

基于Fourier分析理论的数理方程研究

陆骋阳, 汪婧雯

杭州师范大学, 浙江 杭州

收稿日期: 2023年1月14日; 录用日期: 2023年2月14日; 发布日期: 2023年2月22日

摘要

Fourier分析不仅在数学中有重要的理论价值,在求解弦振动方程等经典的数理方程时也有着广泛的应用,本文基于Fourier思想,在理想的弦自由振动方程基础之上,从源自实际的弦振动问题中抽象出数学模型,构建二阶线性齐次双曲型偏微分方程,依据设定的初始条件与边界条件,采用与Fourier级数展开关联较高的分离变数方法对定解问题进行分析与求解,并对其中假设的合理性、模型的优缺点及使用前景作了评估,说明其具有较好的实用性。本文以琵琶为例,不仅给出了单次拨弦后弦上质点的振动方程,还对模型中的物理量的测量方法及对应误差来源做了分析,其研究意义是可以利用此模型将演奏弦乐器的物理原理和音乐方面的研究成果进行结合,在根据已知公式的基础上,充分考虑振动频率等因素,转而研究弦乐器的演奏技巧问题,从而使得本文讨论的主题在物理与音乐的交叉学科上具有较高的研究价值。

关键词

弦振动方程, Fourier级数展开, 分离变数方法, 定解问题

Mathematical Physical Equation Research Based on Fourier Analysis Theory

Chengyang Lu, Jingwen Wang

Hangzhou Normal University, Hangzhou Zhejiang

Received: Jan. 14th, 2023; accepted: Feb. 14th, 2023; published: Feb. 22nd, 2023

Abstract

Fourier analysis not only has important theoretical value in mathematics, but also has a wide range of applications in solving classical mathematical equations such as the string vibration equation. In this paper, based on the Fourier idea, the mathematical model is abstracted from the actual string vibration problem based on the ideal string free vibration equation. In this paper, we construct the second-order linear chi-square hyperbolic partial differential equation and adopt the separation

variables method with high correlation with the Fourier series expansion according to the initial and boundary conditions. The separation variable method with high correlation with Fourier series expansion is used to analyze and solve the solution problem, and evaluate the rationality of the hypothesis, the advantages and disadvantages of the model and its prospects, indicating that it has good practicability. Taking pipa as an example, this paper not only gives the vibration equation of the particle on the string after a single plucked string, but also analyzes the measurement method of physical quantity in the model and the corresponding error source. The research significance is that this model can be used to combine the physical principle of playing string instruments with the research results in music, and take vibration frequency and other factors into full consideration on the basis of the known formula. It turns to study the playing skills of string instruments, which makes the topic discussed in this paper have high research value in the interdisciplinary subject of physics and music.

Keywords

String Vibration Equation, Fourier Series Expansion, The Method of Separation of Variables, Problem for Determining Solution

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在一些工程技术领域中,经常需要将周期函数分解为简谐波的叠加,从数学的角度看,这就是一个周期函数的 Fourier 级数问题,可见 Fourier 理论已经成为一些问题处理的必不可少的工具。除此之外, Fourier 级数的思想也越来越多地融入到了热学、光学、信号处理、人工智能等领域,例如,在参考文献 [1] 中给出了一种利用 Fourier 变换求解热传导方程与半平面的 Dirichlet 问题的方法;在参考文献 [2] 中分析并总结了 Fourier 变换在红外光谱技术的研究成果。我们知道, Fourier 分析理论就是在求解弦振动方程与热传导方程等几类基本的数学物理方程的过程中产生的,因此,本文将从弦振动模型为出发点,以经典的分离变量法作为基本思想,进一步探讨如何将 Fourier 方法融入到实际的琵琶弦振动与音色控制问题中,笔者主要考虑在有限区间上作 Fourier 级数展开。为叙述和讨论问题的方便起见,下面我们先引入已知的有关弦自由振动的理想模型,并对相关概念作一个简单的说明。

2. 弦的力学模型简介

2.1. 二维平面上均匀细弦的振动

在平面 xOy 上,我们考察一根由两端 $x=0$ 和 $x=L$ 处固定的细弦,并让其在不受任何外力的情况下进行微小的横振动,即振动方向与细弦的平衡位置垂直且振幅与弦长 L 相比可以忽略不计。为描述弦的振动情况,我们用函数 $y=u(x,t)$ 来刻画细弦上位于 x 处的质点在 t 时刻的位移,对于 $t=0$ 时刻,我们有初始状态的位移函数 $y=u(x,0)$,不妨记为 $\varphi(x)$ 。

如图 1 所示,我们选取做微小振动的弦的局部 \widehat{AB} 进行分析,让 A 点和 B 点的水平距离很小(令 $dx=x_B-x_A$)。由于弦做自由振动时其内部会出现拉伸,即弦上质点会受到拉力 F 的作用,以图 1 为例,设 A 点受力为 $F(x)$,则 B 点受力为 $F(x+dx)$,并设在 A 点和 B 点所受拉力的方向与水平方向所成角分

别为 α 和 β 。因为在水平方向上没有运动, 故可以根据水平方向受力平衡, 有

$$F(x)\cos\alpha = F(x+dx)\cos\beta \tag{1}$$

再设弦的线密度为 ρ , 在竖直方向上用 Newton 第二定律, 有

$$F(x+dx)\sin\beta - F(x)\sin\alpha = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

考虑到弦的振动幅度较弦长可以忽略, 因此可以将 α 和 β 近似看成 0, 于是有 $\cos\alpha \approx 1$, $\cos\beta \approx 1$, $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, $\sin\beta \approx \tan\beta$, 即(1)式变为

$$F(x) = F(x+dx) \tag{3}$$

(2)式可以变为

$$F(x)(\tan\beta - \tan\alpha) = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

观察图 1 可知, 实际上在上式中的正切值即为位移函数图象在端点 A , B 处的切线斜率, 于是有

$\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, $\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t)$, 从而(4)式又变为

$$\frac{F(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\rho dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5}$$

若令 $c^2 = \frac{F(x)}{\rho}$, 则由上式整理得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0 \tag{6}$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子。这就是二维平面上均匀细弦的自由振动方程, 在文献[3]中已有初步介绍, 本文就是基于此理想模型而对弦的振动情况进行的讨论。

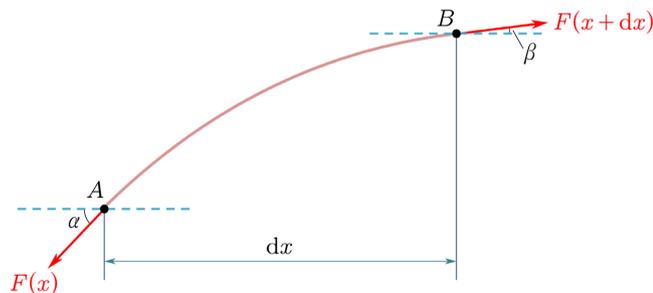


Figure 1. Force analysis diagram of string
图 1. 细弦局部的受力分析图

而我们知道, 在实际情况下, 有时需要根据具体问题对一些振动进行分析, 比如在演奏琵琶时, 需要用手对弦进行拨动, 然后再让其振动, 演奏者需要控制指尖的过弦速度和触弦力度等, 来调整音色变化以及音乐效果[4], 或者有时用锤敲击琴弦时会有谐音, 当我们研究这些问题时, 面对的就不再是简单的自由振动, 而是需要考虑到初始条件的不同了(尤其是因为外部因素的影响而导致的不同位置的质点初始速度不同, 这就需要分段考虑了), 我们将会在下文设置情境进行逐步研究。

事实上, 我们如果还需要研究弦的受迫振动, 则只需要对上述模型进行改造, 即添加在细弦的单位质量上所受的外力 f 即可。比如在图 1 的基础之上, 我们不妨设弦所受外力 f 的方向为竖直向上, 则对于 \widehat{AB} 而言, 其受到的合外力为 $f(x,t)\rho dx$, 现只需要对(2)式进行改动即可, 则后续推导过程与上相仿地, 最后有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = f(x,t) \quad (7)$$

此即均匀细弦的受迫振动方程, 这样就为解决更一般的实际问题提供了一种基本思路。在讨论振动问题时, 我们需要根据实际给定的初始条件和边界条件再结合泛定方程(6)或(7)进行求解。在本文中, 我们主要考虑的是形如(6)式的泛定方程, 而对于第二种振动形式, 此处不作重点论述。

2.2. 弦振动问题求解方法概述

对于振动问题的求解, [5]中先通过无量纲化以简化书写形式, 然后利用行波的方法, 组合两个不同方向的行波 $\varphi_1(x+t)$ 和 $\varphi_2(x-t)$ (为叙述方便, 此处采用的记号与上文相同), 说明了振动方程的解都可以表成两列波的线性组合形式, 并考虑引入新的变量作替换, 即令 $\xi = x+t$ 和 $\eta = x-t$, 定义新函数 $v(\xi, \eta)$, 最后通过施加位置和速度的初始条件得到了 d'Alembert 方程; [6]中通过 Matlab 程序模拟和 PDE 工具箱处理的方式精确地描绘出了弦振动方程的解, 以可视化的方法丰富了实际问题的求解思路。而对于本文, 我们将采用分离变数的方法对此数理方程进行求解, 这将会用到 Fourier 级数展开的有关知识。

3. 实际问题中的弦振动方程研究

前文已经叙述了有关弦振动方程的一般模型, 由于在实际应用时会因其他因素的介入而导致弦的状态与理想情况略有不同, 比如上文中提到的出现分段考虑的情况。基于文献[4]中关于琵琶演奏时音乐效果的影响因素定性讨论, 我们进一步采用定量的方式对其中某一因素进行研究, 本文接下来的基本思路是: 以此问题为起点, 根据所列偏微分方程对位移函数 $u(x,t)$ 的两个参数进行分离, 进而表出弦的通解, 之后代入初始条件, 最后求出相关系数。

3.1. 情境创设及一些说明

我们根据经验可以知道, 在接触琵琶上的弦时, 由于手指与弦的接触方式不同, 松手后弦的形状与返回时的速度都会有所不同, 音色、音调等也会不同, 于是我们不妨这样设定: 对于一根两端固定的弦来说, 其长度为 L , 线密度为 ρ , 弦内部的张力为 F , 演奏者触弦之后, 琵琶的弦在拨弦接触点近旁的弧段会发生小幅度的弯曲。

下面我们将依据此情境来求解单根弦的振动情况, 即得出弦上各点的位移随时间变化的函数, 并指出模型的实际意义, 通过各参数的分析以给出控制琵琶音调和音色的策略, 从而体现出研究该问题的价值和应用前景。

3.2. 问题的求解

对于此问题, 为处理问题的方便, 我们先作出以下假设:

(H1) 将发生小幅度弯曲的弧段视作余弦式弧段, 其宽度为 d ;

(H2) 在松手后, 由于作用在琵琶弦上已经没有任何的外力, 所以可以将其视作自由振动, 与一般情况有所区别的就是初速度在某段上发生了变化;

(H3) 假设弦与弦之间互不影响, 并且我们主要讨论的是对单根弦进行一次拨动后的弦振动情况。

根据条件, 我们可以设手指与琵琶弦的接触点位置为 x_0 处, 则我们可以知道发生小幅度弯曲的弧段范围是 $\left(x_0 - \frac{d}{2}, x_0 + \frac{d}{2}\right)$, 再根据常识, 在这一弧段上的所有质点获得的初速度应该也是各不相同的, 不妨设其中初速度的最大值为 v_m , 则当 $x \in \left(x_0 - \frac{d}{2}, x_0 + \frac{d}{2}\right)$ 时, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_m \cos \frac{(x - x_0)\pi}{d} \quad (8)$$

而其余质点在 $t = 0$ 时刻的初速度均为 0。对于边界条件, 由于弦的两端固定, 所以两端的位移函数值恒为 0。

在此问题中, 弦上质点的位移函数 $u(x, t)$ 可以视作带有参数 t 的满足齐次 Dirichlet 条件的函数, 且定义在有限区间 $(0, L)$, 故可以展开为带有参数 t 的形如 $\sum T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ 的正弦级数, 从这个角度上来看位移函数 $u(x, t)$ 可以写成两个一元函数(即时间函数与位置函数)的乘积形式, 即做到了分离变数。

显然(6)式在此仍然成立, 则对 u 使用分离变数之后有

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t + B_n \sin \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (9)$$

其中 A_n 和 B_n 待定。由 $\varphi(x) = u(x, 0) = 0$ 知, $A_n = 0$, 则此时(9)式变为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

接下来求解 B_n 。根据(8)式我们知道当 $x \in \left(x_0 - \frac{d}{2}, x_0 + \frac{d}{2}\right)$ 时有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} \cos \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t \right) \Big|_{t=0} = v_m \cos \frac{(x - x_0)\pi}{d} \quad (11)$$

解得

$$B_n = \frac{4v_m d L^2}{n\pi^2 (L^2 - n^2 d^2)} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi d}{2L} \quad (12)$$

将(12)式代入(10)中得

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_m d L^2}{n\pi^2 (L^2 - n^2 d^2)} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi d}{2L} \sin \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (13)$$

这就是琵琶的弦上各点的位移函数。

3.3. 基于问题情境假设的评估

在对上述实际问题进行处理时, 我们在弦的自由振动模型的基础上添加了符合实际情形的初始条件和边界条件, 并通过简要分析说明了做分离变数处理的合理性, 并在对质点的位移函数 $u(x, t)$ 进行 Fourier 级数展开后再由已知条件推出了系数的取值, 这体现了 Fourier 级数在求解偏微分方程上的应用, 也是将 Fourier 方法和数理方程结合的一大特点。其次, 由于本文在推导位移函数时用字母列式, 因此在实际应用时, 可以将具体的参数直接代入表达式, 这体现了模型的普遍适用性。当然, 也可以使用类似于[6]中的可视化方法对 $u(x, t)$ 的性质进行直观上的分析。

而对于此问题情境处理方式的误差来源, 笔者认为对于发生小幅度弯曲弧段的假设, 文中将其视作余弦式弧段, 但是在实际情况中, 可能更为复杂, 因此本文作了简化处理, 所以笔者认为此处可能存在误差, 这也是情境假设设置的不足之处。

3.4. 琵琶弦上质点位移函数的灵敏度分析

为了进一步考察弦振动模型的应用价值, 实际上, 我们可以对(13)式中得到的结果进行灵敏度分析, 观察在参数改变后弦的位移是否有较大的数值波动, 首先我们对 $u(x, t)$ 的大小进行放缩, 即

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4v_m d L^2}{n\pi^2 (L^2 - n^2 d^2)} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi d}{2L} \sin \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4v_m d L^2}{n\pi^2 (L^2 - n^2 d^2)} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \right| = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_m d L^2}{n\pi^2 (L^2 - n^2 d^2)} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \end{aligned} \quad (14)$$

现在假定琵琶弦的材质、弦长等因素不变, 只改变发生小幅度弯曲弧段的宽度 d , 即在此基础上作一个扰动 Δd , 结合(14)式可以知道琵琶弦的振幅应该是增大的, 而我们根据常识可知对于 d 而言是可以拨弦手法进行控制的。如果需要研究弦的材质对位移变化的影响, 只需将两种不同的线密度 ρ_1 和 ρ_2 分别代入即可, 为体现在数值上的影响程度, 我们可以选取两种线密度差异性较大的材料, 则由位移函数的性态可知, 函数会因 ρ 的变动而表现出显著性差异。至此我们通过初步分析得出琵琶弦的位移变化会随着参数的改变而有较大的数值波动, 这意味着在实际情况中弦乐器的音色会受弦材料等的影响较大。结合实际会知道, 若在制作琵琶的过程中需要控制其音乐效果的变化, 则可以从制作成本的角度进行考虑, 从改变弹拨琵琶后的振动情况入手, 即调整上述提到的单次拨弦后发生弯曲部分的大小和弦材料等。

除此之外, 前面已经提到 F 代表琵琶弦内部的张力, 这和弦两端固定的松紧程度有关, 在其他条件相同的情况下, 弦线越紧, 发音越高[7]。接下来, 我们将根据有关弦乐器发声的文献, 对本文讨论的模型进行前景展望。

3.5. 弦振动模型的进一步分析与前景展望

在文献[8]中, 给出了利用弦音装置调节振动, 使其与发声巧妙结合, 这更加印证了弦乐器的弦振动与发声机制是紧密联系的, 根据这一思路, 我们也可以将本文中的模型运用到弦乐器音色与音调的研究之中。在延续假设 H1~H3 的前提下, 对于有 4 根弦的琵琶来说, 我们可以采用文献[8]的方法, 将琵琶作为发声装置, 以连续信号为激励源, 较为精准地测量出弦线的密度。

对于弦线内部的张力而言, 我们可以采用两种方法:

1) 根据弦的振动频率 f 的计算公式, 即

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (15)$$

其中 L 为琵琶的弦长, F 为待求的琵琶弦张力, ρ 为线密度。于是有

$$F = 4\rho L^2 f^2 \quad (16)$$

由于线密度在上面过程中已经测量出, 弦的振动频率也可通过上述装置读取, 琵琶的弦长可用刻度尺量出, 这样将数据代入(16)式即可得到弦的张力大小。但是考虑到在此过程中弦长和线密度都是通过仪器观测得到的, 其本身存在一定的误差, 而再代入公式时可能会扩大误差, 因此可以考虑下面第二种做法。

2) 在文献[9]中有若干常见的琴弦材质, 如钢丝缠弦、蚕丝缠弦、合成纤维缠弦等, 通过琴弦检测器

模拟了真实的系弦方式, 从而可以得到不同材质的琴弦在固定频率时振动的内部拉力, 这样仅通过一次测量就得到了要求的物理量, 在一定程度上减小了与真实值之间的误差。

如此我们便将(13)式中的物理量全部变为可求, 沿着这一思路我们就可以计算在弹拨的过程中弦上质点的位移变化情况了, 也可以对弦的实际振幅作出合理的估值。我们知道琴弦的振幅是可以通过弹拨手法进行体现的, 一名优秀的演奏者需要进行各方面的协调, 来控制琵琶的音色、音调等种种音乐特征, 而上述可供量化的分析无疑是对于演奏者弹拨技巧的微调是有益的。

如果我们根据此处的弦振动频率公式对模型进行改进, 可以将(15)式直接代入(13)式中, 从而可以达到消去琵琶弦张力 F 和线密度 ρ 这两个与弦的自身性质有关的物理量的效果, 即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_m dL}{n\pi^2 f(L^2 - n^2 d^2)} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \cos \frac{n\pi d}{2L} \sin(2n\pi ft) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (17)$$

也就是说, 演奏者可以用调整弦振动频率的方式来改变琴弦的振幅, 这是利用已知公式对实际的振动模型的一个推广。

通过查阅资料, 我们发现目前的国内外研究成果中单独对弦振动这一物理模型的分析居多且研究角度各异, 在音乐方面的文献中, 以乐器的演奏手法、结构特征与振动机理的研究居多, 以参考文献[10]为例, 这就是从演奏技巧的角度进行切入, 定性地分析如何利用弦乐器在演奏过程中提高情感的表现, 比如其中指出演奏者“要利用手指的按弦对弦的长度进行调整, 进而实现对音高的控制”等, 这些对于本文的研究主题是具有很高的参考价值的, 因为我们可以从中提取出可供调整或改变的量, 来设计新的控制变量, 以体现单个因素变化时弦位移或振动频率等的变化, 因此我们可以从发展的角度来看, 考虑将物理和乐理二者结合, 即利用物理模型和质点位移函数具体讨论乐器的弦上各点的振动行为, 从而进一步讨论其发声机理, 也可以从数学的观点出发, 研究质点位移函数的其他性质, 这不仅有较好的理论意义, 也有较高的应用价值。

除此之外, 本文对于琵琶弦本身建立的模型在实际生活中也可以带来一定的经济效益, 比如对于销售乐器的商家而言, 应该选择一些材质适中的弦, 这将会有利于演奏者的弹拨, 因为适中的弦振动幅度可以使得演奏者在演奏过程中保持舒适的状态, 更加投入到演奏中去, 使得乐器能够有理想的音色; 此类相关的课题研究可以使音乐爱好者根据自己需求, 从弦的材质角度, 挑选出适合自己的弦乐器。从这些角度来看, 结合有关音乐方面的文献(如参考文献[4] [10])研究乐器的各种性质, 熟悉其物理特征, 并用数学的观点来进一步解释, 可以说沿用这一思路对乐器发声机制的研究具有一定的指导意义。

综上所述, 本文建立的模型较好地刻画了一次拨弦后的弦上各点位移变化情况, 并结合实际情况对每个物理量的测量方式做了说明, 使得该模型的应用具有可操作性, 同时对可能产生误差的情况进行了分析, 在具体运用此模型时我们可以改变影响音色变化的若干因素(如拨弦力度、过弦速度), 即调整初值(如弯曲弧段上质点获得的初速度、弦的振动频率等), 以改变琵琶演奏中的音色和音调。相信在未来有关弦乐器和振动方程结合的课题研究中, 能够更多地通过可视化处理等方式, 深度挖掘其函数特征和物理性质, 并从交叉学科的角度获得更多的发现。

参考文献

- [1] 曹瑞华. 傅里叶变换及其应用[J]. 理论数学, 2014, 4(4): 138-143.
- [2] 周枫然, 韩桥, 张体强, 吴海, 曾武, 王德发. 傅里叶变换红外光谱技术的应用及进展[J]. 化学试剂, 2021, 43(8): 1001-1009. <https://doi.org/10.13822/j.cnki.hxsj.2021008168>
- [3] 周学圣, 张九思. 数学物理方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1993: 49-54.
- [4] 谭瑞文. 琵琶演奏中的音色变化研究[J]. 牡丹, 2021(18): 121-122.

-
- [5] Elias, M. (2007) Stein and Rami Shakarchi. Fourier Analysis: An Introduction, Princeton, 2-11.
 - [6] 郝玉华. 一维弦振动方程的可视化处理[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2006, 19(4): 12-15.
 - [7] 马惠英, 余守宪. 弦振动和弦乐器[J]. 物理通报, 2004(3): 43-46.
 - [8] 张科红, 杜金潮, 钱张耀, 陈守川. ZCXS—A 型弦音实验装置的设计与研制[J]. 实验技术与管理, 2007(1): 61-63.
<https://doi.org/10.16791/j.cnki.sjg.2007.01.019>
 - [9] 杨帆. 古琴的琴弦物理性能测量[J]. 演艺科技, 2014(9): 46-51.
 - [10] 王怡丹. 弦乐器演奏技巧与情感表现的研究[J]. 中国校外教育, 2019(28): 2+4.