

分数阶热弹理论下二维纤维增强弹性体的动态响应问题

张建敏, 王 乐

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州
Email: z237227@163.com, wangleee2020@163.com

收稿日期: 2021年5月10日; 录用日期: 2021年6月11日; 发布日期: 2021年6月23日

摘 要

本文内容基于Ezzat型分数阶广义热弹性耦合理论, 研究半无限大空间模型下二维纤维增强弹性体受线性I型裂纹作用的热弹性问题。文中给出了分数阶广义热弹性理论下的控制方程, 运用正则模态法对控制方程进行求解, 得到了半空间无限大纤维增强弹性体中的无量纲应力、位移、温度等物理量的分布规律。重点研究了旋转效应及分数阶参数对各物理量的影响。研究结果表明: 纤维增强弹性体在外载荷作用下出现了热弹耦合效应, 分数阶参数以及旋转效应显著地影响了各物理量的分布规律。

关键词

波传播, 旋转效应, 分数阶理论, 广义热弹性, 正则模态分析

The Problem of Dynamic Response of Two Dimensional Fiber Reinforced Elastomer under Fractional Thermoelastic Theory

Jianmin Zhang, Le Wang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: z237227@163.com, wangleee2020@163.com

Received: May 10th, 2021; accepted: Jun. 11th, 2021; published: Jun. 23rd, 2021

Abstract

Based on the Ezzat type fractional generalized thermoelastic coupling theory, the thermoelastic problem of a two-dimensional fiber-reinforced elastic body subjected to a linear mode I crack in a

semi infinite space is studied. In this paper, the governing equations under the fractional generalized thermoelastic theory are given, and the regularized modal method is used to solve the governing equations. The distribution of dimensionless temperature, displacement, stress and other physical quantities in the half space infinite fiber reinforced elastomer is obtained. The influence of fractional order parameters and rotation effect on the physical quantities is mainly studied. The results show that the thermoelastic coupling effect occurs in the fiber reinforced elastomer due to the external load, and the fractional order parameters and rotation effect significantly affect the distribution of physical quantities.

Keywords

Wave Propagation, Rotation Effect, Fractional Order Theory, Generalized Thermoelasticity, Normal Mode Analysis

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

纤维增强材料由于其本身具有强度高、质量轻的优点,现如今被广泛用于各种器件和结构中。Belfield等[1]研究了纤维增强弹性板,研究过程中引入了连续自增强思想,同时发展了边界层理论。Verma [2]研究了弹性自增强体中磁弹性剪切波,并建立了自增强弹性体中电磁场耦合作用中力的基本方程。Chattopadhyay 等[3]研究了磁弹性剪切波在无限大平面自增强板中的传播问题。Sengupta 等[4]研究了波在各向异性纤维增强材料表面的传播问题,进而推导出了面波传播理论。Sethi 等[5]研究了重力作用下各向异性弹性纤维增强材料的波传播问题,得到了不同情况下的波速方程。

在旋转作用下, Othman [6]研究了广义热弹性平面波模型,同时得到了热应力、位移分量、温度的精确表达式。Othman 等[7]研究了在磁场和热冲击作用下,弹性介质受旋转作用时各物理量的影响,并将结果与无旋转作用时的预测结果进行了对比。Kumar 等[8]基于不同热弹性理论下,研究了旋转对有限宽度热弹性板中波传播的影响。Ailawalia 等[9]研究了旋转效应对弹性体变形的影响,并且利用拉普拉斯变换获得了结构内的温度、应力和位移的分布。Alshaikh 等[10]研究了广义热弹性压电材料在旋转作用下的平面波速度。

近年来,部分学者们投入了大量的精力来研究固体的裂纹问题,并取得了成就,这在工业电子元件的制造过程中,避免裂纹产生和扩展十分重要。在时间极短的情况下,对于动态裂纹的研究,应当应用广义热弹性理论。Sur 等[11]利用 G-N 广义热弹性理论,研究了热弹性功能梯度材料被有限线性 I 型裂纹削弱,然后产生的位移和应力等问题。Abbas 和 Prasad 等[12] [13]应用 G-N 广义热弹性理论,进而研究了各向同性热弹性模型中的 I 型裂纹问题。

本文应用 Ezzat 型分数阶广义热弹性耦合理论,深入研究了半无限大空间二维纤维增强弹性体受线性 I 型裂纹作用下的热弹性问题,文中运用正则模态法求解,得到了不同参数下无量纲应力、位移和温度的分布,并将各物理量的分布绘出图形,通过对图像的分析,得到了各物理量随着角速度、分数阶参数变化的动态响应,本文为纤维增强材料在力学方面的相关研究提供了新的应用理论。

2. 基本方程

Belfed 等提出了纤维增强各向异性弹性介质的本构方程:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_T e_{ij} + \xi (a_k a_m e_{km} \delta_{ij} + a_i + a_j + e_{kk}) + \zeta a_k a_m e_{km} a_i a_j + 2(\mu_L - \mu_T)(a_i a_k e_{kj} + a_j a_k e_{ki}) - \gamma(T - T_0) \delta_{ij} \quad (1)$$

式中, σ_{ij} 为应力分量; e_{ij} 为应变分量; λ, μ_T 为弹性常数; a 为纤维方向, 同时 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i, \alpha_i$ 为热膨胀系数; $\zeta, \xi, (\mu_L - \mu_T)$ 为增强参数; 本文选用的纤维方向 $a \equiv (1, 0, 0)$ 。

应变位移关系

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

对于二维问题, 位移矢量分量可假设为 $u_1 = u(x, y, t), u_2 = v(x, y, t), u_3 = 0$, 同时假设解与坐标 z 无关。由方程(1)得到:

$$\sigma_{xx} = A_1 u_{,x} + A_2 v_{,y} - \gamma(T - T_0) \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = A_3 v_{,y} + A_2 u_{,x} - \gamma(T - T_0) \quad (4)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda v_{,y} + A_2 u_{,x} - \gamma(T - T_0) \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = \mu_L (u_{,y} + v_{,x}), \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (6)$$

其中, $A_1 = \lambda + 2(\xi + \mu_T) + 4(\mu_L - \mu_T) + \zeta, A_2 = \lambda + \xi, A_3 = \lambda + 2\mu_T$ 。

分数阶广义热弹性理论下的热传导方程

$$\kappa \theta_{,ij} = \left(1 + \frac{\tau_0^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \left(\rho C e \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma_{ij} \dot{u}_{i,j} \right) \quad (7)$$

其中, ρ 为材料密度; τ_0 为热松弛时间参数; κ 为导热张量; Ce 为恒应变比热; T 为参考温度; θ 为温度增量; α 为分数阶参数。

3. 热弹性问题描述

该模型受到旋转作用, 其中角速度为 $\Omega = n\Omega$, n 为沿旋转轴方向的单位矢量, 因此上述运动方程含有附加项: 并且向心加速度 $\Omega \times (\Omega \times u)$, Corioli 加速度为 $2(\Omega \times \dot{u})$ 。式中 u 表示动态位移矢量。

基于广义热弹性耦合理论, 旋转模型的运动方程:

$$\rho [\ddot{u}_i + (\Omega \times (\Omega \times u) + 2(\Omega \times \dot{u}))_i] = \sigma_{ij,j}, (i, j = 1, 2, 3) \quad (8)$$

将方程(3)~(6)代入(8)式得

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu_L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Omega^2 u - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (9)$$

$$\mu_L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Omega^2 v + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (10)$$

其中, $A_4 = A_2 + \mu_L$ 。

使用以下无量纲变量

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\eta_0}{c_0} x, y' = \frac{\eta_0}{c_0} y, u' = \frac{\rho c_0 \eta_0}{\gamma T_0} u, v' = \frac{\rho c_0 \eta_0}{\gamma T_0} v, t' = \eta_0 t, \tau_0 = \eta_0 \tau_0 \\ \Omega' &= \frac{\Omega}{\eta_0}, \theta' = \frac{\theta}{T_0}, \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\gamma T_0}, (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\eta_0 = \frac{\lambda Ce}{\kappa}, c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu_T}{\rho}$ 。

依据上式, 对控制方程进行了无量纲化, 同时为了方便省略“'”, 得到如下方程:

$$h_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + h_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Omega^2 u - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \quad (12)$$

$$h_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Omega^2 v + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \left(1 + \frac{\tau_0^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[h_{12} \theta + h_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], (0 < \alpha \leq 1) \quad (14)$$

其中, $h_{11} = \frac{A_1}{A_3}, h_{22} = \frac{A_4}{A_3}, h_{23} = \frac{\mu_L}{A_3}, h_{12} = \frac{\rho c_0^2 Ce}{\kappa \eta_0}, h_{13} = \frac{\gamma^2 T_0}{\rho \kappa \eta_0}$ 。

$$\sigma_{xx} = h_{11} u_{,x} + \frac{A_2}{A_3} v_{,y} - \theta \quad (15)$$

$$\sigma_{yy} = v_{,y} + \frac{A_2}{A_3} u_{,x} - \theta \quad (16)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{A_3} v_{,y} + \frac{A_2}{A_3} u_{,x} - \theta \quad (17)$$

$$\sigma_{xy} = h_{23} (u_{,y} + v_{,x}), \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (18)$$

4. 正则模态分析

正则模态分析能够给出介质中各物理量的精确解, 并且给出的解不受位移、温度、应力分布的假设限制的影响。正则模态分析实际上是在傅里叶变换域内寻找解, 并假设所有的场量在变化过程中足够平滑, 那么这样函数的正则模态分析就一定存在。文中所考虑物理变量的解可表示为正则模态:

$$[u, v, \theta](x, y, t) = [u^*(x), v^*(x), \theta^*(x)] e^{a y + i \omega t} \quad (19)$$

其中, a 是 y 方向上的波数, ω 是时间常数, $i = \sqrt{-1}$, $u^*(x), v^*(x), \theta^*(x)$ 为场量的振幅。

将(19)式代入(12)~(14)式得:

$$(h_{11} D^2 - A_5) u^* + (2\Omega \omega + i a h_{22} D) v^* - D \theta^* = 0 \quad (20)$$

$$(h_{23} D^2 - A_6) v^* + (i a h_{22} D - 2\Omega \omega) u^* - i a \theta^* = 0 \quad (21)$$

$$A_7 D u^* + A_8 v^* + (A_9 - D^2) \theta^* = 0 \quad (22)$$

其中

$$A_5 = \omega^2 - \Omega^2 + h_{23} a^2, A_6 = \omega^2 - \Omega^2 + a^2, A_7 = h_{13} \omega \left(1 + \frac{\tau_0^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \omega^\alpha \right)$$

$$A_8 = i a A_7, A_9 = \frac{h_{12}}{h_{13}} A_7 + a^2$$

消去(20)~(22)式中 u^*, v^* 和 θ^* 中的任意两个, 得到

$$[D^6 + B_2 D^4 + B_1 D^2 + B_0] \{u^*(x), v^*(x), \theta^*(x)\} = 0 \quad (23)$$

其中

$$B_2 = -\frac{1}{h_{11}h_{23}}(A_6h_{11} - a^2h_{22}^2 + A_5h_{23} + A_7h_{23} + A_9h_{11}h_{23})$$

$$B_1 = \frac{1}{h_{11}h_{23}}(A_8ah_{22}i - A_7a^2h_{22} - A_9a^2h_{22}^2 - A_8ah_{11}i + 4\Omega^2\omega^2 + A_5A_6 + A_6A_7 + A_6A_9h_{11} + A_5A_9h_{23})$$

$$B_0 = \frac{1}{h_{11}h_{23}}(A_5A_8ai - A_5A_6A_9 - 4A_9\Omega^2\omega^2)$$

方程(23)的特征方程如下:

$$m^6 + B_2m^4 + B_1m^2 + B_0 = 0 \tag{24}$$

上述特征方程的根为 $m_j^2 (j=1,2,3)$ 。对于边界条件 $x \rightarrow \infty$ 时, 方程(23)式的解给出如下:

$$\{\theta^*(x), u^*(x), v^*(x)\} = \sum_{j=1}^3 \{C_j^1, C_j^2, C_j^3\} e^{-m_j x} \tag{25}$$

其中 $C_j^k (j,k=1,2,3)$ 的数值依赖于 a 和 ω 。联立方程(26)和方程(20)~(21)得

$$\{C_j^2, C_j^3\} = \{\beta_j^2, \beta_j^3\} C_j^1, (j=1,2,3) \tag{26}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} \beta_j^2 \\ \beta_j^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}m_j^2 - A_5 & 2\Omega\omega - ia h_{22}m_j \\ -2\Omega\omega - ia h_{22}m_j & h_{23}m_j^2 - A_6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -m_j \\ ia \end{Bmatrix} \tag{27}$$

因此温度和位移的解可表示为:

$$\{\theta, u, v\}(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 \{1, \beta_j^2, \beta_j^3\} C_j^1 e^{iay - m_j x + \omega t} \tag{28}$$

将(28)式代入(15)~(18)式, 因此整理可得应力的表达式如下:

$$\sigma_{xx} = \sum_{j=1}^3 \left[-h_{11}m_j\beta_j^2 + \frac{A_2}{A_3} ia\beta_j^3 - 1 \right] C_j^1 e^{iay - m_j x + \omega t} \tag{29}$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{j=1}^3 \left[-\frac{A_2}{A_3} m_j\beta_j^2 + ia\beta_j^3 - 1 \right] C_j^1 e^{iay - m_j x + \omega t} \tag{30}$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{j=1}^3 \left[-\frac{A_2}{A_3} m_j\beta_j^2 + \frac{\lambda}{A_3} ia\beta_j^3 - 1 \right] C_j^1 e^{iay - m_j x + \omega t} \tag{31}$$

$$\sigma_{xy} = h_{23} \sum_{j=1}^3 [ia\beta_j^2 - m_j\beta_j^3] C_j^1 e^{iay - m_j x + \omega t} \tag{32}$$

5. 边界条件

应用 $z=0$ 表面的边界条件, 求取参数 $C_j^1, (j=1,2,3)$ 。

应力边界条件:

图 1 中, 假定在 $z=0$ 的表面随时间变化, 大小为 p 的周期力, 只产生正应力, 则

$$\sigma_{xy}(0, y, t) = 0, \sigma_{yy}(0, y, t) = -pe^{iay + \omega t} \tag{33}$$

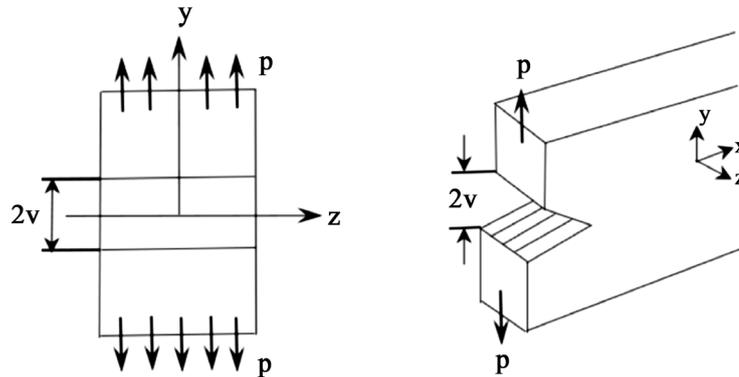


Figure 1. Mode I crack model
图 1. I 型裂纹模型

温度边界条件:

同样, 在 $z=0$ 表面假设为恒温状态, 并且温度大小为 f , 同时 θ 对 z 的一阶偏导数为零, 则有

$$\theta(0, y, t) = fe^{iay+\omega t} \tag{34}$$

将应力 $(\sigma_{xy}, \sigma_{yy})$ 、温度 θ 的表达式与边界条件(33)、(34)式联立, 可得

$$\begin{cases} C_1^1 \\ C_2^1 \\ C_3^1 \end{cases} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} 0 \\ -p \\ f \end{cases} \tag{35}$$

其中 $R_j = h_{23}(ia\beta_j^2 - m_j\beta_j^3)$, $S_j = \left(-\frac{A_2}{A_3}m_j\beta_j^2 + ia\beta_j^3 - 1\right)$, $(j=1,2,3)$ 。

因此可得到温度、应力和位移的表达式。

6. 数值结果及讨论

利用上述理论, 参考论文[14]给出具体计算实例, 得到计算结果。计算中取以下物理常数:

$$\begin{aligned} \lambda &= 7.59 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \mu_T = 1.89 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \mu_L = 2.45 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \\ \xi &= -1.28 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \zeta = 0.32 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \\ \alpha_t &= 1.78 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2, k = 386, Ce = 383.1, \tau_0 = 0.02, a = 1, \\ T_0 &= 293 \text{ K}, p = 2, f = 1, \omega = \omega_0 + i\zeta, \omega_0 = 2, \zeta = 1, \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2 \end{aligned}$$

取计算时间 $t=0.9$, 得出了不同分数阶参数下, 无量纲温度、应力和位移的分布。选取分数阶参数值为 $\alpha=0.4$, $\alpha=0.6$ 和 $\alpha=1$, 同时计算不同角速度 $\Omega(\Omega=0, \Omega=0.5, \Omega=1)$ 和不同 $y(y=1, y=1.5, y=2)$ 时, 得到了对应无量纲位移、应力和温度的无量纲分布, 如图 2~19 所示。

图 2~7 给出了 $y=1, \Omega=0.5$, 并且考虑三个不同的 $\alpha(\alpha=0.4, \alpha=0.6, \alpha=1)$ 值计算得到无量纲位移、温度和应力在 x 轴上的分布。

图 8~13 给出了 $y=1, \alpha=0.5$ 时, 根据三个不同的 $\Omega(\Omega=0, \Omega=0.5, \Omega=1)$ 值, 得到无量纲位移、温度和应力在 x 轴上的分布。图 14~19 给出了 $\Omega=0.5, \alpha=0.5$ 时, 考虑三个不同的 $y(y=1, y=1.5, y=2)$ 值, 无量纲应力、位移和温度在 x 轴上的变化。

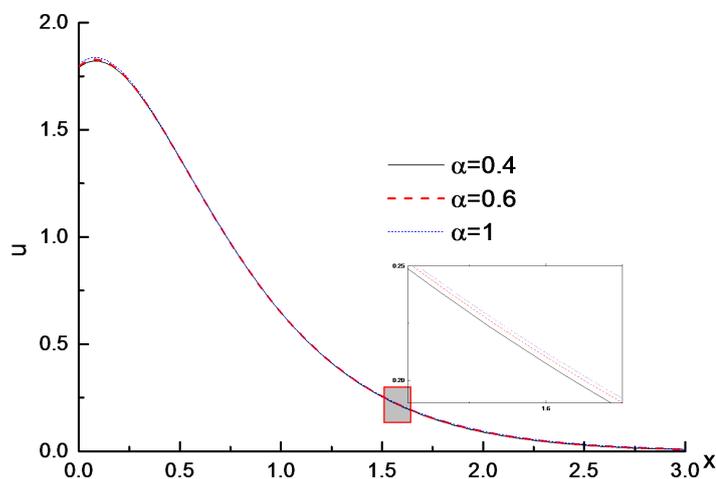


Figure 2. Distribution of dimensionless displacement u on x axis when α takes different values
图 2. α 取不同值, 无量纲位移 u 在 x 轴上的分布

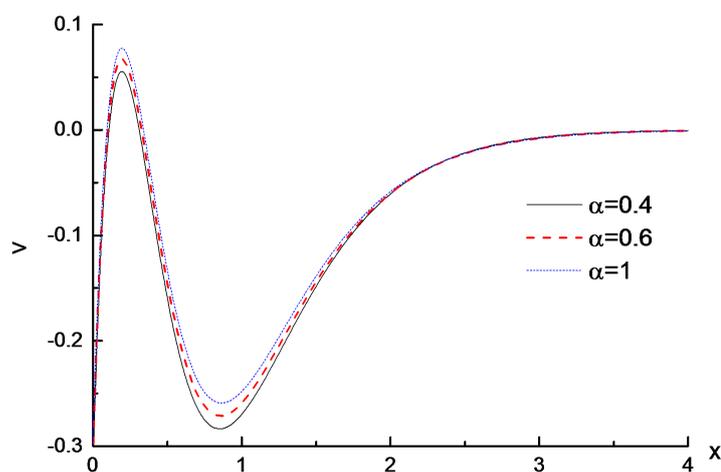


Figure 3. Distribution of dimensionless displacement v on x axis when α takes different values
图 3. α 取不同值, 无量纲位移 v 在 x 轴上的分布

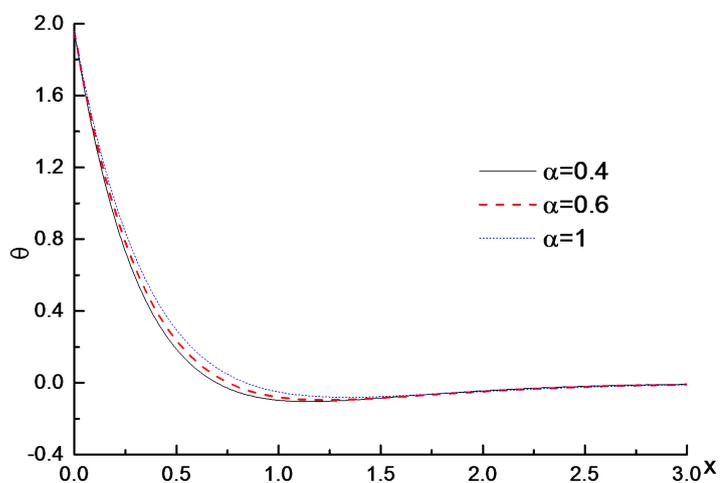


Figure 4. Distribution of dimensionless temperature θ on x axis when α takes different values
图 4. α 取不同值, 无量纲温度 θ 在 x 轴上的分布

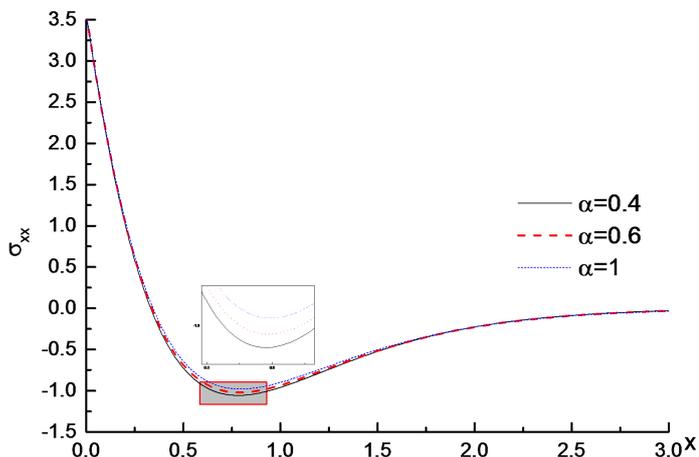


Figure 5. Distribution of dimensionless stress σ_{xx} on x axis with different values of α
图 5. α 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 在 x 轴上的分布

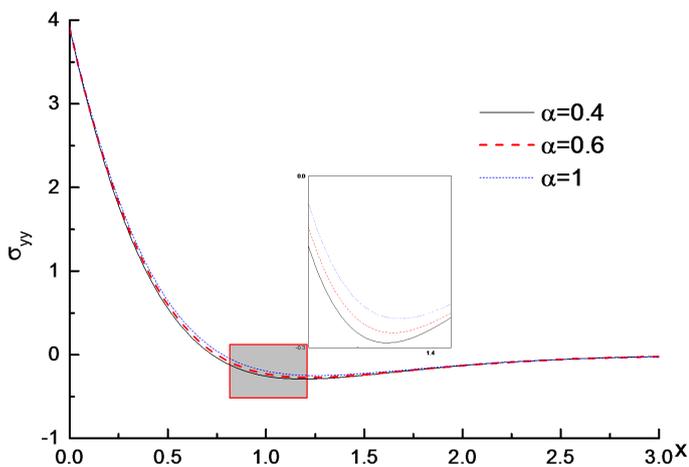


Figure 6. Distribution of dimensionless stress σ_{yy} on x axis with different values of α
图 6. α 取不同值, 无量纲应力 σ_{yy} 在 x 轴上的分布

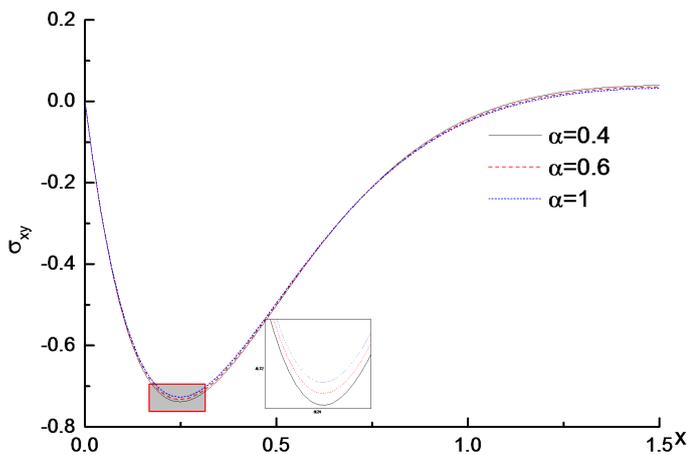


Figure 7. Distribution of dimensionless stress σ_{xy} on x axis with different values of α
图 7. α 取不同值, 无量纲应力 σ_{xy} 在 x 轴上的分布

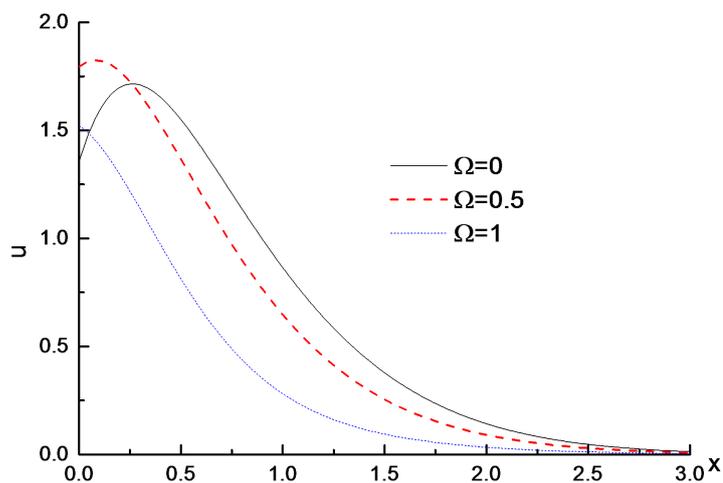


Figure 8. Distribution of dimensionless displacement u on x axis when Ω takes different values
图 8. Ω 取不同值, 无量纲位移 u 在 x 轴上的分布

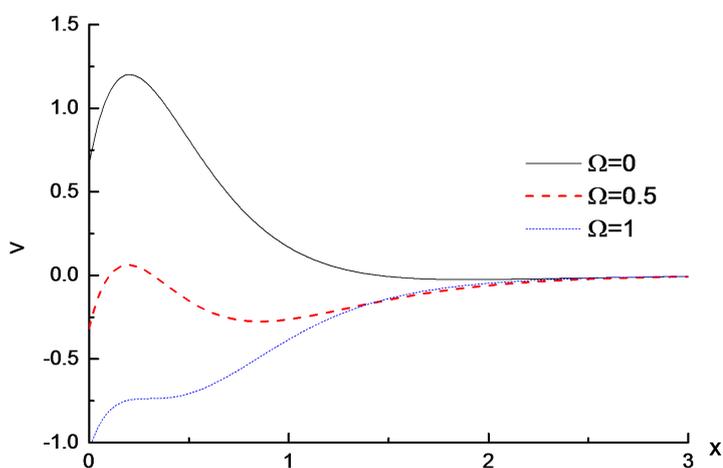


Figure 9. Distribution of dimensionless displacement v on x axis when Ω takes different values
图 9. Ω 取不同值, 无量纲位移 v 在 x 轴上的分布

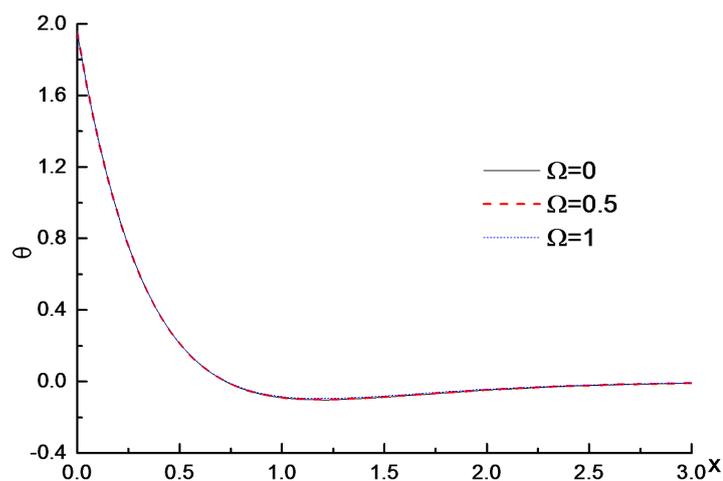


Figure 10. Distribution of dimensionless temperature θ on x axis when Ω takes different values
图 10. Ω 取不同值, 无量纲温度 θ 在 x 轴上的分布

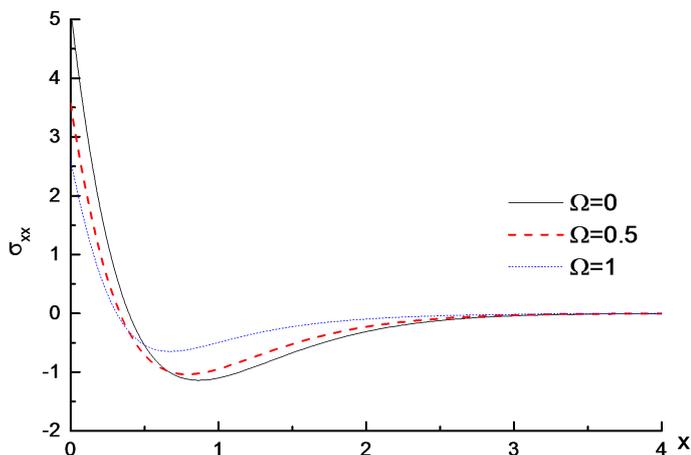


Figure 11. Distribution of dimensionless stress σ_{xx} on x axis with different values of Ω
图 11. Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 在 x 轴上的分布

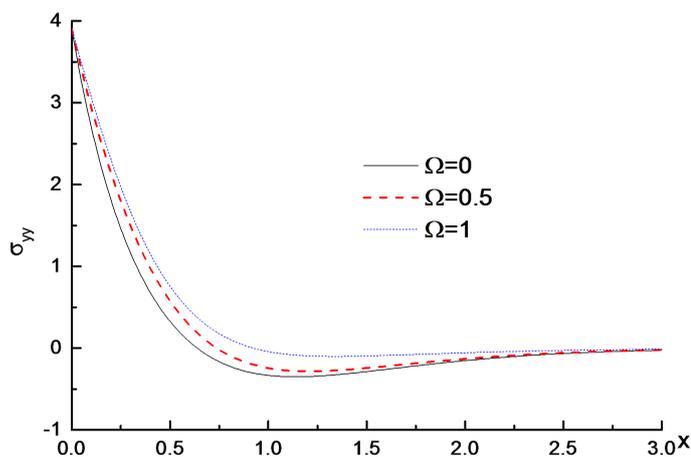


Figure 12. Distribution of dimensionless stress σ_{yy} on x axis with different values of Ω
图 12. Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{yy} 在 x 轴上的分布

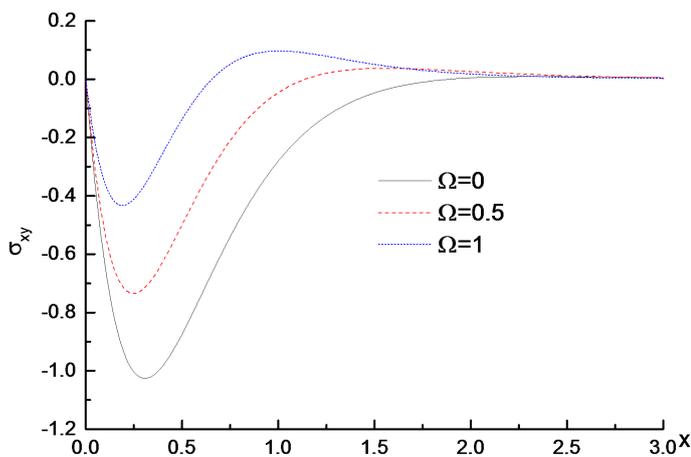


Figure 13. Distribution of dimensionless stress σ_{xy} on x axis with different values of Ω
图 13. Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{xy} 在 x 轴上的分布

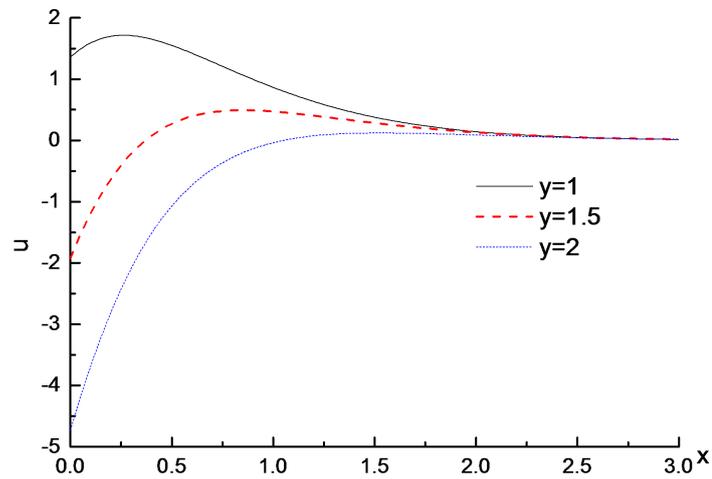


Figure 14. Distribution of dimensionless displacement u on x axis when y takes different values
图 14. y 取不同值, 无量纲位移 u 在 x 轴上的分布

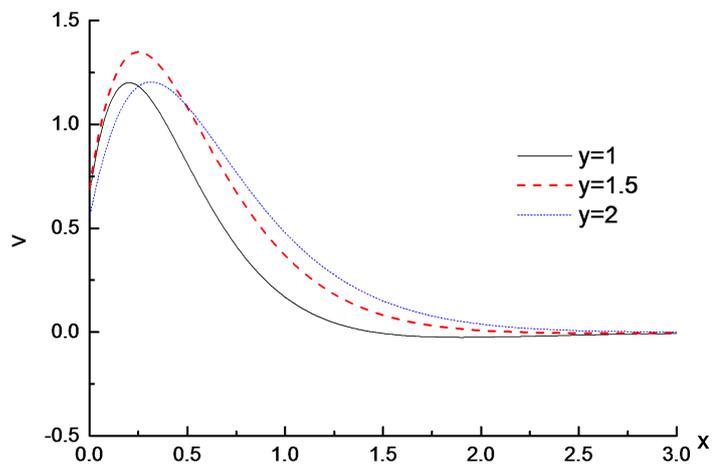


Figure 15. Distribution of dimensionless displacement v on x axis when y takes different values
图 15. y 取不同值, 无量纲位移 v 在 x 轴上的分布

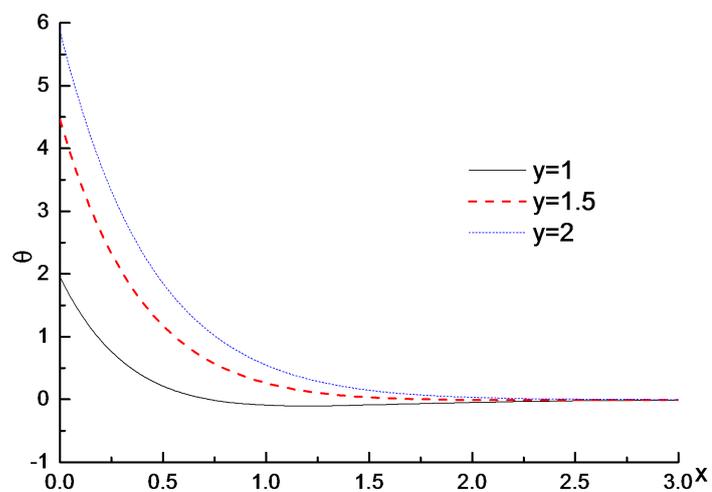


Figure 16. Distribution of dimensionless temperature θ on x axis when y takes different values
图 16. y 取不同值, 无量纲温度 θ 在 x 轴上的分布

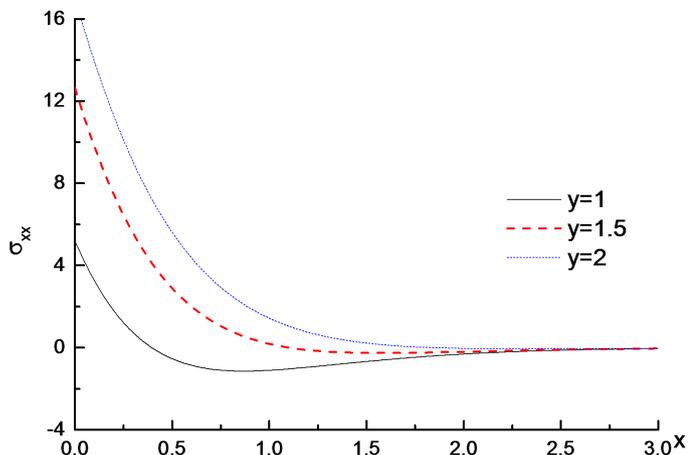


Figure 17. Distribution of dimensionless stress σ_{xx} on x axis with different values of y
图 17. y 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 在 x 轴上的分布

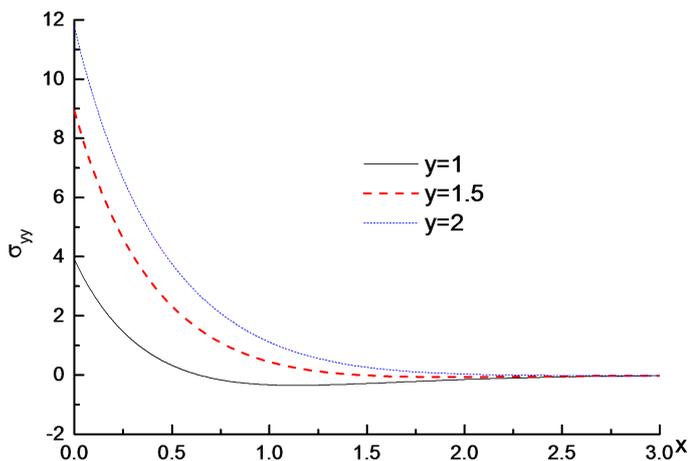


Figure 18. Distribution of dimensionless stress σ_{yy} on x axis with different values of y
图 18. y 取不同值, 无量纲应力 σ_{yy} 在 x 轴上的分布

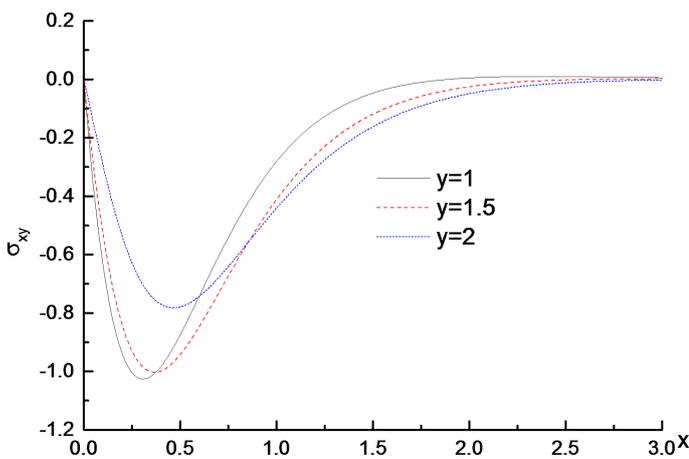


Figure 19. Distribution of dimensionless stress σ_{xy} on x axis with different values of y
图 19. y 取不同值, 无量纲应力 σ_{xy} 在 x 轴上的分布

图 2 所示, 分数阶参数取不同值, 无量纲位移 u 沿 x 轴的分布。可知位移 u 在边界上有最大值, 说明在裂纹开始处的位移 u 最大, 然后随着 x 值增加逐渐减小, 最终收敛于零。由局部放大图可知, 同一位置处, 分数阶参数的值越小, 预测得到的位移 u 的数值也越小, 说明不同分数阶参数的值对位移 u 的预测结果不同。图 3 显示无量纲位移 v 在 x 轴上的分布, 由图观察可知位移 v 在边界处取得最小值, 在 x 轴上呈波动趋势, 最终收敛于零。分数阶参数值越大, 预测的位移 v 的值越小。正是由于各向异性纤维增强材料在两个方向上的材料特性不同, 可知该纤维增强材料更倾向于抵抗垂直位移, 因此该材料在两个方向上的位移分布表现不同。

图 4 显示分数阶参数不同, 无量纲温度 θ 在 x 轴上的分布情况。可知温度 θ 在边界上取得最大值, 随着 x 值的增加逐渐减小, 最终收敛于零, 这是由于边界处距离热源最近, 随着 x 远离热源, 温度逐渐减小。并且在 x 取相同值, 分数阶参数越大时预测的温度值越高。图 5 显示分数阶参数不同, 无量纲应力 σ_{xx} 沿 x 轴的分布。由图可知, 在边界处应力 σ_{xx} 取得最大值, 随着远离边界应力 σ_{xx} 逐渐减小, 在 $x \approx 0.75$ 处, 达到最小值, 然后逐渐增加, 最后收敛于零; 在相同位置处, 分数阶参数值越大预测的应力 σ_{xx} 值也越大。

图 6 显示不同分数阶参数下, 无量纲应力 σ_{yy} 沿 x 轴的分布, 由图能够看出应力 σ_{yy} 在边界处取得最大值, 然后随着 x 远离边界而逐渐减小, 在 $x \approx 1.2$ 处达到最小值, 随后逐渐增加, 最终收敛于零。在 $x \approx 1$ 附近, 分数阶参数值越大, 所预测的应力 σ_{yy} 值越小。将应力 σ_{yy} 与应力 σ_{xx} 的分布对比, 可知由于在两个方向上的材料特性不同, 造成应力在两个方向上的分布不同。图 7 显示分数阶参数不同, 无量纲应力 σ_{xy} 的分布, 可知应力 σ_{xy} 在边界处取值为零, 由于该模型在边界上无切应力, 因此满足边界条件, 然后随着 x 远离边界, 应力 σ_{xy} 取值逐渐减小, 在 $x \approx 0.25$ 位置, 应力 σ_{xy} 达到最小值, 然后逐渐增大, 最终收敛于零, 并且分数阶参数的值越大, 预测的应力 σ_{xy} 值越大。应力 σ_{xy} 的分布趋势, 满足各向异性材料的热弹性性质, 也满足该模型的边界条件, 因此分布情况是合理的。

图 2~7 表明分数阶参数的不同, 对物理量的预测结果不同, 即物理量的分布不同。各物理量在 x 轴上的分布变化, 都满足材料特性和边界条件。

图 8 显示 Ω 取不同值, 无量纲位移 u 沿 x 轴的分布, 位移 u 始终为正值, 并且随着 x 远离边界逐渐减小, 最终收敛于零。在远离边界位置, Ω 值越大预测的位移 u 的结果越小, 这表明旋转效应减小位移 u 的值。图 9 显示 Ω 值越大预测的无量纲位移 v 越小, 但是 Ω 取不同值, 位移 v 的分布趋势不变, 并且最终都收敛于零, 因此旋转角速度的增加, 减小位移 v 的幅值。通过其与图 8 对比, 由于各向异性材料在两个方向上的材料参数不同, 因此引起的位移分布不同。图 10 显示 Ω 取不同值, 无量纲温度 θ 的分布无改变, 因此旋转效应不影响介质中的温度分布, 即温度的分布不受旋转效应的影响。

图 11 显示 Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 的分布。由图可知, Ω 不改变应力 σ_{xx} 的走势, 在 $x \approx 0.75$ 处, 应力取得最小值, 并且 Ω 值越大, 应力 σ_{xx} 绝对值越小, 旋转效应的存在, 减小应力 σ_{xx} 的幅值。图 12 显示 Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{yy} 都在边界位置取得最大值, 随着 x 远离边界, 逐渐减小最后收敛于零。在 x 取值相同时, Ω 值越大, 预测应力 σ_{yy} 值也越大。图 13 显示 Ω 取不同值, 无量纲应力 σ_{xy} 沿 x 轴的分布, 由图可知, 在边界位置应力 σ_{xy} 为零, 之后递减达到最小值后逐渐增加, 最终收敛于零, Ω 取不同值, 不改变应力 σ_{xy} 的走势, 只影响其最小值。随着旋转角速度的增加, 应力 σ_{xy} 的振幅减小, 说明旋转效应对应力 σ_{xy} 有显著影响。

图 8~13 表明旋转效应的存在减小应力、位移的振幅, 不影响温度的分布, 即温度分布不受弹性体旋转的影响, 而应力、位移的分布受旋转效应的影响显著。同时, 由于两个方向上的材料特性不同, 旋转对两个方向上应力、位移的影响也有差别。

图 14 显示 y 取不同值, 无量纲位移 u 沿 x 轴的分布。由图可知, x 取相同值, 随着 y 值增加, 位移 u 减小, 说明外载荷在距离较远位置对位移产生的影响变小。 y 取值不同, 不改变位移 u 的分布趋势, 随着 x

远离边界, 位移 u 最终收敛于零。图 15 显示 y 取不同值时, 无量纲位移 v 呈先增大后减小的分布趋势, 最终收敛于零。在远离边界的位置, y 值越大位移 v 越大, 这是由于材料在两个方向上的材料参数不同导致的。图 16 显示 y 取不同值, 无量纲温度 θ 在 x 轴上的分布, 由图可知, 在边界处温度达到最大值, 然后减小, 最终趋向于零。这是由于在边界处距离热源最近, 产生的温度最大。在 x 取相同位置, y 越大的位置, 预测的温度 θ 值越大。图 17 显示 y 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 沿 x 轴分布情况。应力 σ_{xx} 在边界位置有最大值, 远离边界逐渐减小最终收敛于零。 y 取不同值, 只影响其大小, 不影响其分布走势。在 x 轴相同位置, y 取值越小, 相应的应力 σ_{xx} 越小。图 18 显示无量纲应力 σ_{yy} 沿 x 轴分布, 图形分布趋势与应力 σ_{xx} 相似, 都是在边界位置取得最大值, 之后逐渐减小, 最终都收敛于零。在 x 轴相同位置, y 值越大, 对应应力 σ_{yy} 值越小。图 19 显示无量纲应力 σ_{xy} 沿 x 轴分布趋势。由图可知, 在边界位置应力 σ_{xy} 为零, 之后逐渐减小, 在 $x \approx 0.4$ 位置达到最小值, 同时 y 值越小, 得到的最小值也越小, 最后逐渐增加并收敛于零。应力 σ_{xy} 的分布趋势符合应力 σ_{xy} 边界上为零的边界条件, 也符合纤维增强材料中切应力的分布规律。

图 14~19 表明半无限大纤维增强弹性体的位置不同, 各物理量的分布不同, 由于外载荷引起的动态响应在传播过程中的不同, 弹性体中各物理量的分布与弹性的空间位置有关。

取 $\Omega = 0, \alpha = 0.5$, 在 x 轴固定位置($x=1$ 和 $x=1.4$), 给出无量纲位移 u 、 v 和应力 σ_{xx} 随时间 t 的变化情况, 如图 20~22 所示。

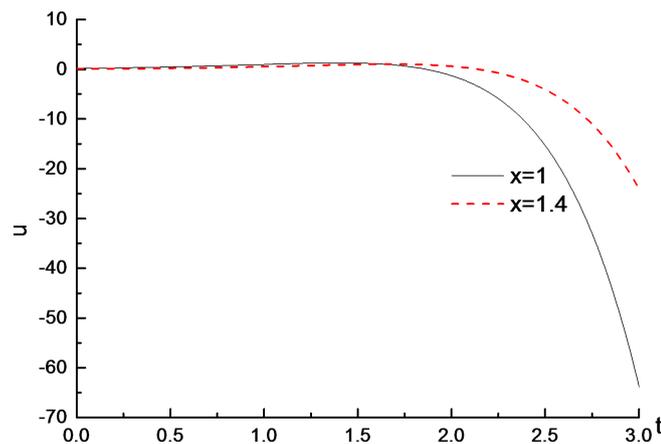


Figure 20. When x takes different values, the dimensionless displacement u changes with time t
 图 20. x 取不同值, 无量纲位移 u 随时间 t 的变化

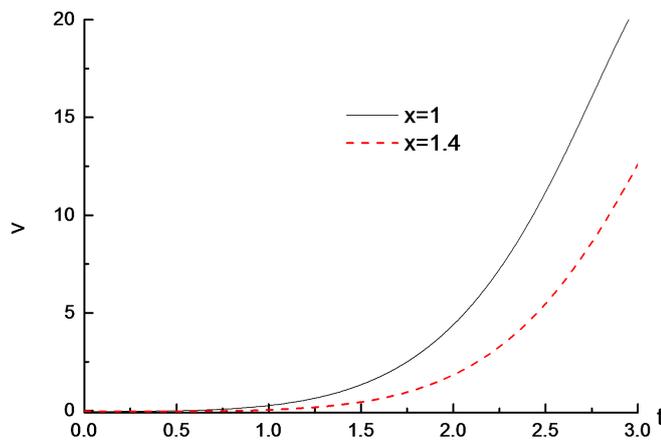


Figure 21. When x takes different values, the dimensionless displacement v changes with time t
 图 21. x 取不同值, 无量纲位移 v 随时间 t 的变化

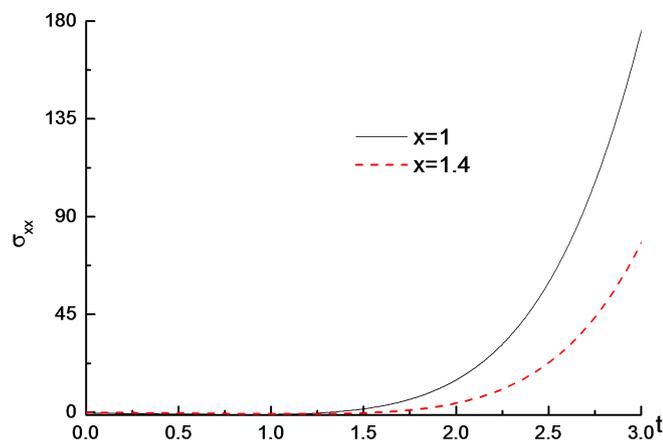


Figure 22. The change of dimensionless stress σ_{xx} with time t when x is different

图 22. x 取不同值, 无量纲应力 σ_{xx} 随时间 t 的变化

如图 20 所示, 在 x 轴上固定位置, 无量纲位移 u 随时间的变化, 从零开始, 随时间增加逐渐减小。图 21 所示, 在 x 轴上固定位置处, 无量纲垂直位移 v 最初为零, 随时间 t 的增加逐渐增大。这是由于在研究的弹性介质中, 弹性体在两个方向上的材料特性不同导致的。因此纤维增强弹性体在两个方向上位移表现出不同力学行为。在 x 轴不同位置, 位移随时间变化不同, 距离热源越远位置, 热膨胀变形时间越晚, 相应位移绝对值越小, 反映出热波在弹性体中传播速度有限。图 22 显示 x 轴固定位置处, 无量纲应力 σ_{xx} 随时间的变化。结果表明距离热源较近位置, 应力 σ_{xx} 随时间变化梯度较大, 但是具有相同变化趋势。

由于时间不同, 各物理量的分布不同, 因此能够得出弹性体中波的传播速度是有限的, 同时各物理量的分布与时间有关。

7. 结论

本章基于分数阶广义热弹性理论, 得到正则模态分析法的解析解, 使正则模态法的应用得到发展, 同时得到各物理量在距离裂纹边缘不同距离的分布情况。本章研究了不同参数, 如分数阶参数、旋转效应, 对各物理量的影响, 并将研究结果与论文[14]结果进行了相关比较。结果表明:

- 1) 分数阶参数的不同导致预测的结果不同, 因此不同分数阶参数下, 对弹性体内物理量的分布预测结果不同。例如, 不同分数阶参数下, 位移 v 、温度、应力的分布不同;
- 2) 由于转速影响物理量的振幅, 大多数物理量随着转速的增加, 振幅减小。因此可得旋转效应的存在该模型中具有重要意义;
- 3) 不同分数阶参数下, 无量纲位移、温度、应力的分布不同, 在相同分数阶参数下, 各物理量的分布随着坐标值得增加而变化。因此, 各物理量的大小及分布, 不仅取决于分数阶参数, 还受时间和空间变量的影响;
- 4) 各物理量的大小随着距离远离边界都趋向于零, 表明在半无限大弹性体中, 外力冲击仅在一定范围内形成影响, 并不能无限传播, 这与材料中物理量传播的事实是一致的, 同时所有表示物理量的函数都是连续的, 表明各物理量在传播过程中不会产生突变, 这也符合纤维增强材料的材料特性。

参考文献

- [1] Belfield, A.J., Rogers, T.G. and Spencer, A.J.M. (1983) Stress in Elastic Plates Reinforced by Fibres Lying in Concentric Circles. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, **31**, 25-54. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(83\)90018-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(83)90018-2)

- [2] Verma, P.D.S. (1986) Magnetoelastic Shear Waves in Self-Reinforced Bodies. *International Journal of Engineering Science*, **24**, 1067-1073. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(86\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(86)90002-9)
- [3] Chattopadhyay, A. and Choudhury, S. (1995) Magnetoelastic Shear Waves in an Infinite Self-Reinforced Plate. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **19**, 289-304. <https://doi.org/10.1002/nag.1610190405>
- [4] Sengupta, P.R. and Nath, S. (2001) Surface Waves in Fibre-Reinforced Anisotropic Elastic Media. *Sadhana*, **26**, 363-370. <https://doi.org/10.1007/BF02703405>
- [5] Sethi, M., Gupta, M., Gupta, K.C., et al. (2012) Surface Waves in Fibre-Reinforced Anisotropic Solid Elastic Media under the Influence of Gravity. *Journal of the Mechanical Behaviour of Materials*, **20**, 81-85. <https://doi.org/10.1515/jmbm.2011.017>
- [6] Othman, M.I.A. (2004) Effect of Rotation on Plane Waves in Generalized Thermo-Elasticity with Two Relaxation Times. *International Journal of Solids and Structures*, **41**, 2939-2956. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.01.009>
- [7] Othman, M.I.A. and Song, Y. (2008) Effect of Rotation on Plane Waves of Generalized Electro-Magneto-Thermoviscoelasticity with Two Relaxation Times. *Applied Mathematical Modelling*, **32**, 811-825. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.02.025>
- [8] Kumar, R. and Kansal, T. (2010) Effect of Rotation on Rayleigh-Lamb Waves in an Isotropic Generalized Thermoelastic Diffusive Plate. *Journal of Applied Mechanics & Technical Physics*, **51**, 751-761. <https://doi.org/10.1007/s10808-010-0095-x>
- [9] Ailawalia, P., Kumar, S. and Khurana, G. (2009) Deformation in a Generalized Thermoelastic Medium with Hydrostatic Initial Stress Subjected to Different Sources. *Mechanics and Mechanical Engineering*, **13**, 5-24.
- [10] Alshaikh and Fatimah (2017) Velocities of Plane Waves in the Generalized Thermo-Piezoelectric Materials under the Effect of Rotation. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, **14**, 5952-5956. <https://doi.org/10.1166/jctn.2017.7040>
- [11] Sur, A. and Kanoria, M. (2015) Analysis of Thermoelastic Response in a Functionally Graded Infinite Space Subjected to a Mode-I Crack. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **3**, 33-44.
- [12] Abbas, I.A. and Alzahrani, F.S. (2018) A Green-Naghdi Model in a 2D Problem of a Mode I Crack in an Isotropic Thermoelastic Plate. *Physical Mesomechanics*, **21**, 99-103. <https://doi.org/10.1134/S1029959918020017>
- [13] Prasad, R., Das, S. and Mukhopadhyay, S. (2013) A Two-Dimensional Problem of a Mode I Crack in a Type III Thermoelastic Medium. *Mathematics & Mechanics of Solids*, **18**, 506-523.
- [14] 刘泽权. 基于分数阶热弹理论的二维多场耦合问题研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州理工大学, 2019.