1.4142, -1.4142, 1.6398, 1.1311),$$

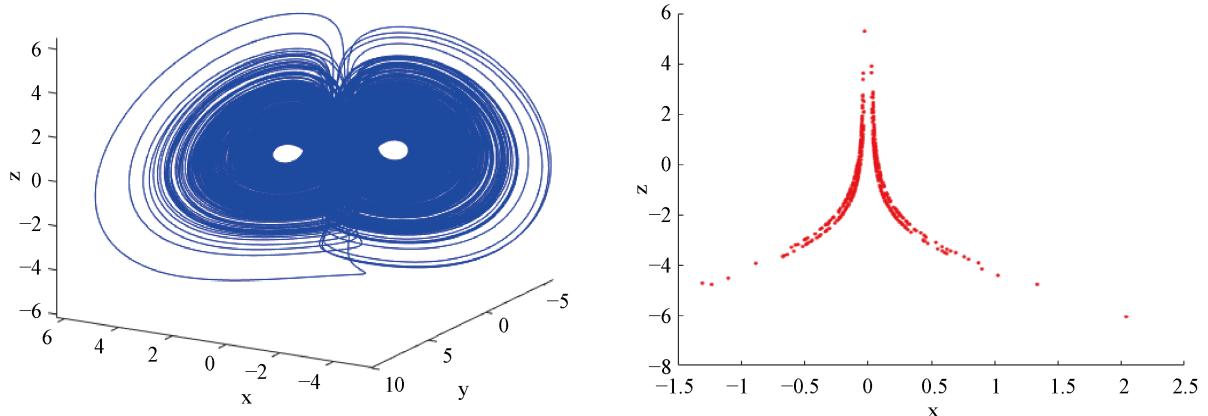
$$Q_+^{(1)} = (1.4142, 1.4142, 1.6398, -1.1311),$$

$$Q_-^{(1)} = (-1.4142, -1.4142, 0.3602, -1.1311),$$

选取初始点为  $(1.4152, 1.4152, 1.0010, 0.0010)$  可得系统(1)是混沌的，四个李雅普诺夫指数为

$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (0.1475, 0.0009, -0.6082, -10.4245)$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 2.2440$ 。数值模拟证实了系统(1)确实有一个混沌吸引子，如图 5 所示。



**Figure 5.** When the parameter group is  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, 0, 0, -1, 0, -0.8)$ , when the initial conditions are selected as  $(1.4152, 1.4152, 1.0010, 0.0010)$  the system (1) x-y-z space phase diagram (left picture) and Poincaré mapping on x-z plane (right picture)

**图 5.** 参数组为  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, 0, 0, -1, 0, -0.8)$ ，选取初始条件为  $(1.4152, 1.4152, 1.0010, 0.0010)$  时，系统(1)的 x-y-z 空间相图(左图)和 x-z 平面上的庞加莱映射(右图)

### 3.3. 具有无穷多个平衡点的混沌系统

#### 3.3.1. 具有无穷多个孤立平衡点的混沌系统

令  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, -1, 0, 0, 0.1, 0)$ ，此时系统(1)有无穷多个不稳定的孤立平衡点

$$E_{1,k} = (0, 0, 0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z},$$

$$E_{2,k} = (0, 0, 20, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

选取初始点为  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$  可得系统(1)是混沌的，四个李雅普诺夫指数为

$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (0.1126, 0.0001, -0.8714, -11.3100)$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 2.1293$ 。数值模拟证实了系统(1)确实有无穷多个混沌吸引子，如图 6 所示。

#### 3.3.2. 具有一条线平衡点的混沌系统

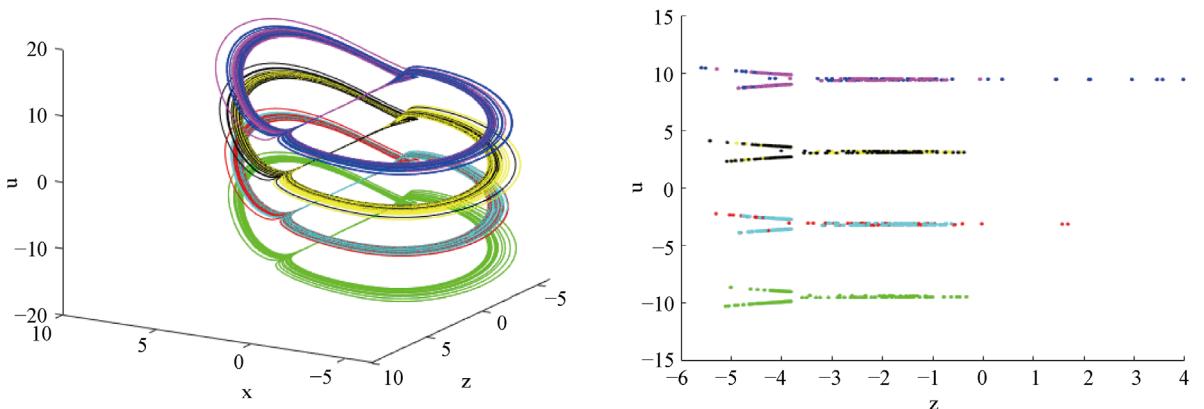
令  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 90, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ ，此时系统(1)有一条直线平衡点

$$E^* (0, 0, z^*, 0), z^* \in \mathbb{R}.$$

选取初始点为  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$  可得系统(1)是混沌的，四个李雅普诺夫指数为

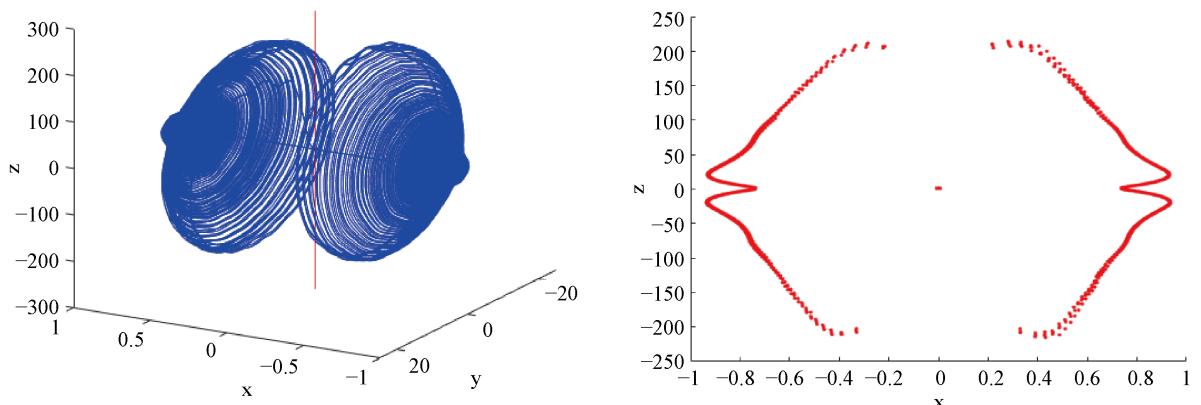
$$(\lambda_{LE1}, \lambda_{LE2}, \lambda_{LE3}, \lambda_{LE4}) = (0.0163, -0.0003, -0.0277, -1.0982).$$

李雅普诺夫维数为  $D_L = 2.5776$ 。数值模拟证实了系统(1)确实有一个隐藏混沌吸引子，如图 7 所示。



**Figure 6.** When the parameter group is  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, -1, 0, 0, 0.1, 0)$  and the initial condition is selected as  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$ , the system (1) the x-y-u space phase diagram (left picture) and the Poincaré map on the z-u plane (right picture)

**图 6.** 参数组为  $\vec{p} = (10, 0.1, 1, -1, -1, 0, 0, 0.1, 0)$ ，选取初始条件为  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$  时，系统(1)的 x-y-u 空间相图(左图)和 z-u 平面上的庞加莱映射(右图)



**Figure 7.** The parameter group is  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 90, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ , when the initial condition is selected as  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$ , the system (1) x-y-z space phase diagram (left picture) and Poincaré mapping on x-z plane (right picture)

**图 7.** 参数组为  $\vec{p} = (0.01, 0.1, 90, 0, -100, 9, -10, 0, -1)$ ，选取初始条件为  $(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)$  时，系统(1)的 x-y-z 空间相图(左图)和 x-z 平面上的庞加莱映射(右图)

## 4. Hopf 分叉

### 4.1. Hopf 分叉的存在性和周期轨的稳定性

当  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_5^2 = 0$ ， $k_7 \neq 0$  并且  $g - k_4 > 0$  时，系统(1)有两个平衡点  $O_{\pm}(\pm x_0, \pm x_0, 1, 0)$ ，其中  $x_0 = \sqrt{(g - k_4)/g}$ 。

**定理 2** 令

$$S = \left\{ (r, m, g, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_7) \mid \begin{array}{l} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_5^2 = 0, r, m, g > 0, k_7 < 0, \\ (1+m+r+4k_7)(1+m)-4r \geq 0, k_4 = k_4^0 \end{array} \right\},$$

其中

$$k_4^0 = g - \frac{2rk_7(1+m+r)^2}{A[A-(1+m)(1+m+r)]},$$

$$A = 2r - k_7(1+m).$$

当  $\vec{p} \in S \cap S_0$  时, 系统(1)有两个平衡点  $E_{\pm}$ , 并且它们都在  $k_4 = k_4^0$  处经历了 Hopf 分叉。

证明 设  $\vec{p} \in S \cap S_0$ 。首先有

$$A - (1+m)(1+m+r) = 2r - (1+m+r+k_7)(1+m) < 4r - (1+m+r+4k_7)(1+m) \leq 0$$

以及

$$A = 2r - k_7(1+m) > 0.$$

于是

$$g - k_4 = \frac{2rk_7(1+m+r)^2}{A[A-(1+m)(1+m+r)]} > 0.$$

所以系统(1)有两个平衡点  $O_{\pm}(\pm x_0, \pm x_0, 1, 0)$ , 其中  $x_0 = \sqrt{(g-k_4)/g}$ 。

$O_{\pm}$  的特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^4 + (1+m+r)\lambda^3 + C\lambda^2 + (D - k_7C)\lambda - k_7D, \quad (6)$$

其中  $D - k_7C = A(g - k_4) > 0$ 。

为了证明  $f(\lambda) = 0$  有一对共轭纯虚根, 将  $\lambda = \pm i\omega$  代入  $f(\lambda) = 0$  可以得到需要满足的条件为

$$\omega^2 = \frac{D - k_7C}{1+m+r} > 0 \quad (7)$$

以及

$$(D - k_7C)^2 - C(D - k_7C)(1+m+r) - k_7D(1+m+r)^2 = 0.$$

其中第一个不等式条件显然成立, 而第二个条件等价为

$$A(g - k_4)[A - (1+m)(1+m+r)] = 2rk_7(1+m+r)^2,$$

即

$$g - k_4 = \frac{2rk_7(1+m+r)^2}{A[A - (1+m)(1+m+r)]},$$

由于  $\vec{p} \in S$ , 这个条件也是成立的。

接着我们来证明  $f(\lambda) = 0$  的另外两个根都是负实根。根据  $f(\lambda) = 0$  有着共轭虚根  $\lambda = \pm i\omega$ ,  $f(\lambda)$  可以做如下分解

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + E\lambda + F) = \lambda^4 + E\lambda^3 + (F + \omega^2)\lambda^2 + \omega^2E\lambda + \omega^2F, \quad (8)$$

对照式(6)和式(8)的系数可得,

$$E = 1+m+r > 0, \quad (9)$$

并且

$$F = C - \omega^2 = C - \frac{D - k_7 C}{1 + m + r} = \frac{g - k_4}{1 + m + r} [(1 + m)(1 + m + r) - A] = \frac{-2r k_7 (1 + m + r)}{A} > 0.$$

于是有

$$\Delta = E^2 - 4F = \frac{(1 + m + r)}{A} [A(1 + m + r) + 8r k_7] \geq \frac{2r(1 + m + r)}{A} (1 + m + r + 4k_7) > 0. \quad (10)$$

因此,  $f(\lambda) = 0$  的根为  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  以及  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(-E \pm \sqrt{\Delta}) < 0$ 。

最后, 我们考虑横截性条件。将  $f(\lambda) = 0$  关于  $k_4$  进行求导得

$$\frac{d\lambda}{dk_4} = \frac{(1 + m)\lambda^2 + [2r - k_7(1 + m)]\lambda}{4\lambda^3 + 3(1 + m + r)\lambda^2 + 2C\lambda + (D - k_7 C)}.$$

令  $\lambda = i\omega$  并且观察到式(7), 于是

$$\left. \frac{d\lambda}{dk_4} \right|_{k_4=k_4^0} = \frac{-(1 + m)\omega^2 + [2r - k_7(1 + m)]i\omega}{-4i\omega^3 - 3(1 + m + r)\omega^2 + 2Ci\omega + (1 + m + r)\omega^2} = \frac{(1 + m)\omega - [2r - k_7(1 + m)]i}{4i\omega^2 + 2(1 + m + r)\omega - 2Ci}.$$

由此,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left[ \operatorname{Re} \left( \left. \frac{d\lambda}{dk_4} \right|_{k_4=k_4^0} \right) \right] &= \operatorname{sgn} \left[ (1 + m)(1 + m + r)\omega^2 - [2r - k_7(1 + m)](2\omega^2 - C) \right] \\ &= \operatorname{sgn} \left\{ [(1 + m + r + 2k_7)(1 + m) - 4r]\omega^2 + [2r - k_7(1 + m)]C \right\} = 1, \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{Re} \left( \left. \frac{d\lambda}{dk_4} \right|_{k_4=k_4^0} \right) > 0. \quad (11)$$

**定理 3** 当参数组  $\vec{p} \in S \cap S_0$  时, 平衡点  $O_{\pm}(\pm x_0, \pm x_0, 1, 0)$  的第一李雅普诺夫系数皆由下式给出

$$l_1 = \frac{gr^3\omega^3 \{ 2M^2\omega^4 [2M\omega^2 + 5k_7(Mk_7 + 2r)] + rk_7b \}}{(g - k_4) \left[ (M\omega^2 + 4rk_7)^2 + A^2\omega^2 \right] \left[ (5rk_7 + 2M\omega^2)^2 + A^2\omega^2 \right]},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= 2r - Mk_7, \\ b &= (64M^2k_7^2 + 5rMk_7 - 4r^2)\omega^2 + 35rk_7^2(3Mk_7 - 2r), \\ M &= m + 1. \end{aligned}$$

(I) 如果  $l_1 \neq 0$ , 则系统(1)将同时在平衡点  $O_{\pm}$  处发生 Hopf 分叉, 并且在  $k_4 = k_4^0$  附近产生的两个分叉周期轨道在  $l_1 < 0$  时是稳定的, 在  $l_1 > 0$  时是不稳定的。

证明 记  $(X, X, 1, 0)$  为系统(1)的一个平衡点( $X$  可取  $\pm x_0$ )。于是

$$X^2 = x_0^2 = \frac{g - k_4}{g}. \quad (12)$$

作变换

$$\begin{cases} x_1 = x - X, \\ y_1 = y - X, \\ z_1 = z - 1, \\ u_1 = u, \end{cases}$$

并且令  $M = m + 1$ ，则系统(1)变换为了如下系统(变量仍记为  $x, y, z, u$ )：

$$\begin{cases} \dot{x} = r(y - x), \\ \dot{y} = M(x - y) + (x + X)z - k_7 u, \\ \dot{z} = g[(M - 1)x^2 + 1 - Mxy + (M - 2)Xx - MXy - X^2] - k_4, \\ \dot{u} = (x + X)z. \end{cases}$$

此时平衡点  $(X, X, 1, 0)$  被平移到了原点  $O(0, 0, 0, 0)$ 。

根据式(11)，横截性条件是满足的。现在来计算第一李雅普诺夫系数，它可以表明平衡点和出现的周期轨的稳定性。当参数组  $\vec{p} \in S \cap S_0$  时，平衡点的特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  和  $\lambda_{3,4} = (-E \pm \sqrt{\Delta})/2$ ，其中  $E$  和  $\Delta$  可以由式(9)和式(10)计算得出。依据[18]，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -r & r & 0 & 0 \\ M & -M & X & -k_7 \\ g(M-2)X & -gMX & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \end{pmatrix}, \\ p &= \frac{1}{P} \begin{pmatrix} -M(gXk_7 + \omega^2) + (\omega^2 - gXM)\omega i \\ -r\omega^2 \\ -rX(\omega i + k_7) \\ k_7r\omega i \end{pmatrix}, \\ q &= \begin{pmatrix} r\omega i \\ r\omega i - \omega^2 \\ -gX(2r + M\omega i) \\ [(M+r)\omega^2 - 2rgX^2] + (\omega^2 - gX^2M)\omega i \end{pmatrix}, \\ B(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_1y_3 + x_3y_1 \\ g[2(M-1)x_1y_1 - M(x_1y_2 + x_2y_1)] \\ x_1y_3 + x_3y_1 \end{pmatrix}, \\ C(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$P = 2rgX^2 \left[ (M\omega^2 + 4rk_7) + (2r - k_7M)\omega i \right].$$

接着可以计算出下列值：

$$A^{-1}B(q, \bar{q}) = \frac{r^2\omega^2}{X} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2gXM \\ r \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(2\omega i E - A)^{-1} B(q, q) = -2rgX\omega i R \begin{pmatrix} r(2\omega i - k_7) \\ (2\omega i - k_7)(2\omega i + r) \\ \frac{1}{X} \left[ -4\omega^2(M + 2\omega i + r) - \frac{H}{R} \right] \\ 2\omega i(M + 2\omega i + r) \end{pmatrix},$$

其中

$$H = 2r + (m+1)\omega i,$$

$$R = \frac{5r\omega i - 3M\omega^2}{6gX^2 \left[ (5rk_7 + 2M\omega^2) - (2r - k_7M)\omega i \right]}.$$

从而

$$l_1 = \frac{r^3\omega^3 \left\{ 2M^2\omega^4 \left[ 2M\omega^2 + 5k_7(Mk_7 + 2r) \right] + rk_7b \right\}}{X^2 \left[ (M\omega^2 + 4rk_7)^2 + a^2\omega^2 \right] \left[ (5rk_7 + 2M\omega^2)^2 + a^2\omega^2 \right]},$$

其中

$$\begin{aligned} a &= 2r - Mk_7, \\ b &= (64M^2k_7^2 + 5rMk_7 - 4r^2)\omega^2 + 35rk_7^2(3Mk_7 - 2r), \end{aligned}$$

$$M = m+1.$$

注意到式(12)，则可得到最终结果

$$l_1 = \frac{gr^3\omega^3 \left\{ 2M^2\omega^4 \left[ 2M\omega^2 + 5k_7(Mk_7 + 2r) \right] + rk_7b \right\}}{(g - k_4) \left[ (M\omega^2 + 4rk_7)^2 + a^2\omega^2 \right] \left[ (5rk_7 + 2M\omega^2)^2 + a^2\omega^2 \right]}.$$

## 4.2. 数值模拟

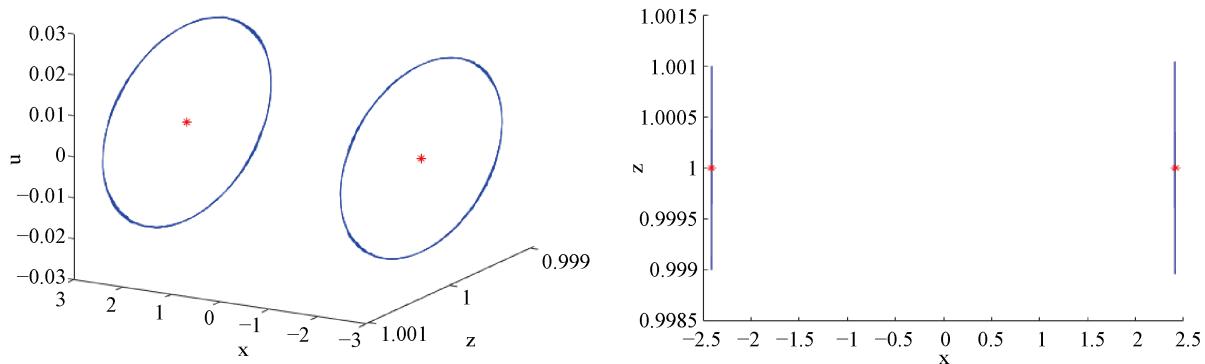
本小节对 4.1 小节所证明的 Hopf 分支进行数值模拟。

取参数

$$(r, m, g, k_1, k_2, k_3, k_5, k_7) = (0.1, 1, 0.01, 0, 0, 0, 0, -0.1),$$

根据定理 2， $l_1 = 2.9654 \times 10^{-6}$ 。当  $k_4 = -0.0480$  时，选取初始条件  $(\pm 2.4099, \pm 2.4099, 1.0010, 0.0010)$ ，得到

了两个不稳定的极限环，如图 8 所示。



**Figure 8.** The parameter group is  $\vec{p} = (0.1, 1, 0.01, 0, 0, 0, -0.0480, 0, -0.1)$  select initial conditions  $(\pm 2.4099, \pm 2.4099, 1.0010, 0.0010)$ , system (1) there are two unstable limit cycles

**图 8.** 参数组为  $\vec{p} = (0.1, 1, 0.01, 0, 0, 0, -0.0480, 0, -0.1)$ ，选取初始条件  $(\pm 2.4099, \pm 2.4099, 1.0010, 0.0010)$ ，系统(1)存在两个不稳定的极限环

## 5. 总结

本文构造了一个可以具有任意预先给定数目平衡点的四维 ODE 系统。通过数值方法计算李亚普诺夫指数，本文揭示了新系统在不同参数下的许多混沌特性：(i) 没有平衡点的系统存在隐藏混沌吸引子；(ii) 具有两个非双曲平衡点的系统存在超混沌吸引子；(iii) 具有六个不稳定平衡点的系统存在混沌吸引子；(iv) 具有无穷多个不稳定孤立平衡点的系统存在无穷多个混沌吸引子；(v) 具有线平衡点的系统存在混沌吸引子。通过理论证明和数值模拟，证明了新系统在一定参数条件下具有两个平衡点，并且两个平衡点同时经历 Hopf 分岔，并产生两个具有一定对称性的极限环。

虽然数值计算表明，具有任意数目平衡点的 ODE 系统都可以具有混沌特性，但是平衡点的数目和稳定性与混沌特性之间的关系仍然是一个困难的问题。此外，多个平衡点在相同参数下同时发生分岔也是一个值得研究的有趣现象。

## 参考文献

- [1] Leonov, G.A., Kuznetsov, N.V. and Mokaev, T.N. (2015) Homoclinic Orbits, and Self-Excited and Hidden Attractors in a Lorenz-Like System Describing Convective Fluid Motion. *The European Physical Journal: Special Topics*, **224**, 1421-1458. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02470-3>
- [2] Ojoniyi, O.S. and Njah, A.N. (2016) A 5D Hyperchaotic Sprott B System with Coexisting Hidden Attractors. *Chaos, Solitons and Fractals: Applications in Science and Engineering: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **87**, 172-181. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.04.004>
- [3] Viet-Thanh, P., Jafari, S., Kapitaniak, T., et al. (2017) Generating a Chaotic System with One Stable Equilibrium. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **27**, Article ID: 1750053. <https://doi.org/10.1142/S0218127417500535>
- [4] Singh, J.P., Roy, B.K. and Jafari, S. (2018) New Family of 4-D Hyperchaotic and Chaotic Systems with Quadric Surfaces of Equilibria. *Chaos, Solitons and Fractals: Applications in Science and Engineering: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **106**, 243-257. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.11.030>
- [5] Yang, T. (2020) Multistability and Hidden Attractors in a Three-Dimensional Chaotic System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, Article ID: 2050087. <https://doi.org/10.1142/S021812742050087X>
- [6] Rajagopal, K., Khalaf, A.J.M., Wei, Z.C., et al. (2019) Hyperchaos and Coexisting Attractors in a Modified van der Pol-Duffing Oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29**, Article ID: 1950067.

- <https://doi.org/10.1142/S0218127419500676>
- [7] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [8] Chen, G.R. and Ueta, T. (1999) Yet Another Chaotic Attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **9**, 1465-1466. <https://doi.org/10.1142/S0218127499001024>
- [9] Chen, Y.M. and Yang, Q.G. (2013) The Nonequivalence and Dimension Formula for Attractors of Lorenz-Type Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **23**, 1350200-1-1350200-12. <https://doi.org/10.1142/S0218127413502003>
- [10] Cang, S.J., Li, Y., Zhang, R.Y., et al. (2019) Hidden and Self-Excited Coexisting Attractors in a Lorenz-Like System with Two Equilibrium Points. *Nonlinear Dynamics*, **95**, 381-390. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4570-x>
- [11] Lu, J.H. and Chen, G.R. (2002) A New Chaotic Attractor Coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **12**, 659-661. <https://doi.org/10.1142/S0218127402004620>
- [12] Rössler, O.E. (1976) An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters A*, **57**, 397-398. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90101-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90101-8)
- [13] Tutueva, A., Tutueva, A., Butusov, D., et al. (2019) The Dynamical Analysis of the Modified Rossler System. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **630**, Article ID: 012006. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/630/1/012006>
- [14] Wei, Z.C., Wang, R.R. and Liu, A.P. (2014) A New Finding of the Existence of Hidden Hyperchaotic Attractors with No Equilibria. *Mathematics and Computers in Simulation*, **100**, 13-23. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.01.001>
- [15] Jafari, S. and Sprott, J.C. (2015) Simple Chaotic Flows with a Line Equilibrium (Vol. 57, pg 79, 2013). *Chaos, Solitons and Fractals: Applications in Science and Engineering: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **77**, 341-342. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.05.002>
- [16] Yang, Q.G. and Qiao, X.M. (2019) Constructing a New 3D Chaotic System with Any Number of Equilibria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29**, Article ID: 1950060. <https://doi.org/10.1142/S0218127419500603>
- [17] Moffatt, H.K. (1979) A Self-Consistent Treatment of Simple Dynamo Systems. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **14**, 147-166. <https://doi.org/10.1080/03091927908244536>
- [18] Kuznetsov, Y.A. (1998) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, New York.