

# 基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法

董 伦, 成丽波, 李 喆, 贾小宁

长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2023年7月13日; 录用日期: 2023年8月3日; 发布日期: 2023年8月14日

---

## 摘要

针对脉冲噪声下的遥感图像的复原问题, 本文设计一种基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法。该算法模型采用L0范数作为数据保真项, 可以有效地去除脉冲噪声; 在正则项上, 本文采用重叠组稀疏正则化器与梯度图像在小波变换下的L0范数进行稀疏建模。使用优化最小化方法分别与交替方向乘子法对算法模型进行求解。将本文复原算法与L0-OGSTV、HNHOTV-OGS、L0-TV三种算法进行实验对比。实验结果表明, 在峰值信噪比和结构相似性的指标上, 本文算法均优于以上几种算法。

---

## 关键词

遥感图像, 小波变换, 重叠组稀疏, 图像复原, 交替方向乘子法

---

# Remote Sensing Image Restoration Method Based on Wavelet Transform Combined with Group Sparse

Lun Dong, Libo Cheng, Zhe Li, Xiaoning Jia

College of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: Jul. 13<sup>th</sup>, 2023; accepted: Aug. 3<sup>rd</sup>, 2023; published: Aug. 14<sup>th</sup>, 2023

---

## Abstract

To solve the restoration problem of remote sensing images under impulse noise, an image restoration algorithm based on wavelet transform combined with Group sparse is designed in this paper. The proposed algorithm utilizes L0 norm as the data fidelity term, providing an effective

文章引用: 董伦, 成丽波, 李喆, 贾小宁. 基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(8): 3537-3547. DOI: 10.12677/aam.2023.128352

means for removing pulse noise. In the regularization term, a L0 norm of gradient images under wavelet transform is implemented and an overlap-group sparsity regularizer for sparse modeling. The algorithm is solved through optimization minimization methods and alternating direction of multiplier approach, respectively. The restoration algorithm in this paper is compared with L0-OGSTV, HNHOTV-OGS and L0-TV. The experimental results show that this algorithm is superior to the above algorithms in terms of peak signal-to-noise ratio (PSNR) and structure similarity (SSIM).

## Keywords

**Remote Sensing Image, Wavelet Transform, Group Sparse, Image Restoration, Alternating Direction Method of Multipliers**

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

遥感图像在采集、传输过程中容易受到大气或传感器等诸多因素的影响，导致获取的遥感图像受到模糊和噪声的污染。被污染的图像会影响人们对图像信息的识别和判断，获得到图像信息就无法应用在实际工作当中。近年来随着遥感技术的飞速提升，遥感图像所应用的领域的也在不断扩大。所以对遥感图像复原、提高遥感图像的质量[1] [2] [3] [4]的研究是具有现实意义的。

图像复原问题是一个典型的不适定[5] [6]的反问题，一幅退化的图像可以看作是由退化算子和噪声共同作用在清晰图像的结果。从数学的角度来说，描述退化图像 $f$ 与清晰图像 $u$ 的关系表达式为  $f = Ku + \varepsilon$ ，其中  $K$  为退化算子， $\varepsilon$  为噪声。根据附加噪声的种类不同，图像复原的相应的方法也有差异。脉冲噪声是较为常见的一种噪声，它是由于图像信号采集的过程中受到强烈干扰、传感器故障或类比数位转换器错误[7] [8] [9]等诸多因素产生的。由于噪声的像素位置成一定密度的随机分布并且通常与临近像素的强度是接近的，导致复原含有噪声的退化图像是不容易的。

目前大多数针对含有脉冲噪声的图像复原模型是以 Rudin 等人[10]提出的基于全变分(TV, Total variation)算法模型为框架加以改进的。Zhong 等人[11]提出了一种自适应二阶变分模型，该模型对复原脉冲噪声下的模糊图像，可以很好的抑制复原所产生的阶梯效应；Liu [12]提出了一种混合正则化算子的脉冲噪声图像复原方法，该方法在广义变分框架的基础上融合了小波框架模型克服了原始单一正则化模型因恢复含有脉冲噪声的退化的图像所产生的跳跃的不连续性；Cui 等人[13]提出了“非凸 + 非凸”的图像复原模型，即模型同时具有非凸性的数据拟合项和非凸性的正则项，该模型具有对恢复图像边缘信息的具有很好的效果。Liu 等人[14]构造了一种基于  $L_p$  范数的非凸模型用于去模糊去噪，保证复原的同时对增强边缘细节也有良好的效果。Luo 等人[15]在正则项中引入对数函数，并采用平滑裁剪绝对偏差(SCAD)函数作为数据拟合项，所提出的模型可以有效地恢复含有高密度脉冲噪声图像；Yuan 等人[16]根据脉冲噪声的特性，结合贝叶斯定理构造了 L0-TV 的稀疏优化模型，并且提出了一种近似交替乘子法对模型进行优化求解，证实了该方法框架是对于复原含有脉冲噪声的退化图像很有效的一种框架模型。

近年来组稀疏[17] [18] [19]方法在图像复原中的应用得到了广泛的应用，通过将图像分若干块从而进行稀疏建模，可以达到更好的复原效果。Selesnick 等人[20]将全变分框架与组稀疏相结合，该方法可以减轻在基于全变分模型的图像复原中经常出现的阶梯伪影。Luo 等人[21]提出了组稀疏与双重 L1 范数相

结合的图像复原模型，该方法容易获得更具有鲁棒性的稀疏系数，能够有效地减少振铃效应，保留图像的本身特征。Yi 等人[22]构造由重叠组稀疏约束项和非凸性二阶 Lp 范数约束项的复原模型，具备非常好的边缘保持能力和纹理细节保留效果；Adam 等人[23]提出了一种基于混合二阶非凸全变分和重叠组稀疏正则项的模型，该模型保证了消除阶梯伪影，同时保持清晰的恢复图像；Yin 等人[24]在 L0TV 模型的中融合了组稀疏正则化器，既保持 L0 范数可以有效地去除脉冲噪声，又有效的抑制了复原过程中阶梯伪影的产生。

根据上述诸多学者的研究为启发，结合多尺度分析工具能够对图像稀疏表示，本文设计了一种基于小波变换与组稀疏相结合的复原含有脉冲噪声的遥感图像的算法。采用重叠组稀疏正则化器与小波变换下的 L0 范数对梯度图像进行联合稀疏建模构建先验信息，从而达到在保证复原效果的同时抑制复原过程中产生的阶梯伪影。

## 2. 预备知识

### 2.1. 脉冲噪声与 L0-TV 模型

常见的脉冲噪声主要包含随机值脉冲噪声(Random-valued impulse noise)与椒盐脉冲噪声(Salt-and-pepper impulse noise)。设原始图像的像素值的范围为 $[u_{\min}, u_{\max}]$ ， $i$ 为像素的位置， $u_i$ 与 $\vartheta(u_i)$ 分别表示为原始像素值与退化损坏的像素值，则含有两种脉冲噪声的退化图像的数学表达式分别如下：

**随机值脉冲噪声：**一定百分比的像素被改变为均匀随机数 $d_i \in [u_{\min}, u_{\max}]$ ：

$$\vartheta(u_i) = \begin{cases} d_i, & \text{with probability } p_{rv}; \\ (Ku)_i, & \text{with probability } 1 - p_{rv}. \end{cases} \quad (1)$$

**椒盐脉冲噪声：**一定百分比的像素被改变为 $u_{\min}$ 或 $u_{\max}$ ：

$$\vartheta(u_i) = \begin{cases} u_{\min}, & \text{with probability } p_{sp}/2; \\ u_{\max}, & \text{with probability } p_{sp}/2; \\ (Ku)_i, & \text{with probability } 1 - p_{sp}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $K$ 为退化算子， $p_{rv}$ 与 $p_{sp}$ 分别为随机值脉冲噪声与椒盐脉冲噪声的噪声密度。

L0-TV 图像复原模型的数学表达式为：

$$\min_{0 \leq u \leq 1} \|O \circ (Ku - f)\|_0 + \lambda \|\nabla u\|_1, \quad (3)$$

其中 $\circ$ 表示哈达玛乘积， $\lambda$ 为平衡正则项与数据拟合项的平衡参数； $O \in \{0, 1\}^n$ 由使用者指定，当 $O_i = 0$ 时，表示对应第 $i$ 个位置的像素值为异常值；当 $O_i \neq 0$ 时，表示对应第 $i$ 个位置的像素值为潜在的异常值。在本文中，我们选取椒盐脉冲噪声，当含噪图像中的像素 $u_i$ 取 $u_{\min}$ 或 $u_{\max}$ 时，对应 $O_i$ 设置为 0；当含噪图像中的像素 $u_i$ 取其他值时，对应 $O_i$ 设置为 1。

问题(3)可以等价地表述成具有平衡约束的数学规划问题(MPEC, Mathematical Program with Equilibrium Constraints)，其数学表达式如下：

$$\min_{0 \leq u, v \leq 1} \langle 1, 1 - v \rangle + \lambda \|\nabla u\|_1, \quad \text{s.t. } v \circ |O \circ (Ku - f)| = 0. \quad (4)$$

### 2.2. 重叠组稀疏正则化器

TV 正则化器在稀疏先验信息建模的过程中容易产生块状伪影，重叠组稀疏正则化器(OGS, Overlapping group sparsity) [25]在抑制块状伪影具有良好的效果，对于任意的图像，二维点群组稀疏正则化算子

的数学表达式如下:

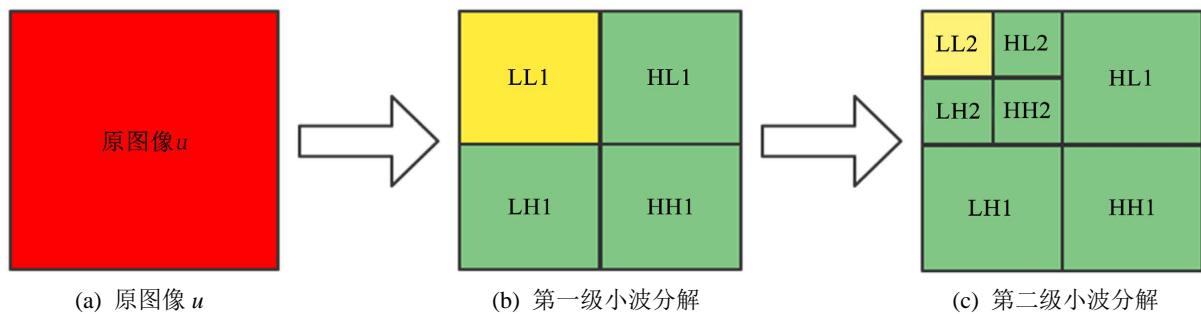
$$\tilde{u}(i, j)_N = \begin{bmatrix} u(i - m_1, j - m_1) & u(i - m_1, j - m_1 + 1) & \cdots & u(i - m_1, j + m_2) \\ u(i - m_1 + 1, j - m_1) & u(i - m_1 + 1, j - m_1 + 1) & \cdots & u(i - m_1 + 1, j + m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i - m_2, j - m_1) & u(i + m_2, j - m_1 + 1) & \cdots & u(i + m_2, j + m_2) \end{bmatrix} \in R^{K \times K}. \quad (5)$$

其中, 算子  $\tilde{u}(i, j)_K$  的中心为  $(i, j)$ ,  $m_1 = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$ ,  $m_2 = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ 。设向量  $u(i, j)_N$  是通过堆叠矩阵  $\tilde{u}(i, j)_N$  的列得到的, 二维重叠组稀疏正则化算子就可以紧凑的写为:

$$\Theta(u) = \sum_{i, j=1} \|u(i, j)_N\|_2. \quad (6)$$

### 2.3. 小波域稀疏表示

小波变换[26] [27] [28]是一种重要的信号多尺度分析工具, 在图像处理中, 小波变换可以将图像信号按不同尺度分解出多个不同频子带的小波系数, 这些小波系数可以分析图像在不同尺度下的边缘细节信息。利用小波变换的这一特性, 小波变换可以应用于特征提取、图像分解与重构等领域。相比较去空间域表示, 小波变换对像素进行空间去相关, 从而允许更简化和准确的建模。图 1 为小波变换的分解结构图:



**Figure 1.** The structure diagram of Wavelet decomposition

**图 1. 小波分解结构图**

其中黄色区域为低频信息, 表示原图像  $u$  的近似分量; 绿色区域为高频信息, 表示原图像  $u$  的细节分量。

## 3. 本文算法

### 3.1. 基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法

利用小波变换后高频图像具有稀疏性的特征再结合组稀疏正则化器对梯度图像进行双重约束, 构造基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原模型:

$$\min_{0 \leq u \leq 1} \|O \circ (Ku - f)\|_0 + \lambda_1 \Theta(\nabla u) + \lambda_2 \|W(\nabla u)\|_0. \quad (7)$$

其中  $K$  为模糊算子,  $\Theta(\cdot)$  组稀疏正则化算子,  $W$  为小波变换,  $\nabla$  为梯度算子,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  为正则化器的平衡参数。

将模型(7)等价地表述为具有平衡约束的数学规划问题, 其数学表达式如下:

$$\min_{0 \leq u, v \leq 1} \langle 1, 1 - v \rangle + \lambda_1 \Theta(\nabla u) + \lambda_2 \|W(\nabla u)\|_0, \text{ s.t. } v \circ |O \circ (Ku - f)| = 0. \quad (8)$$

### 3.2. 模型求解

对于极小化问题(8)的求解，首先使用变量分裂方法，引入辅助变量  $d$ 、 $z$ 、 $c$ ，则上述问题变为如下约束优化问题：

$$\min_{0 \leq u, v \leq 1} \langle 1, 1 - v \rangle + \lambda_1 \Theta(d) + \lambda_2 \|c\|_0, \quad \text{s.t. } v \circ |O \circ z| = v \circ O \circ |z| = 0. \quad (9)$$

其中  $z = Ku - f$ 、 $d = \nabla u$ 、 $c = W(\nabla u)$ 。

下面对问题(9)进行求解，首先构造增广拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L_A(u, v, d, z, c, \rho_d, \rho_z, \rho_c, \rho_o) \\ = & \langle 1, 1 - v \rangle + \lambda_1 \Theta(d) + \lambda_2 \|c\|_0 + \langle \nabla u - d, \rho_d \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \|\nabla u - d\|^2 + \langle W(\nabla u) - c, \rho_c \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|W(\nabla u) - c\|^2 \\ & + \langle Ku - f - z, \rho_z \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|Ku - f - z\|^2 + \langle v \circ O \circ |z|, \rho_o \rangle + \frac{\alpha_4}{2} \|v \circ O \circ |z|\|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\rho_d$ 、 $\rho_z$ 、 $\rho_c$ 、 $\rho_o$  是朗格朗日乘数， $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  是各二次罚函数项的罚参数。

根据交替方向乘子法，问题(10)可以交替得到下列各子问题

$$\begin{aligned} u^{k+1} \leftarrow \arg \min_u \langle \nabla u - d^k, \rho_d^k \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \|\nabla u - d^k\|^2 + \langle W(\nabla u) - c^k, \rho_c^k \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|W(\nabla u) - c^k\|^2 \\ + \langle Ku - f - z^k, \rho_z^k \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|Ku - f - z^k\|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$v^{k+1} \leftarrow \arg \min_v \langle 1, 1 - v \rangle + \langle v \circ O \circ |z^k|, \rho_o^k \rangle + \frac{\alpha_4}{2} \|v \circ O \circ |z^k|\|^2, \quad (12)$$

$$d^{k+1} \leftarrow \arg \min_d \lambda_1 \Theta(\nabla u) + \langle \nabla u^{k+1} - d, \rho_d^k \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \|\nabla u^{k+1} - d\|^2, \quad (13)$$

$$c^{k+1} \leftarrow \lambda_2 \|c\|_F^2 + \langle W(\nabla u)^{k+1} - c, \rho_c^k \rangle + \frac{\alpha_2}{2} \|W(\nabla u)^{k+1} - c\|^2, \quad (14)$$

$$z^{k+1} \leftarrow \arg \min_z \langle Ku^{k+1} - f - z, \rho_z^k \rangle + \frac{\alpha_3}{2} \|Ku^{k+1} - f - z\|^2 + \langle v^{k+1} \circ O \circ |z|, \rho_o^k \rangle + \frac{\alpha_4}{2} \|v^{k+1} \circ O \circ |z|\|^2, \quad (15)$$

$$\rho_d^{k+1} \leftarrow \rho_d^k + \alpha_1 (\nabla u^{k+1} - d^{k+1}), \quad (16)$$

$$\rho_c^{k+1} \leftarrow \rho_c^k + \alpha_2 (W(\nabla u)^{k+1} - c^{k+1}), \quad (17)$$

$$\rho_z^{k+1} \leftarrow \rho_z^k + \alpha_3 (Ku^{k+1} - f - z^{k+1}), \quad (18)$$

$$\rho_o^{k+1} \leftarrow \rho_o^k + \alpha_4 (v^{k+1} \circ O \circ |z^{k+1}|). \quad (19)$$

接下来各个子问题进行求解：

1) 首先是  $u$ -子问题，(11)式等价于

$$u^{k+1} = \arg \min \frac{\alpha_1}{2} \left\| \nabla u - d^k + \frac{\rho_d^k}{\alpha_1} \right\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \left\| W(\nabla u) - c^k + \frac{\rho_c^k}{\alpha_2} \right\|^2 + \frac{\alpha_3}{2} \left\| Ku - f - z^k + \frac{\rho_z^k}{\alpha_3} \right\|^2. \quad (20)$$

根据一阶最优性条件，问题(20)需要求解下面关于  $u$  的线性方程组

$$(\alpha_1 \nabla^T \nabla + \alpha_2 W^T W \nabla + \alpha_3 K^T K)u = \nabla^T (\alpha_1 d^k - \rho_d^k) + W^T (\alpha_2 c^k - \rho_c^k) + K^T (\alpha_3 f + \alpha_3 z^k - \rho_z^k). \quad (21)$$

其中， $W^T$  表示小波变换的逆变换， $\nabla^T$  表示梯度的逆变换。那么  $u$ -子问题的闭合解的形式为：

$$u^{k+1} \leftarrow F^{-1} \left( \frac{F(\nabla^T) \circ F(\alpha_1 d^k - \rho_d^k) + F(\nabla^T) \circ F(W^T (\alpha_2 c^k - \rho_c^k)) + F(K^T (\alpha_3 z^k - \rho_z^k))}{(\alpha_1 + \alpha_2) F(\nabla^T) \circ F(\nabla) + \alpha_3 F(K^T K)} \right). \quad (22)$$

其中,  $F$  表示为二维离散傅里叶变换,  $F^{-1}$  表示为二维离散傅里叶变换的逆变换。

2) 求解  $v$ -子问题, (12)式根据投影计算得出  $v$  的最终解形式:

$$v^{k+1} \leftarrow \min \left( 1, \max \left( 0, -\frac{\rho_o^k \circ O \circ |z^k| - 1}{\alpha_3 O \circ z^k \circ z^k} \right) \right). \quad (23)$$

3) 对于  $d$ -子问题, 该问题是重叠稀疏组问题, 问题本身存在内部迭代, 采用极小化方法对问题进行求解:

$$d^{k+1} \leftarrow d^{i+1} = \left( I + \mu \Lambda(d^i)^T \Lambda(d^i) \right)^{-1} \left( \nabla u^{k+1} - \frac{\rho_d^k}{\alpha_1} \right) \quad (24)$$

其中,  $i$  表示内部迭代次数,  $\Lambda(d^i) = \sqrt{\sum_{n_1, n_2=-j_1}^{j_2} \left[ \sum_{m_1, m_2=-j_1}^{j_2} \left| (d^i)_{r-n_1+m_1, t-n_2+m_2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$

4) 对于  $c$ -子问题, 合并(14)式中的同类项得到下式:

$$c^{k+1} = \arg \min \lambda_2 \|c\|_0 + \frac{\alpha_2}{2} \left\| W(\nabla u)^{k+1} - c + \frac{\rho_c^k}{\alpha_2} \right\|^2, \quad (25)$$

根据硬阈值算法, 上述问题的近似解是:

$$c^{k+1} \leftarrow T_{\alpha_2/2\lambda_2} \left( W(\nabla u)^{k+1} + \frac{\rho_c^k}{\alpha_2} \right). \quad (26)$$

其中硬阈值算子的表达式为:

$$T_{\alpha_2/2\lambda_2}(w) = \begin{cases} w, & |w| \geq \alpha_2/2\lambda_2; \\ 0, & |w| < \alpha_2/2\lambda_2. \end{cases} \quad (27)$$

5) 求解  $z$ -子问题, 合并(15)式中的同类项后得到下式:

$$z^{k+1} \leftarrow \arg \min_z \frac{\alpha_2}{2} \left\| z - \left( Ku^{k+1} - f + \frac{\rho_z^k}{2} \right) \right\|^2 + \frac{\alpha_3}{2} \left\| v^{k+1} \circ O \circ |z| + \frac{\rho_0^k}{\alpha_3} \right\|^2. \quad (28)$$

最后舍弃掉常数项, 通过四维收缩算子计算(28)式, 得到  $z$ -子问题的最终形式

$$z^{k+1} \leftarrow \frac{Ku^{k+1} - f + \frac{\rho_z^k}{\alpha_2}}{\left| Ku^{k+1} - f + \frac{\rho_z^k}{\alpha_2} \right|} \circ \max \left( \frac{\alpha_2 \left| Ku^{k+1} - f + \frac{\rho_z^k}{\alpha_2} \right| - v^{k+1} \circ O \circ \rho_o^k}{\alpha_2 + \alpha_3 v^{k+1} \circ v^{k+1} \circ O}, 0 \right). \quad (29)$$

6) 根据(16)式、(17)式、(18)式、(19)式中更新拉格朗日乘数  $\rho_d$ 、 $\rho_c$ 、 $\rho_z$ 、 $\rho_o$ 。

### 3.3. 算法流程

**算法:** 基于小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法

**输入:** 含有脉冲噪声的模糊图像  $f$ , 模糊算子  $K$ , 正则化参数

输出: 复原后的图像  $u$

初始化:  $u^0 = f$ , 拉格朗日乘子  $\rho_d^0$ 、 $\rho_c^0$ 、 $\rho_z^0$ 、 $\rho_o^0 = 0$

步骤 1: 设置迭代次数  $k = 1:1000$ , 设置  $\|u^k - u^{k+1}\|/\|u^k\| \leq 10^{-4}$  为输出条件;

步骤 2: 利用(22)式更新  $u$ ;

步骤 3: 利用(23)式更新  $v$ ;

步骤 4: 利用(24)式更新  $d$ ;

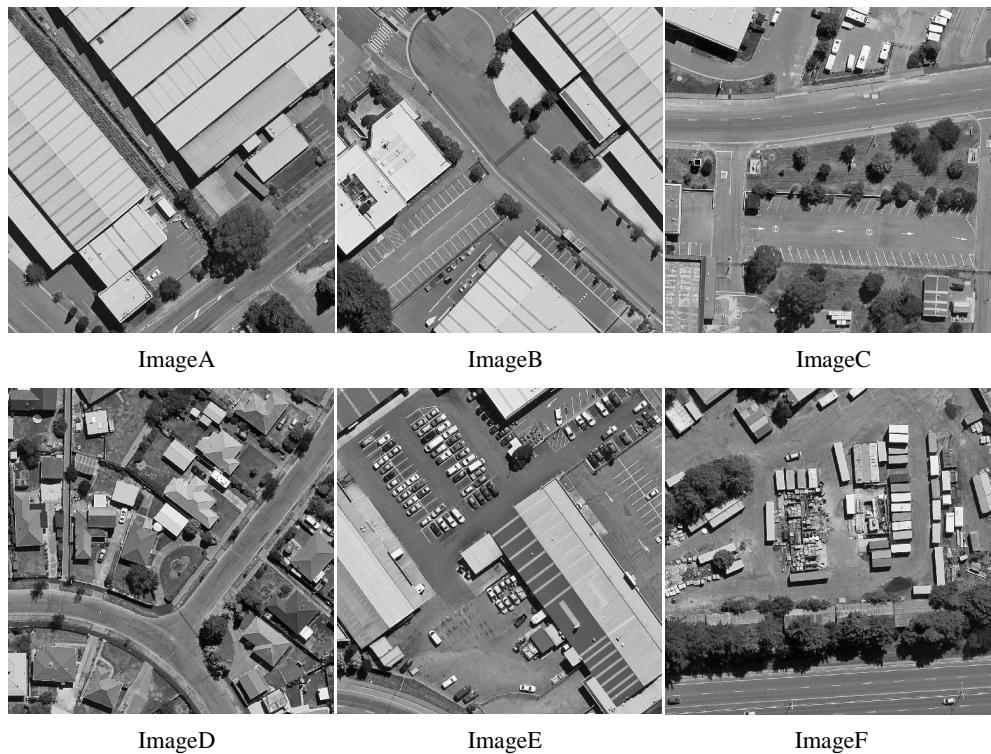
步骤 5: 利用(26)式更新  $c$ ;

步骤 6: 利用(29)式更新  $z$ ;

步骤 7: 利用(16)、(17)、(18)、(19)式更新  $\rho_d$ 、 $\rho_c$ 、 $\rho_z$ 、 $\rho_o$ 。

#### 4. 实验结果与分析

本节在开放的遥感卫星图像数据集中选取六幅大小为  $512 \times 512$  的图像(ImageA, ImageB, ImageC, ImageD, ImageE, ImageF)进行仿真试验。清晰图像见图 2。本文算法实验在 MATLAB R2020b 上进行, 且电脑配置为 Windows10, Intel(R) Core(TM) i5-6300 HQ CPU @ 2.30GHz。

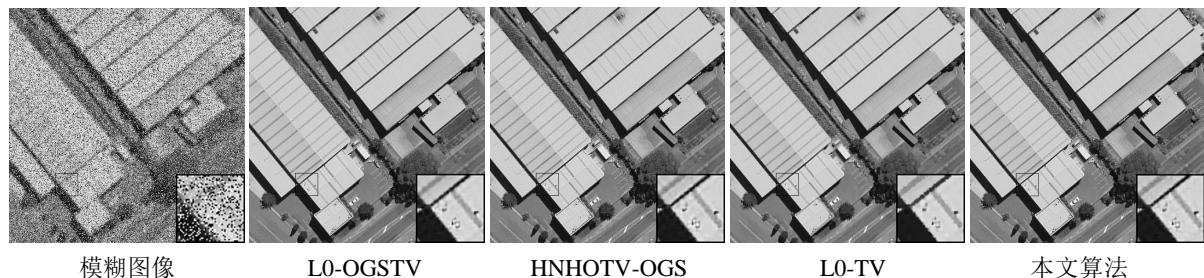


**Figure 2.** Clear images used in the experiment

**图 2.** 实验中使用的清晰图像

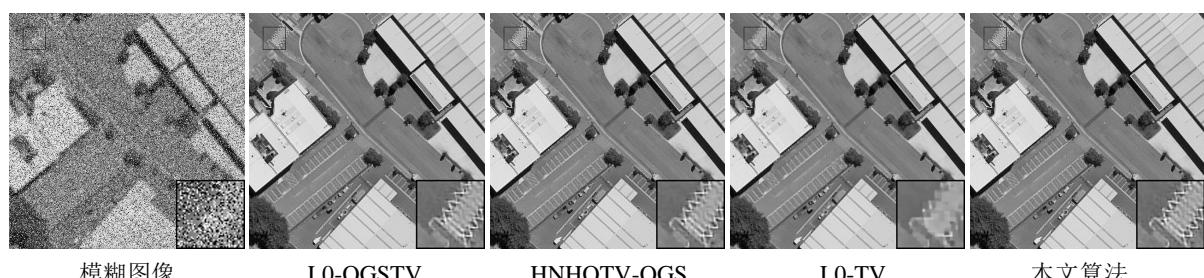
实验选用高斯模糊、平均模糊、运动模糊, 噪声均选取噪声密度为 30% 的椒盐噪声模拟模糊噪声图像, 其中高斯模糊核的宽度尺寸为 7, 滤波器的标准差为 6; 平均模糊核大小为  $7 \times 7$ ; 运动模糊核的运动的角度为 3, 运动的长度为 30。选择 L0-TV 算法[16]、HNHOTV-OGS 算法[23]、L0-OGSTV 算法[24]与本文提出的模型算法进行实验对比。每种模糊环境下的复原效果分别选取两种场景进行展示, 本文与对比试验的图像复原的结果的对比图为图 3~8 所示, 作为复原效果的主观评价指标。根据六组对比图可以观察, 本文算法在复原的过程中可以有效地复原出清晰图像, 并且可以很好的抑制振铃效应和阶梯效应。

选择指标峰值信噪(PSNR)和图像相似度(SSIM)作为对比试验的客观评价指标,各算法的PSNR与SSIM的数值结果在表1中展示,从表1中的数据得知,本文算法相比较三种对比实验算法,对同一幅含有模糊和脉冲噪声的退化图像的复原结果,PSNR与SSIM均有提升。通过表1可以看出,本文算法的客观评价指标峰值信噪(PSNR)和图像相似度(SSIM)的数值结果均高于其它复原算法。



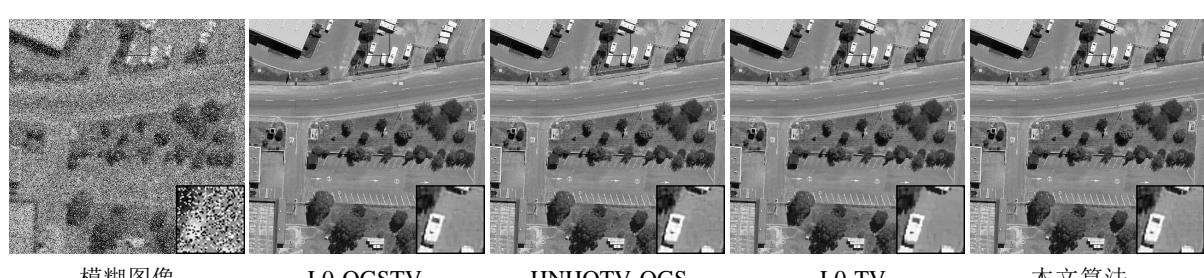
**Figure 3.** Comparison map of the results for deblurring Gaussian blur (ImageA)

**图3.** 去除高斯模糊的结果对比图(ImageA)



**Figure 4.** Comparison map of the results for deblurring Gaussian blur (ImageB)

**图4.** 去除高斯模糊的结果对比图(ImageB)



**Figure 5.** Comparison map of the results for deblurring average blur (ImageC)

**图5.** 去除平均模糊的结果对比图(ImageC)

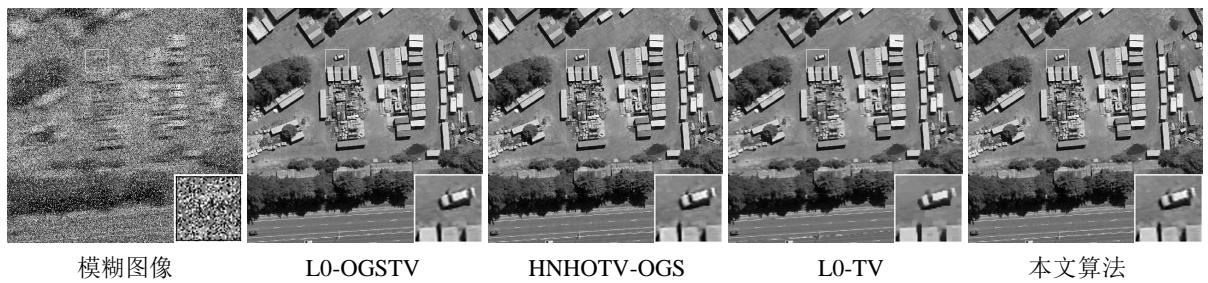


**Figure 6.** Comparison map of the results for deblurring average blur (ImageD)

**图6.** 去除平均模糊的结果对比图(ImageD)



**Figure 7.** Comparison map of the results for deblurring motion blur (ImageE)  
**图 7.** 去除运动模糊的结果对比图(ImageE)



**Figure 8.** Comparison map of the results for deblurring motion blur (ImageF)  
**图 8.** 去除运动模糊的结果对比图(ImageF)

**Table 1.** Evaluation index results of restoration using different algorithms for remote sensing images under impulse noise  
**表 1.** 脉冲噪声下的遥感图像使用不同算法复原的评价指标结果

图像	算法模型	高斯模糊		平均模糊		运动模糊	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
ImageA	L0-OGSTV	26.43	0.7867	26.93	0.7973	26.95	0.7983
	HNHOTV-OGS	26.16	0.7771	26.54	0.7864	26.51	0.7869
	L0-TV	25.63	0.7621	25.84	0.7659	25.82	0.7585
	本文算法	<b>26.59</b>	<b>0.7888</b>	<b>27.02</b>	<b>0.7978</b>	<b>27.10</b>	<b>0.8004</b>
ImageB	L0-OGSTV	25.89	0.7961	26.48	0.8089	26.19	0.7910
	HNHOTV-OGS	25.57	0.7835	26.02	0.7941	25.76	0.7890
	L0-TV	24.72	0.7633	24.88	0.7682	24.75	0.7578
	本文算法	<b>26.05</b>	<b>0.7970</b>	<b>26.63</b>	<b>0.8093</b>	<b>26.30</b>	<b>0.8185</b>
ImageC	L0-OGSTV	29.08	0.8458	29.39	0.8529	27.75	0.8171
	HNHOTV-OGS	28.82	0.8384	29.04	0.8429	27.41	0.8080
	L0-TV	26.80	0.7953	27.07	0.8055	25.91	0.7581
	本文算法	<b>29.17</b>	<b>0.8465</b>	<b>29.46</b>	<b>0.8581</b>	<b>27.84</b>	<b>0.8185</b>
ImageD	L0-OGSTV	26.36	0.8301	26.79	0.8396	25.90	0.8143
	HNHOTV-OGS	25.92	0.8182	26.23	0.8259	25.24	0.7977
	L0-TV	24.62	0.7720	24.87	0.7810	24.07	0.7420
	本文算法	<b>26.47</b>	<b>0.8321</b>	<b>26.88</b>	<b>0.8403</b>	<b>25.98</b>	<b>0.8161</b>

**Continued**

ImageE	L0-OGSTV	24.78	0.7983	25.50	0.8011	25.24	0.7932
	HNHOTV-OGS	23.94	0.7800	24.41	0.7905	24.42	0.7854
	L0-TV	22.40	0.7368	22.51	0.7398	22.42	0.7238
	本文算法	<b>24.93</b>	<b>0.8085</b>	<b>25.64</b>	<b>0.8100</b>	<b>25.38</b>	<b>0.8024</b>
ImageF	L0-OGSTV	27.99	0.8607	28.32	0.8706	26.91	0.8335
	HNHOTV-OGS	27.44	0.8564	27.77	0.8619	26.30	0.8314
	L0-TV	24.65	0.7962	24.81	0.8045	24.40	0.7740
	本文算法	<b>28.04</b>	<b>0.8661</b>	<b>28.40</b>	<b>0.8716</b>	<b>26.97</b>	<b>0.8434</b>

综合上述可以得出结论，本文提出的遥感图像复原算法，对含有脉冲噪声的遥感图像的复原结果，在主观视觉效果与客观指标上均优于三种对比试验算法，针对含有脉冲噪声的遥感图像复原问题，本文算法是一种有效的解决方案。

## 5. 结束语

本文对开放的遥感卫星图像数据集中不同场景的图像进行图像复原研究，设计了小波变换与组稀疏相结合的遥感图像复原算法。该算法模型采用 L0 范数作为数据保真项，可以有效地去除脉冲噪声；在正则项上，本文采用重叠组稀疏正则化器与梯度图像在小波变换下的 L0 范数进行稀疏建模。使用优化最小化方法分别与交替方向乘子法对算法模型进行求解，从而复原出清晰图像。本文方法有效复原了脉冲噪声下的高斯模糊、平均模糊、运动模糊的遥感图像。

## 基金项目

吉林省教育厅科学技术研究项目，JJKH20230788KJ。

## 参考文献

- [1] 杨航. 非盲图像复原综述[J]. 中国光学(中英文), 2022, 15(5): 954-972.
- [2] Liu, N., Li, W., Wang, Y., et al. (2023) A Survey on Hyperspectral Image Restoration: From the View of Low-Rank Tensor Approximation. *Science China Information Sciences*, **66**, Article No. 140302. <https://doi.org/10.1007/s11432-022-3609-4>
- [3] Liu, M.M., Tang, L., Fan, L.J., Zhong, S., Luo, H.Z. and Peng, J.Y. (2022) CARNet: Context-Aware Residual Learning for JPEG-LS Compressed Remote Sensing Image Restoration. *Remote Sensing*, **14**, 6318-6318. <https://doi.org/10.3390/rs14246318>
- [4] Xie, S., Zheng, X., Shao, W., et al. (2019) Non-Blind Image Deblurring Method by the Total Variation Deep Network. *IEEE Access*, **7**, 37536-37544. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891626>
- [5] Dong, W.S., Zhang, L., Shi, G.M. and Wu, X.L. (2011) Image Deblurring and Super-Resolution by Adaptive Sparse Domain Selection and Adaptive Regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, **20**, 1838-1857. <https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2108306>
- [6] Wang, Y., Yang, J., Yin, W. and Zhang, Y. (2008) A New Alternating Minimization Algorithm for Total Variation Image Reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **1**, 248-272. <https://doi.org/10.1137/080724265>
- [7] Zhu, J.G., Wei, J. and Hao, B.B. (2022) Fast Algorithm for Box Constrained Fractional-Order Total Variation Image Restoration with Impulse Noise. *IET Image Processing*, **16**, 3359-3373. <https://doi.org/10.1049/opr2.12570>
- [8] 崔金鸽, 陈炳权, 徐庆. 基于 Dual-Tree CWT 和自适应双边滤波器的图像去噪算法[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(18): 223-228.
- [9] 陶星朋, 徐宏辉, 郑建炜, 等. 基于非凸低秩矩阵逼近和全变分正则化的高光谱图像去噪[J]. 计算机科学, 2021,

- 48(8): 125-133.
- [10] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F)
- [11] 钟秋祥, 吴传生, 刘文. 含脉冲噪声模糊图像复原的自适应二阶变分模型[J]. 计算机应用研究, 2018, 35(10): 3158-3163.
- [12] Liu, X. (2019) Primal-Dual Method for Hybrid Regularizers-Based Image Restoration with Impulse Noise. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **38**, 1318-1332. <https://doi.org/10.1007/s00034-018-0918-1>
- [13] Cui, Z.X. and Fan, Q.B. (2018) A “Nonconvex + Nonconvex” Approach for Image Restoration with Impulse Noise Removal. *Applied Mathematical Modelling*, **62**, 254-271. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.05.035>
- [14] Liu, J.J., Ma, R.J., Zeng, X.Y., et al. (2021) An efficient Non-Convex Total Variation Approach for Image Deblurring and Denoising. *Applied Mathematics and Computation*, **397**, Article ID: 125977. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.125977>
- [15] Luo, Z.J., Zhu, Z.B. and Zhang, B.X. (2021) A LogTVSCAD Nonconvex Regularization Model for Image Deblurring in the Presence of Impulse Noise. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2021**, Article ID: 3289477. <https://doi.org/10.1155/2021/3289477>
- [16] Yuan, G. and Ghanem, B. (2019)  $\ell_0$ TV: A Sparse Optimization Method for Impulse Noise Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 352-364. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2017.2783936>
- [17] Liu, J., Huang, T.Z., Selesnick, I.W., Lv, X.G. and Chen, P.Y. (2015) Image Restoration Using Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Information Sciences*, **295**, 232-246. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.10.041>
- [18] 田进, 陈秀宏, 傅俊鹏, 等. 基于重叠稀疏组深度信念网络的图像识别[J]. 计算机工程与科学, 2018, 40(3): 515-524.
- [19] 陈育群, 陈颖频, 林凡, 等. 基于高阶交叠组稀疏正则项的图像恢复方法[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(33): 13747-13756.
- [20] Selesnick, I.W. and Chen, P.Y. (2013) Total Variation Denoising with Overlapping Group Sparsity. 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, 26-31 May 2013, 5696-5700. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2013.6638755>
- [21] 骆骏, 刘辉, 尚振宏. 组稀疏表示的双重  $l_1$  范数优化图像去噪算法[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2019, 56(6): 1065-1072.
- [22] 易开宇, 戴贞明. 基于混合非凸性二阶全变分和重叠组稀疏的非盲图像去模糊算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2021, 35(9): 229-235.
- [23] Adam, T., Paramesran, R., Yin, M.M. and Ratnavelu, K. (2021) Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Impulse Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **80**, 18503-18530. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-10583-y>
- [24] Yin, M., Adam, T., Paramesran, R. and Hassan, M.F. (2022) An  $\ell_0$ -Overlapping Group Sparse Total Variation for Impulse Noise Image Restoration. *Signal Processing: Image Communication*, **102**, Article ID: 116620. <https://doi.org/10.1016/j.image.2021.116620>
- [25] Adam, T., Paramesran, R. and Ratnavelu, K. (2022) A Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Poisson Noise Removal. *Computational and Applied Mathematics*, **41**, Article No. 130. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-01828-z>
- [26] Zhang, S.Z. (2023) Remote Sensing Image Fusion Based on Wavelet Transform. *Academic Journal of Computing & Information Science*, **6**, 1-9. <https://doi.org/10.25236/AJCIS.2023.060201>
- [27] You, N., Han, L.B., Zhu, D.M. and Song, W.W. (2023) Research on Image Denoising in Edge Detection Based on Wavelet Transform. *Applied Sciences*, **13**, Article 1837. <https://doi.org/10.3390/app13031837>
- [28] Liu, S.J., Li, W.T., Cao, J.X., Zhang, K. and Hu, S.D. (2023) Image Restoration via Wavelet-Based Low-Rank Tensor Regularization. *Optik*, **273**, Article ID: 170415. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170415>