**Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1381-1391**
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128151

# 空间非齐次一维三态量子游荡的一致平稳测度

**叶 鹏，张丽霞，王才士**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年7月19日；录用日期：2022年8月19日；发布日期：2022年8月31日

## 摘 要

本文研究了空间非齐次三态量子游荡在直线和环上的一致平稳测度。首先，利用直线上的转移矩阵处理了演化矩阵的特征值问题并给出了相应的特征向量，得到该量子游荡在直线上具有一致平稳测度，另外还给出了空间非齐次三态量子游荡在直线上演化矩阵的周期性表示；在此基础上，将游荡的位置空间限制到环上，证明了环上一致平稳测度的存在性并给出了表示。

## 关键词

量子游荡，非齐次，平稳测度，一致测度

# Uniform Stationary Measure of Space-Inhomogeneous One-Dimensional Three-State Quantum Walks

**Peng Ye, Lixia Zhang, Caishi Wang**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 19$^{th}$, 2022; accepted: Aug. 19$^{th}$, 2022; published: Aug. 31$^{st}$, 2022

文章引用: 叶鹏, 张丽霞, 王才士. 空间非齐次一维三态量子游荡的一致平稳测度[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1381-1391. DOI: 10.12677/pm.2022.128151

## Abstract

**In this paper, we consider the uniform stationary measure of space-inhomogeneous three state quantum walks on the line and cycles. Firstly, the eigenvalue problem is solved by transfer matrix and the corresponding uniform stationary measure is given on the line. In addition, we give the periodic representation of the evolution matrix under the model on the line. Then, we show the uniform stationary measure of the cycles by restricting the position space to the cycles.**

## Keywords

**Quantum, Inhomogeneous, Stationary Measure, Uniform Measure**



## 1. 引言

量子游荡作为经典随机游荡的量子类似物, 自 1993 年由Aharonov [1]提出以来, 一直受到人们的广泛关注 [2–11]. 量子游荡主要分为离散时间量子游荡和连续时间量子游荡, 本文主要研究离散时间量子游荡. 量子游荡的渐进行为主要体现在平稳测度, 时间平均极限测度, 弱极限测度三个方面, 其中时间平均极限测度和弱极限测度分别体现了量子游荡的局部化存在性和弹道行为. 离散时间量子游荡的平稳测度作为理解量子游荡渐进行为的重要途径, 一直备受关注. 2013 年 Konno [11]等人利用生成函数法处理特征值问题, 给出了直线上空间非齐次两态量子游荡的平稳测度, 该平稳测度与位置呈指数性衰减并没有一致测度. 2014 年Konno [12] 等人研究了直线上空间齐次三态量子游荡的一致平稳测度的存在性. 2017 年 Kawai [13]等人提出了不同于生成函数法的简化矩阵方法, 给出了直线上的空间齐次三态量子游荡的非一致平稳测度. 但对于非齐次情形并没有讨论, 那么对于空间非齐次三态量子游荡的一致平稳测度是否同样存在, 这是本文研究的主要问题. 本文利用 2019 年 Endo [14]等人的转移矩阵方法, 处理了演化矩阵的特征值问题并给出了相应的特征向量, 得到游荡在直线和环上一致平稳测度. 较 2014 年 Konno [12] 等人研究的直线上齐次三态量子游荡的一致平稳测度, 本文不仅证明了直线上非齐次三态量子游荡的一致平稳测度存在, 还给出得到了环上非齐次三态量子游荡的一致平稳测度及其表示, 及给出了直线上非齐次三态量子游荡的演化矩阵的周期

性表示.

本文的结构如下: 第一章引言. 第二章预备知识, 介绍了空间非齐次三态量子游荡和环的定义以及相关知识点. 第三章, 第一小节给出了空间非齐次三态量子游荡在直线上的一致平稳测度的存在性和量子游荡转移矩阵序列的周期性表示; 第二小节给出了空间非齐次三态量子游荡在环上的一致平稳测度的存在性及其表示.

## 2. 预备知识

量子游荡作为经典随机游荡的量子版本, 增加了额外的手性自由度. 两态的量子游荡增加了左手性和右手性. 在此基础上再增加一个中手性, 就得到了三态的量子游荡. 三态量子游荡手性态有左手性态, 中手性态, 右手性态. 每一个时间步长, 如果游荡有左手性, 则向左移动一步; 若游荡有右手性, 则向右移动一步; 如果游荡有中手性, 则停留在原地. 其中

$$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |O\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

分别表示表示左, 中, 右手性态. 空间非齐次三态量子游荡定义在整数集 $\mathbb{Z}$ 上, 由手性态空间 $|L\rangle$, $|O\rangle$, $|R\rangle$ 和位置空间 $|x\rangle : x \in \mathbb{Z}$ 进行刻画. 下面给出空间非齐次三态量子游荡的定义

**定义 2.1** [15] 空间非齐次三态量子游荡通常由一个 $3 \times 3$ 矩阵 $\mathrm{U}_x$ 确定, 其时间演化通过下面矩阵定义:

$$\mathrm{U}_x = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ d_x & e_x & f_x \\ g_x & h_x & i_x \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(3),$$

其中下标 $x \in \mathbb{Z}$ 代表位置; $a_x, b_x, c_x, d_x, e_x, f_x, g_x, h_x, i_x \in \mathbb{C}$. $\mathrm{U}(3)$ 是 $3 \times 3$ 矩阵 $\mathrm{U}_x$ 的集合.

设 $\mathbb{N}$ 是负整数集, 量子游荡在 $N$ $(N \in \mathbb{N})$ 时刻位于 $x$ $(x \in \mathbb{Z})$ 处的概率波幅表示为

$$\Psi_n(x) = (\Psi_n^L(x), \Psi_n^O(x), \Psi_n^R(x))^T \in \mathbb{C}^3,$$

其中 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 对每个位置 $x$, $\Psi_n(x)$ 有如下演化公式

$$\Psi_{n+1}(x) = P_{x+1}\Psi_n(x+1) + O_x\Psi_n(x) + Q_{x-1}\Psi_n(x-1), (x \in Z) \tag{2.1}$$

其中

$$P_x = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_x & e_x & f_x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_x & h_x & l_x \end{pmatrix}.$$

即 $\mathrm{U}_x = P_x + R_x + Q_x$, 容易验证空间非齐次量子游荡是依赖于位置的.

下面给出量子游荡在 $n$ 时刻的概率波幅

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \cdots, & \begin{pmatrix} \Psi_n^L(-1) \\ \Psi_n^O(-1) \\ \Psi_n^Q(-1) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Psi_n^L(0) \\ \Psi_n^O(0) \\ \Psi_n^Q(0) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Psi_n^L(1) \\ \Psi_n^O(1) \\ \Psi_n^Q(1) \end{pmatrix}, & \cdots \end{pmatrix}^T \in (C^3)^Z$$

另有酉矩阵

$$\mathrm{U}^s = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & R_{-2} & P_{-1} & O & O & O & \cdots \\ \cdots & Q_{-2} & R_{-1} & P_0 & O & O & \cdots \\ \cdots & O & Q_{-1} & R_0 & P_1 & O & \cdots \\ \cdots & O & O & Q_0 & R_1 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

其中

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对任意的 $n$ 时刻, 由酉矩阵 $\mathrm{U}^{(s)}$, 给出态的酉演化, $\Psi_n = (\mathrm{U}^{(s)})^n \Psi_0, n \geq 0$.

接下来给出平稳测度的定义, 先引入一个映射 $\phi : (\mathbb{C}^3)^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}, \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} = [0, \infty)$. 设

$$\Psi_n = (\cdots, \Psi_n(-1), \Psi_n(0), \Psi_n(1), \cdots)$$

其中

$$\Psi_n(-1) = (\Psi_n^L(-1), \Psi_n^O(-1), \Psi_n^Q(-1))^T;$$

$$\Psi_n(0) = (\Psi_n^L(0), \Psi_n^O(0), \Psi_n^Q(0))^T;$$

$$\Psi_n(1) = (\Psi_n^L(1), \Psi_n^O(1), \Psi_n^Q(1))^T.$$

则

$$\phi(\Psi) = [\cdots, |\Psi^L(0)|^2 + |\Psi^O(0)|^2 + |\Psi^R(0)|^2, |\Psi^L(1)|^2 + |\Psi^O(1)|^2 + |\Psi^R(1)|^2, \cdots]^T \in (\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}).$$

对固定的 $\Psi \in (\mathbb{C}^3)^{\mathbb{Z}}$, 任意的 $x$ 有函数 $x \to \phi(\Psi_n(x)), x \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\phi(\Psi)(x) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^O(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \ (x \in \mathbb{Z}).$$

进一步给出测度 $\nu : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+, \nu(x) = \phi(\Psi)(x)$. 容易观察到 $\nu(x)$ 是量子游荡在 $x$ 处的一个测度.

**定义 2.2** [16] 若

$$\Theta_s=\{\phi(\Psi_0)\in R_+^Z:\exists\Psi_0,s.t.\phi((\mathrm{U}^s)^n\Psi_0)=\phi(\Psi_0),\forall n\geq 0\}.$$

则称集合 $\Theta_s$ 中的元素为量子游荡的平稳测度.

进一步的下面给出一致测度的定义.

**定义 2.3** 若 $\exists\, c>0$, 使得 $\nu^{(c)}(x)=c\ (x\in\mathbb{Z})$, 则 $\nu^{(c)}$ 表示含参数 $c$ 的一致测度. $\Theta_u$ 表示 $\mathbb{Z}$ 上的一致测度集, 具体地

$$\Theta_u=\{\nu:\ \exists\, c>0,\ s.t.\ \nu(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{Z}\}.$$

接下来先给出图的定义, 再给出环的定义.

**定义 2.4** [11] 若一组集合对 $G=(V,E)$ 满足 $V$ 是非空顶点集, $E$ 是非空边集. 则称 $G=(V,E)$ 为图. 对两个顶点 $x,y\in V$ 称为相邻, 如果 $\{x,y\}\in E$, 记作 $x\sim y$. 若 $V$ 是有限顶点集, 则称 $G=(V,E)$ 为有限图.

**定义 2.5** 若 $C_n$ 是图 $G=(V,E)$ 的一个图同构, 其中 $n(n>0)$ 表示具有 $n$ 个顶点, $V=\{1,2,\cdots,n\}$, $E=\{\{1,2\},\{2,3\}\cdots,\{n-1,n\}\}$. 则称 $C_n$ 为环.

记 $\Psi_0$ 为量子游荡的初始态, 具体的

$$\begin{aligned}\Psi_0&=\Psi_0(\alpha,\beta,\gamma)\\&=\left(\cdots,\begin{pmatrix}\Psi^L(-2)\\\Psi^O(-2)\\\Psi^R(-2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Psi^L(-1)\\\Psi^O(-1)\\\Psi^R(-1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Psi^L(0)\\\Psi^O(0)\\\Psi^R(0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Psi^L(1)\\\Psi^O(1)\\\Psi^R(1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Psi^L(2)\\\Psi^O(2)\\\Psi^R(2)\end{pmatrix},\cdots\right)^T\\&=\left(\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\cdots\right)^T\end{aligned}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2=1$.

引入特征值问题 $\mathrm{U}^{(S)}\Psi=\lambda\Psi,(\lambda\in C,|\lambda|=1)$. 因为 $\mathrm{U}^{(S)}$ 是酉矩阵, 所以有 $\phi(\Psi)\in\Theta_s$.

**引理 2.6** [11] 设 $\mathrm{U}_y$ 是含 y 参数的非齐次三态量子游荡的酉演化矩阵构成的集合, $\Psi_n(x)=(\Psi_n^L(x),\Psi_n^O(x),\Psi_n^R(x))^T$ 是概率波幅. 若给定初始态 $\Psi(0)$, 相应的特征值问题 $\mathrm{U}^{(S)}\Psi=\lambda\Psi$, 则有特征向量

$$\Psi(x)=\begin{cases}\Pi_{y=1}^{x}D_y^{+}\Psi(0)\quad(x\geq 1),\\\Psi(0)\qquad\qquad(x=0),\\\Pi_{y=-1}^{x}D_y^{-}\Psi(0)\quad(x\leq -1),\end{cases}$$

转移矩阵 $D_y^{\pm}$ 分别表示为

$$D_y^+ = \begin{pmatrix} d_{11}^+ & d_{12}^+ & d_{13}^+ \\ d_{21}^+ & d_{22}^+ & d_{23}^+ \\ d_{31}^+ & d_{32}^+ & d_{33}^+ \end{pmatrix}$$

和

$$D_y^- = \begin{pmatrix} d_{11}^- & d_{12}^- & d_{13}^- \\ d_{21}^- & d_{22}^- & d_{23}^- \\ d_{31}^- & d_{32}^- & d_{33}^- \end{pmatrix}.$$

其中

$$d_{11}^+ = \frac{(\lambda - e_y)(\lambda^2 - g_{y-1}c_y) - g_{y-1}b_y f_y}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}}, d_{12}^+ = -\frac{h_{y-1}\{b_y f_y + c_y(\lambda - e_y)\}}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}}$$

$$d_{13}^+ = -\frac{l_{y-1}\{b_y f_y + c_y(\lambda - e_y)\}}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}}, d_{21}^+ = \frac{\lambda^2 d_y + g_{y-1}(a_y f_y - c_y d_y)}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}}$$

$$d_{22}^+ = \frac{h_{y-1}(a_y f_y - c_y d_y)}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}},\ d_{23}^+ = \frac{l_{y-1}(a_y f_y - c_y d_y)}{\lambda\{a_y(\lambda - e_y) + b_y d_y\}}$$

$$d_{31}^+ = \frac{g_{y-1}}{\lambda}, d_{32}^+ = \frac{h_{y-1}}{\lambda}, d_{33}^+ = \frac{l_{y-1}}{\lambda}$$

另外的

$$d_{11}^- = \frac{a_{y+1}}{\lambda}, d_{12}^- = \frac{b_{y+1}}{\lambda}, d_{13}^- = \frac{c_{y+1}}{\lambda}$$

$$d_{21}^- = -\frac{a_{y+1}(f_y g_y - l_y d_y)}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}},\ d_{22}^- = -\frac{b_{y+1}(f_y g_y - l_y d_y)}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}}$$

$$d_{23}^- = \frac{\lambda^2 f_y - c_{y+1}(g_y f_y - l_y d_y)}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}},\ d_{31}^- = -\frac{a_{y+1}\{h_y d_y + g_y(\lambda - e_y)\}}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}}$$

$$d_{32}^- = -\frac{b_{y+1}\{h_y d_y + g_y(\lambda - e_y)\}}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}},\ d_{33}^- = -\frac{(\lambda - e_y)(\lambda^2 - g_y c_{y+1}) - h_y c_{y+1} d_y}{\lambda\{l_y(\lambda - e_y) + h_y f_y\}}.$$

## 3. 主要结果及其证明

本节主要研究空间非齐次的一维三态量子游荡模型, 其演化矩阵如下

$$\mathrm{U}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & e^{\omega_x i}\sin\theta \\ 0 & e^{\omega_x i} & 0 \\ e^{-\omega_x i}\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} (\omega_x \in [0, 2\pi), \theta \in (0, 2\pi)).$$

其中 $x$ 表示位置, 特别的考虑对矩阵中的参数 $\omega_x$, 存在 $\phi \in [0, 2\pi)$, 满足条件 $\omega_x - \omega_{x-1} = 2\phi, x \in \mathbb{Z}$.

### 3.1. 直线上游荡的一致平稳测度及演化矩阵的周期性表示

获得该模型的特征值及相应的特征向量,

**定理 3.1.1** 若演化矩阵满足 $\mathrm{U}^{(s)}\Psi=\lambda\Psi$, 令 $\lambda=e^{\phi i}$, 从而特征值问题变换为 $\mathrm{U}^{(s)}\Psi=e^{\phi i}\Psi$, 其中

$$\Psi(x)=\begin{cases}\Pi_{y=1}^{x}D_y^{+}\Psi(0) & (x\geq 1),\\ \Psi(0) & (x=0),\\ \Pi_{y=-1}^{x}D_y^{-}\Psi(0) & (x\leq -1),\end{cases}$$

转移矩阵 $D_y^{\pm}$ 为

$$D_x^{+}=\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta\end{pmatrix}$$

和

$$D_x^{-}=\begin{pmatrix} e^{-\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ e^{-\alpha_{x+1} i}\sin\theta & 0 & -e^{\phi i}\cos\theta\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_x=\omega_{x-1}+\phi=\omega_x-\phi, \omega_x\in[0,2\pi),\ \theta\in(0,2\pi)$. 又 $\phi(\Phi)\in\Theta_u\cap\Theta$, 则在直线上有一致平稳测度.

**证明:** 计算其转移矩阵为

$$D_x^{+}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda^2-e^{-\omega_{x-1}i}\sin^2\theta e^{\omega_x i}}{\lambda\cos\theta} & 0 & \frac{e^{\omega_x i}\sin\theta}{\lambda}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{e^{-\omega_{x-1}i}\sin\theta}{\lambda} & 0 & \frac{-cos\theta}{\lambda}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{e^{2\phi i}-e^{(\omega_x-\omega_{x-1})i}\sin^2\theta}{e^{\phi i}\cos\theta} & 0 & \frac{e^{\omega_x i}\sin\theta}{e^{\phi i}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{e^{-\omega_{x-1}i}\sin\theta}{e^{\phi i}} & 0 & \frac{-cos\theta}{e^{\phi i}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{e^{2\phi i}-e^{2\phi i}\sin^2\theta}{e^{\phi i}\cos\theta} & 0 & e^{(\omega_x-\phi)i}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ e^{(\phi-\omega_{x-1})i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta\end{pmatrix}.$$

类似的,

$$
\begin{aligned}
D_x^- &= \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\lambda} & 0 & \frac{e^{\omega_x i}\sin\theta}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-\omega_x i}\sin\theta}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2 - e^{(\omega_{x+1}-\omega_x)i}\sin^2\theta}{-\lambda\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{e^{\phi i}} & 0 & \frac{e^{\omega_x i}\sin\theta}{e^{\phi i}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-\omega_x i}\sin\theta}{e^{\phi i}} & 0 & \frac{e^{2\phi i} - e^{(\omega_{x+1}-\omega_x)i}\sin^2\theta}{-e^{\phi i}\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{e^{\phi i}} & 0 & e^{(\omega_x-\phi)i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-(\omega_x+\phi)i}\sin\theta & 0 & \frac{e^{2\phi i}\cos^2\theta}{-e^{\phi i}\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_{x+1} i}\sin\theta & 0 & -e^{\phi i}\cos\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

容易验证 $D_x^+, D_x^-$ 是酉矩阵, 由引理2.6, $\Psi(x)$ 的范数与位置 $x$ 无关. 所以$\phi(x) \in \Theta_u$. 因此, 直线上的该量子游荡具有一致平稳测度. □

下面考虑直线上演化矩阵序列 $\{\mathrm{U}_x,\ x \in \mathbb{Z}\}$ 的周期性.

**定义 3.1.2** 对于量子游荡模型的演化矩阵序列 $\{\mathrm{U}_x,\ x \in \mathbb{Z}\}$, 若 $\mathrm{U}_{x+n} = \mathrm{U}_x$ $(n \in \mathbb{N})$, 则称序列 $\{\mathrm{U}_x\}$ 具有 $N$ 的周期, 否则没有周期.

**推论 3.1.3** 设

$$
\mathrm{U}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & e^{\omega_x i} \\ 0 & e^{\omega_x i} & 0 \\ e^{-\omega_x i}\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} (\omega_x \in [0, 2\pi), \theta \in (0, 2\pi)),
$$

其中 $\omega_x - \omega_{x-1} = \frac{2\pi}{N}$. 从而有 $\omega_{x+N} = 2\pi + \omega_x$. 所以

$$
\mathrm{U}_{x+N} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & e^{\omega_{x+N} i} \\ 0 & e^{\omega_{x+N} i} & 0 \\ e^{-\omega_{x+N} i}\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & e^{\omega_x i} \\ 0 & e^{\omega_x i} & 0 \\ e^{-\omega_x i}\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} = \mathrm{U}_x.
$$

则演化矩阵序列 $\{\mathrm{U}_x\}$ 以 $N$ 为周期.

## 3.2. 环上游荡的一致平稳测度

环 $C_{2N}$ 上的量子游荡通过演化矩阵 $\mathrm{U}_x$ 进行演化. 在直线上量子游荡的演化由(2.1)式所决定. 环上的时间演化算子类似于 $\mathrm{U}^{(s)}$ 为 $\mathrm{U}_c^{(s)}$. 其演化方程为 $\Psi_{n+1} = \mathrm{U}_c^{(s)}\Psi_n$ $(n \geq 0), \Psi_n = (\Psi_n(1), \cdots, \Psi_n(2N))$,

其中 $\Psi_n(1)=(\Psi_n^L(1),\Psi_n^O(1),\Psi_n^Q(1))^T;\Psi_n(2N)=(\Psi_n^L(2N),\Psi_n^O(2N),\Psi_n^Q(2N))^T$.

考虑环 $C_{2m}$ 上空间非齐次三态量子游荡, 在定理3.1中用 $\mathrm{U}_c^{(s)}$ 代替 $\mathrm{U}^{(s)}$ 进行演化有下面的结果, 其中 $2m$ $(m\in\mathbb{N})$ 代表顶点个数. 对于环 $C_{2m}=(V,E)$ ,$\forall m\in\mathbb{N}$, 顶点集和边集分别为 $V=\{x\in Z/mZ\}$ 和 $E=\{(x,x+1),(x+1,x):x\in V\}$. 下面将量子游荡的演化的空间位置限制到环 $C_{2m}$ 上. 其演化方程满足下式

$$\Psi_{n+1}(x)=P_{x+1}\Psi_n(x+1)+O_x\Psi_n(x)+Q_{x-1}\Psi_n(x-1),(x\in Z/mZ).$$

**命题 3.2.1** 环 $C_{2m}$ $(m\in\mathbb{N})$ 上的空间非齐次三态量子游荡, 在任意位置 $x$ 处的转移矩阵如下

$$D_x^+=\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta \end{pmatrix}\ \omega_x\in[0,2\pi),\ \theta\in(0,2\pi),$$

其中 $\omega_x-\omega_{x-1}=\frac{2\pi}{m}$, $\forall x\in\{1,2,3,\cdots,2m\}$. 此模型在环 $C_{2m}$ 上有一致平稳测度. 对于初始态 $\Psi(0)=(\alpha,\beta,\gamma)^T$, 一致平稳测度为 $\nu(\Psi(x))=|\alpha|^2+|\gamma|^2$. 其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$.

**证明:** 已知 $\omega_x-\omega_{x-1}=\frac{2\pi}{m}$, 则 $\phi=\frac{2\pi}{m}$ ,所以

$$D_x^+=\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{m}i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\frac{\pi}{m}i}\cos\theta \end{pmatrix}$$

又因为 $\alpha_x=\frac{\pi}{m}+\omega_{x-1}=\omega_x-\frac{\pi}{m}$, 进一步, 可以得到 $\alpha_{x+1}-\alpha_x=(\frac{\pi}{m}+\omega_x)-(\frac{\pi}{m}+\omega_{x-1})=\frac{2\pi}{m}$. 所以, 有

$$D_{x+1}^+D_x^+=\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_{x+1} i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_{x+1} i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\phi i}\cos\theta & 0 & e^{\alpha_x i}\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_x i}\sin\theta & 0 & -e^{-\phi i}\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi}{m}i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-2\pi}{m}i} \end{pmatrix}.$$

由此

$$\prod_{x=1}^{2m}D_y^+=\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi}{m}i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-2\pi}{m}i} \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于初始态 $\Psi(0)=(\alpha,\beta,\gamma)^T$, 有

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi}{m}i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-2\pi}{m}i} \end{pmatrix}^m\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix},(\ 1\leq x\leq 2m)$$

$\nu(\Psi(x)) = |\alpha|^2 + |\gamma|^2$. 令 $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = c$, 有 $\nu(\Psi(x)) = c$. 由此在环 $C_{2m}$ 上得到一致测度. □

接下来说明一致测度属于平稳测度集 $\Theta_s$, 对环上的特征值问题 $\mathrm{U}^s\Psi = \lambda\Psi$, 取特征值 $\lambda = 1$. 令 $\nu_n^{\Psi_0} = \phi((\mathrm{U}^{(s)})^n)\Psi_0$, 有

$$\nu_n^{\Psi_0} = (\nu_n^{\Psi_0}(1), \nu_n^{\Psi_0}(2), \nu_n^{\Psi_0}(3), \cdots)^T.$$

进一步

$$\nu_n^{\Psi_0} = (|\alpha|^2 + |\gamma|^2, |\alpha|^2 + |\gamma|^2, |\alpha|^2 + |\gamma|^2, \cdots)^T.$$

可以看到对 $\forall n \geq 0$, 有$\phi(\Psi_0(x)) = \nu_n^{\Psi_0}(x) = c$. 所以 $\nu(\Psi) = \nu_n^{\Psi_0} \in \Theta_s(U)$.

# 基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11861057)。

# 参考文献

[1] Aharonov, Y., Davidovich, L. and Zagury, N. (1993) Quantum Random Walks. *Physical Review A*, **48**, 1687-1690. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.1687

[2] Vegenas-Andraca, S.E. (2012) Quantum Walks: A Comprehensive Review. *Quantum Information Processing*, **11**, 1015-1106. https://doi.org/10.1007/s11128-012-0432-5

[3] Shankar, K.H. (2014) Quantum Random Walks and Decision Making. *Topics in Cognitive Science*, **6**, 108-113. https://doi.org/10.1111/tops.12070

[4] 黄志远, 王才士, 让光林. 量子白噪声分析[M]. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2004.

[5] Machida, T. (2013) Realization of the Probability Laws in the Quantum Central Limit Theorems by a Quantum Walk. *Quantum Information and Computation*, **13**, 430-438. https://doi.org/10.26421/QIC13.5-6-4

[6] Matsue, K., Ogurisu, O. and Segawa, E. (2016) Quantum Walks on Simplicial Complexes. *Quantum Information Processing*, **3**, 11-30.

[7] Wang, C.S. and Zhang, J.H. (2013) Localization of Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **54**, 103502-103509. https://doi.org/10.1063/1.4824130

[8] Wang, C.S., Chai, H.F. and Lu, Y.C. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article ID: 053528. https://doi.org/10.1063/1.3431028

[9] Endo, T., Kawai, H. and Konno, N. (2017) Stationary Measures for the Three-State Grover Walk with One Defect in One Dimension. *Interdisciplinary Information Sciences*, **23**, 45-55.

[10] Komatsu, T. and Konno, N. (2022) Stationary Measure Induced by the Eigenvalue Problem of the One-Dimensional Hadamard Walk. *Journal of Statistical Physics*, **187**, Article No. 10. https://doi.org/10.1007/s10955-022-02901-x

[11] Konno, N., Luczak, T. and Segawa, E. (2013) Limit Measures of Inhomogeneous Discrete-Time Quantum Walks in One Dimension. *Quantum Information Processing*, **12**, 33-53. https://doi.org/10.1007/s11128-011-0353-8

[12] Konno, N. (2014) The Uniform Measure for Discrete-Time Quantum Walks in One Dimension. *Quantum Information Processing*, **13**, 1103-1125. https://doi.org/10.1007/s11128-013-0714-6

[13] Kawai, H., Komatsu, T. and Konno, N. (2017) Stationary Measures of Three-State Quantum Walks on the One-Dimensional Lattice. *Yokohama Mathematical Journal*, **63**, 59-74.

[14] Endo, T., Komatsu, T. and Konno, N. (2019) Stationary Measure for Three-State Quantum Walk. *Quantum Information and Computation*, **19**, 901-912. https://doi.org/10.26421/QIC19.11-12-1

[15] Wang, C.S., Lu, X.Y. and Wang, W.L. (2015) The Stationary Measure of a Space-Inhomogeneous Three-State Quantum Walk on the Line. *Quantum Information Process*, **14**, 867-880. https://doi.org/10.1007/s11128-015-0922-3

[16] Kawai, H., Komatsu, T. and Konno, N. (2018) Stationary Measure for Two-State Space-Inhomogeneous Quantum Walk in One Dimension. *Yokohama Mathematical Journal*, **64**, 111-130.

[17] Obata, N. (2017) Spectral Analysis of Growing Graphs. Springer, Singapore.