

Aperiodic Oscillation Structured by Lossless Circuit*

Binghua Huang¹, Guangming Li², Huijie Liu²

¹Information Engineering School, Jimei University, Xiamen

²Dongguan Institute of Technology, Dongguan

Email: huangbh@gxu.edu.cn

Received: Oct. 17th, 2012; revised: Nov. 10th, 2012; accepted: Nov. 22nd, 2012

Abstract: An autonomous circuit without dissipative elements is a conservative system, whose phase portrait of oscillation is a Hamiltonian cycle rather than a limit cycle. The size of cycle is closed related to the initial energy stored in the network. The total energy stored in the network keeps always constant after the starting instant. It is a periodic oscillation but not an attractor. It is a lossless system that the non-autonomous circuit has excited source but without dissipative elements. The oscillation solution not only depends on the excited source, but also on the initial conditions sensitively. The change process of stored energy of every reactance elements is distinct in every excited period. The boundness and aperiodicity of phase portrai show the basic characteristics of the chaotic oscillation. This paper introduces an experimental circuit of chaotic signal generator structured by lossless system. It is demonstrated that the chaos produced by the lossless systems is a kind of aperiodic oscillation. It has not attractiveness for neighboring trajectory so that it is not an attractor either.

Keywords: Reactive Power; Lossless; Attractor; Hamiltonian Cycle; Chaos; Main Harmonic

由无损耗电路构成的非周期振荡*

黄炳华¹, 李广明², 刘慧杰²

¹集美大学信息工程学院, 厦门

²东莞理工学院, 东莞

Email: huangbh@gxu.edu.cn

收稿日期: 2012年10月17日; 修回日期: 2012年11月10日; 录用日期: 2012年11月22日

摘要: 不含耗能元件的自治电路是一个保守系统, 其振荡的相图是一个哈密顿圈而不是极限环, 圈的大小与网络中的初始储能密切相关, 起振后网内的总储能始终保持恒定, 它是周期振荡但不是吸引子。具有激励源不含耗能元件的非自治电路是一个无损耗系统。振荡解不但与激励源有关, 且敏感的依赖于初始条件。每个电抗元件内的储能, 在每个激励周期内的变化过程是不同的。其相图的有界性与非周期性, 显示混沌振荡的基本特征。本文介绍用无损耗系统构成一个混沌信号发生器的实验电路。论证无损耗系统产生的混沌是一种非周期振荡, 它对邻近的轨线没有吸引性, 因而它也不是一个吸引子。

关键词: 虚功功率; 无损耗; 吸引子; 哈密顿圈; 混沌; 主谐波

1. 引言

1963年Lorenz第一个发现混沌以来, 至今已有半世纪的时间, 混沌为非线性科学的发展做出了具有

里程碑的贡献。其中最有神奇色彩的蝴蝶效应, 在多学科领域受到广泛关注, 有文献指出, 混沌是当代学科前沿, 但至今各个学科领域关于混沌没有统一定义。本文研究连续时间系统的轨道混沌, 通过对无损耗系统振荡解的分析得出, 非线性振荡可能包含两种

*基金项目: 国家自然科学基金批准号 60662001。

形式。

三维或高于三维自治系统，如果所有平衡点都是不稳定的；并且系统的能源是有限的，相点不可能趋于无穷，相点将在有限空间无休止的游荡；这种游荡即非线性振荡可能有两种形式：一种是游荡的轨道具有周期重复性；另一种是运动轨道没有周期重复性的非周期振荡，必然是混沌的。

Colpitts Oscillator 与 Chua 电路能产生混沌振荡，早期的混频电路也能产生混沌，本文提出的无损耗电路含有谐振回路和激励源，没有消耗实功的元件，显然包含有自振与受迫两个分量也是一种混频，电流源代表外来信号，谐振回路代表本机振荡，在非线性电感中进行混频，从而诞生非线性振荡。在零状态起始条件下，加入激励源引起的受迫分量在第一瞬间的强度，必须和自振分量的强度，大小相等方向相反，起始瞬间两个分量的绝对值相等，说明两个分量的强弱相等，其非线性耦合一般能诞生混沌。

2. 无损耗电路的状态方程

$$\dot{i}_L = u/L_N \quad \dot{u} = -i_L/C + C_2 \dot{u}_F/C \quad (1a)$$

$$L_N = L_0 / (1 + kCL_0 u^2) \quad C = C_1 + C_2 \quad k = 35000$$

$$C = 10^{-6}, \quad w = \omega_0^2 = 1/(CL_0) = 36 \times 10^4 \quad \omega_F = 1560$$

$$C_1 = 62 \times 10^{-8} \quad C_2 = 38 \times 10^{-8} \quad (1b)$$

$$u_F = U_{Fm} \sin(\omega_F t + \theta) = U_{Fmr} \sin \omega_F t + U_{Fmx} \cos \omega_F t \quad (1c)$$

$$u = v_{C1} = u_F - v_{C2} \quad (2)$$

由电路图 1 可获得状态方程式(1)；电路因为有由电容电压与电压源构成的回路，故独立的状态变量少于网络中动态元件的数量。表面上看有 V_{C1} , V_{C2} , i_L 三个状态变量。事实上 V_{C1} , V_{C2} 只有一个是独立的如式(2)，因而式(1)是一个含时变源的二维非自治方程，式中 L_N 是压控非线性电感。

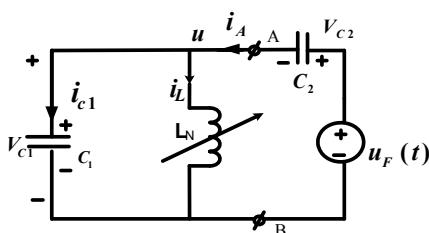


Figure 1. Lossless circuit
图 1. 无损耗电路

3. 保守系统的基波解

$$\ddot{u} + (w + ku^2)u = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u = u(t) &= U_{hmr} \sin \omega_h t + U_{hmx} \cos \omega_h t \\ &= U_{hm} \sin(\omega_h t + \theta) \quad \tan \theta = U_{hmx}/U_{hmr} \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_0 = u(0) = U_{hmx} \quad u_{d0} = \dot{u}(0) = U_{hmr} \omega_h \quad (5a)$$

$$\omega_h^2 = w + 3kU_{hm}^2/4 \quad U_{hm}^2 = U_{hmr}^2 + U_{hmx}^2 \quad (5b)$$

$$\omega_h^2 = 3ku_0^2/8 + w/2 + \sqrt{48ku_{d0}^2 + (3ku_0^2 + 4w)^2}/8 \quad (5c)$$

如果激励源置零即 $u_F = 0$, $v_{C1} = v_{C2}$ 式(1)可以转换成标量方程式(3)。这是一个保守系统，它的基波解式(4)包含三个待定系数 $(\omega_h, U_{hmr}, U_{hmx})$ ，这些系数与初始条件的相互关系如式(5)。已知初始值 u_0 与 u_{d0} 程序 first.nb 求这三个系数并画出式(3)的哈密顿圈。

保守系统里的总储能 E_a ，等于各状态变量的储能 E_{ak} 的总和，它取决于初始瞬间所取得的能量，并保持恒定是一个常数，设网络有 n 个状态变量，即对于任意的 t 和起始瞬间的 t_0 有

$$E_a(t) = \sum_{k=1}^n E_{ak}(t) = E_a(t_0) = \text{const} \quad (6a)$$

$$E_{ak}(t) \leq E_a(t_0) \quad E_{ak}(t) = E_{ak}(t+T) \quad (6b)$$

按传统的定义：N 维空间中由不同初始状态出发的轨道，最后收缩到相空间形成一个不变集称吸引子。或者说不同的起始状态当 $t \rightarrow \infty$ 时，具有相同的状态归宿。式(6)说明保守系统的 $E_{ak}(t)$ 是一个周期函数。相图显示的闭周期轨随不同的初始值而不同，是一个哈密顿圈不是极限环，对周围轨线没有吸引性不是吸引子。它没有暂态过程，一开始就进入稳态轨道。在外来偶然因素干扰下，相轨线随之发生变化，没有返回固有轨道的能力，或者说它没有固有轨道，它是不稳定的。

4. 无损耗系统的主谐波解

由线性理论知：1) 线性系统的自振分量 u_{ht} 与受迫分量 u_{pt} 满足迭加性，两个分量各自满足方程的平衡，两者之间不存在有相互影响的耦合关系，两个分量可以独立求解而后迭加。2) 两个频率分量必须各自维持功率平衡。受迫分量仅仅取决于外激源，与起始条件无关。初始瞬间所获得的能量用于维持自振分量

的功率平衡，自振分量的功率盈亏不能由外激源去填补。其中，线性理论的第 2 部分，可以在考虑相互耦合影响的特定条件下，推广引深的应用到非线性电路中来。

对于非线性系统而言：1) 非线性系统的两个主谐波分量必须联合共同满足方程的平衡，两者之间存在有非线性耦合的相关性，两个电压分量不能分开求解而后迭加。2) 一个频率分量的复功率在考虑受到另一频率分量的影响后，必须独自完成平衡，两个频率分量的复功率平衡不能互相填补^[1-3]。

一个不含外激源的自治电路，如果不能维持自激振荡；当加入不同频的外激源后，其振荡只有受迫分量，自振最后一定衰竭而消失。例如在电路图 1 的任何地方，嵌入一个正性小电阻，自振分量会因实功无法平衡而不可能持久保持，外激源供出的功率无法支援自振分量的功率缺额。这是各个谐波成份的功率必须独自守恒最有力的例证。

例 1 如果电路图 1 的激励源 $u_F \neq 0$ ，则其标量方程

$$\ddot{u} + (w + ku^2)u = C_2 \ddot{u}_F / C = -C_2 \omega_F^2 u_F / C \quad (7)$$

$$u(t) = u = u_1 + u_N$$

$$u_1 = u_{ht} + u_{pt} = U_{hmr} \sin \omega_h t + U_{hmx} \cos \omega_h t + U_{pmr} \sin \omega_p t + U_{pmx} \cos \omega_p t \quad (8a)$$

$$U_{hm}^2 = U_{hmr}^2 + U_{hmx}^2, \quad U_{pm}^2 = U_{pmr}^2 + U_{pmx}^2 \quad (8b)$$

设式(7)的主谐波解如式(8)，其中 u_N 代表非主谐波， u_1 代表两个主谐波(u_{ht}, u_{pt})，它包含五个待定系数 $\omega_h, U_{hmr}, U_{hmx}, U_{pmr}, U_{pmx}$ 。

4.1. 自振分量的虚功平衡方程

$$Q = U_{hm}^2 \left[\omega_{hx} C - 1 / (\omega_{hx} L_{eqh}) \right] = 0 \quad (9)$$

$$\omega_{hx}^2 = 1 / (L_{eqh} C) = w + 3kU_{eqmh}^2 / 4 \quad (10a)$$

$$L_{eqh} = U_{hm} / I_{dhm} = L_0 / (1 + 3kCL_0 U_{eqmh}^2 / 4) \quad (10b)$$

$$U_{eqmh}^2 = U_{hm}^2 + 2U_{pm}^2 \quad (10c)$$

$$L_{eqp} = U_{pm} / I_{dpm} = L_0 / (1 + 3kCL_0 U_{eqmp}^2 / 4) \quad (11a)$$

$$U_{eqmp}^2 = U_{pm}^2 + 2U_{hm}^2 \quad (11b)$$

由虚功平衡方程式(9)可求得自振频率 ω_{hx}^2 与等效

幅值 U_{eqmh}^2 的关系如式(10)，已知其他四个系数可以求出 ω_{hx}^2 ，其中 L_{eqh} 代表等效基波电感。定义：如果 u_1 是两个主谐波作用于 L_N 。则定义比值 U_{hm} / I_{dhm} 为关于 ω_h 分量的等效基波电感 L_{eqh} ；它和电容 C 并联构成回路的谐振频率 ω_{hx}^2 如式(10)。其中 U_{eqmh} 代表两个主谐波 U_{hm} , U_{pm} 非线性耦合引起的关于自振方面的等效电压幅值；定义比值 U_{pm} / I_{dpm} 为关于 ω_p 分量的等效基波电感 L_{eqp} 如式(11)；其中 U_{eqmp} 代表 U_{hm} , U_{pm} 非线性耦合引起在强振方面的等效电压幅值^[4-7]。

$$u_1(0) = u_{10} = U_{hmx} + U_{pmx} \quad (12a)$$

$$\dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10} = \omega_h U_{hmr} + \omega_p U_{pmr} \quad (12b)$$

初始值与五个待定系数的关系如式(12)。程序 Tab1.nb 求得表 1 的主谐波解 u_1 ，从直观可发现画出的相图 2 有明显的混沌，表 1 所列电压源在 20 伏以下变化，如果电压源超过 20 伏混沌更加明显。

4.2. 由 KCL 与 KVL 求强振分量

在考虑了各谐波分量相互之间的非线性耦合后，非线性电感用等效值代替，各谐波分量可以独立脱离出来，单独画出各谐波分部网络，然后用线性理论的相量法求解。程序 Tab1.nb 印证了这个求解结果。以表 1/C 情况为例，单独求受迫分量的电压相量 \bar{u}_p ，列出唯一的节点电压方程如式(13)，可求出

$\bar{u}_p = -3.922 - j4.8$ ，与表列数据一致。式中 L_{eqp} 如式(11)。要注意 L_{eqp} 与 L_{eqh} 是不同的。

$$\bar{u}_p / (j\omega_F L_{eqp}) + \bar{u}_p (j\omega_F C_1) = (\bar{u}_F - \bar{u}_p) j\omega_F C_2 \quad (13)$$

4.3. 混沌是有界的非周期振荡

激励源输出的平均功率恒为零，只输出虚功率，它表示激励源与网内的储能元件有瞬时性的功率交换，无损耗网络不消耗任何实功率，网内的储能每一瞬间都在变化，但经历一个激励周期 T 后，激励源输出的能量为零，故网内总储能 $E(t)$ 保持原值。但 $E(t)$ 在一个周期内的变化过程并不相同，总储能是各状态变量储能的总和。经历一激励周期后，每一个状态变量的储能 E_k 并不保持原值。即对于任意的 t 与特定的起始瞬间 t_0 有

$$E = E(t) \neq E(t+T)$$

$$E(t_0) = E(t_0 + T) = E_0 + E_T = E_0$$

由无损耗电路构成的非周期振荡

Table 1. Main harmonic solutions of Example 1 for initial value $u_{10} = 0$; $\dot{u}_{10} = 0$

表 1. 对于初始值 $u_{10} = 0$; $\dot{u}_{10} = 0$, 例 1 的主谐波解

	$u_F = U_{Fmr} \sin \omega_F t + U_{Fmx} \cos \omega_F t$	$u_r = U_{Fnr}$	$u_x = U_{Fnx}$	$u_m^2 = u_r^2 + u_x^2$	$u_m = U_{Fm}$
	$U_{Fm} = 1$	$u_r = 0.5477$	$u_x = 0.8367$	$u_{pm} = 0.453$	$u_{hm} = 0.731$ $u_{max} = 1.184$
A	$u_i = -0.379 \cos(620t) + 0.379 \cos(1560t) - 0.624 \sin(620t) + 0.248 \sin(1560t)$			$U_{eqmh}^2 = 0.945$	
B	$U_{Fm} = 2$	$u_r = 1.265$	$u_x = 1.55$	$u_{pm} = 0.9634$	$u_{hm} = 1.57$ $u_{max} = 2.53$
	$u_i = -0.746 \cos(688t) + 0.746 \cos(1560t) - 1.38 \sin(688t) + 0.609 \sin(1560t)$			$U_{eqmh}^2 = 4.32$	
C	$U_{Fm} = 5$	$u_r = 3.16$	$u_x = 3.873$	$u_{pm} = 6.20$	$u_{hm} = 5.87$ $u_{max} = 12.07$
	$u_i = -4.80 \cos(1560t) + 4.80 \cos(1812t) - 3.922 \sin(1560t) + 3.376 \sin(1812t)$			$U_{eqmh}^2 = 111.4$	
D	$U_{Fm} = 10$	$u_r = 7.746$	$u_x = 6.32$	$u_{pm} = 7.136$	$u_{hm} = 6.223$ $u_{max} = 13.36$
	$u_i = -4.513 \cos(1560t) + 4.513 \cos(2012t) - 5.527 \sin(1560t) + 4.285 \sin(2012t)$			$U_{eqmh}^2 = 140.6$	
E	$U_{Fm} = 15$	$u_r = 12.55$	$u_x = 8.216$	$u_{pm} = 7.93$	$u_{hm} = 6.43$ $u_{max} = 14.36$
	$u_i = -4.34 \cos(1560t) + 4.34 \cos(2179t) - 6.63 \sin(1560t) + 4.75 \sin(2179t)$			$U_{eqmh}^2 = 167.1$	
F	$U_{Fm} = 20$	$u_r = 7.746$	$u_x = 18.44$	$u_{pm} = 7.73$	$u_{hm} = 7.43$ $u_{max} = 15.16$
	$u_i = -7.13 \cos(1560t) + 7.13 \cos(2224t) - 2.99 \sin(1560t) + 2.10 \sin(2224t)$			$U_{eqmh}^2 = 174.7$	

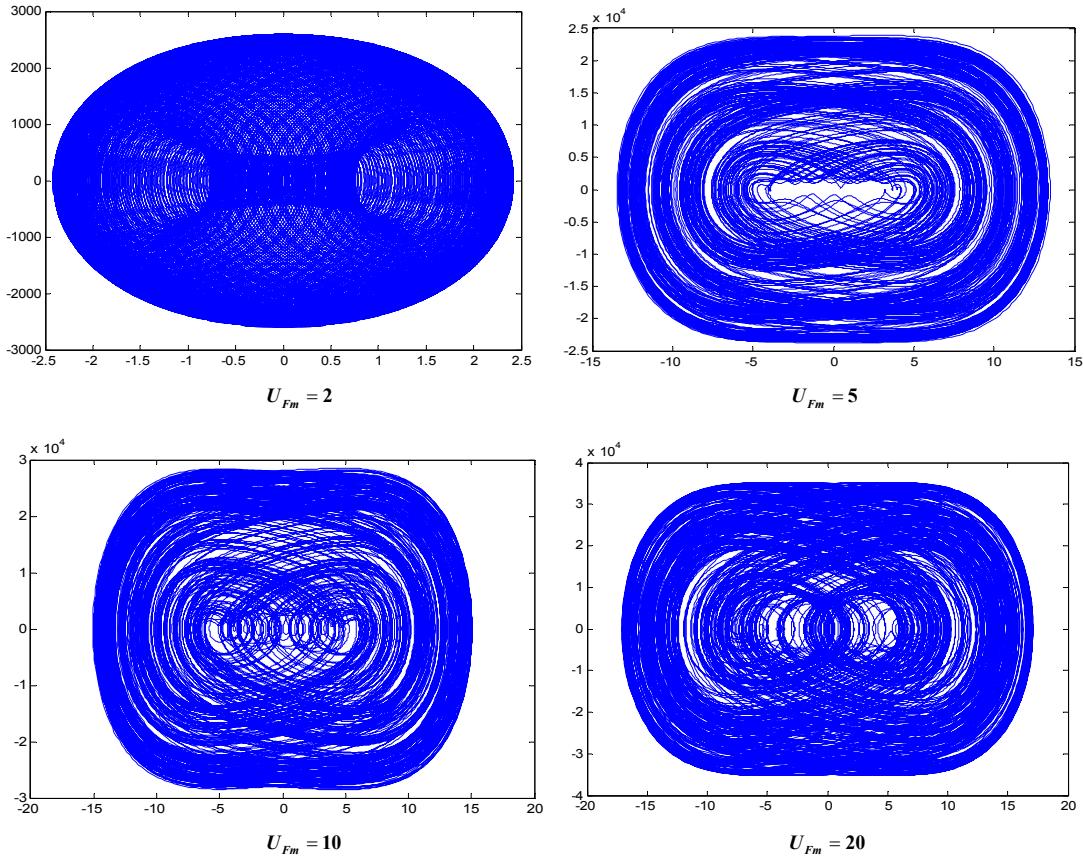


Figure 2. Chaotic phase portrait of Table 1
图 2. 表 1 的混沌相图

$$\begin{aligned} E(t_0) &= E(t_0 + T) = E_0 + E_T = E_0 \\ E_k(t_0) &\neq E_k(t_0 + T) \end{aligned} \quad (14)$$

$$E_T = \int_{t_0}^{t_0+T} u_F(t) i_A(t) dt = 0 \quad i_A(t) = i_F + i_N \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_{IN\max} &= \int_{t_0}^{t_0+T/4} u_F(t) i_A(t) dt < \infty \quad t_0 = -\theta/\omega_F \\ \tan \theta &= U_{Fmx}/U_{Fmr} \quad u_F(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$E_{F\max} = \int_{t_0}^{t_0+T/4} u_F(t) i_F(t) dt \quad Q = \pm \omega_F E_{F\max} \quad (17)$$

$$E_{\max} = E_0 + E_{IN\max} < \infty \quad E_k(t) \leq E(t) < E_{\max}(t) \quad (18)$$

式(15)说明 u_F 在一周期内输出的平均功率为零, 式中 i_A 包含与 u_F 同频电流 i_F 以及与 u_F 非同频电流 i_N , 式(16)说明 u_F 在 $1/4$ 周期内输出能量的最大值 $E_{IN\max}$ 是有界的, 式中根据 $u_F(t_0) = 0$, 求得的 t_0 是 $1/4$ 周期送出能量的起算点。同频电流 i_F 代表受迫分量与 u_F 成 $\pi/2$ 角的电抗电流, i_F 引起的无功功率为 Q 如式(17)。

式(18)的 $E_k(t)$ 代表各状态变量的储能, 电容 C_1 的储能 $u^2 C_1 / 2$, 是一个有界的非周期函数, 相点从不同的初始状态出发, 具有完全不同的相轨迹, 最后并不收敛到一个固定的不变集, 不具备吸引性的特征不是吸引子也不奇异。但它具有混沌的基本特征, 轨迹即不发散也不收敛, 它是全局稳定局部不稳定; 它对初值的敏感依赖性说明在外来偶然因素干扰下, 相轨迹随之变化没有返回原轨道的能力, 它的原轨道没有暂态与稳态过程之分。用无损耗系统构成的混沌信号发生器。论证了这一类混沌是一种非周期振荡, 其本质特征不是吸引子。

5. 初始条件对振荡性状的影响

上述对于零初始条件, 不管外激源如何变化均能产生混沌, 自激振荡的强度取决于电源合闸第一瞬间所取得的能量, 这个能量和 (u_{10}, \dot{u}_{10}) 密切相关, 它一旦确定后, 整个振荡过程也就唯一的确定无法再改变了, 这个系统没有耗能元件消耗实功率, 也不接收外加激励源所送出的实功率, 网内储能元件和激励源之间只存在瞬时性的功率交换, 即受迫分量虚功功率的供送要保持平衡, 也存在自振与强振两个分量振荡强度的互相耦合影响。但维持自振的虚功平衡取决于式(9)无法由激励源去填补的。

对于线性系统而言, 两个振荡成份有各自的基波, 两基频不等且不互为整数倍, 但只要不是无理数,

乃可以找到一个公共基频, 使两个振荡成份的线性迭加仍然是一个周期振荡。但对于非线性系统而言, 两个振荡成份的混合不一定是周期振荡。不同的两种初始条件, 可以造就两个振荡分量强弱相差的不同, 导致两种不同的振荡性状。

第一种、当初始值为零 $(u_{10}, \dot{u}_{10}) = (0, 0)$ 时, U_{hm} 与 U_{pm} 相差不多产生混沌, 由式(12)有

$$|U_{hmx}| = |U_{pmx}| \quad |U_{hmr}| = |U_{pmr}| \cdot \omega_p / \omega_h \quad (19)$$

式(19)说明, 当 ω_p 与 ω_h 相差不太悬殊情况下, 有 $U_{hm} \approx U_{pm}$, 即对于任意的 U_{Fm} , 储能元件在第一瞬间得到的能量, 所能维持的自振强度 U_{hm} 与强振分量 U_{pm} 强弱差不多, 以相同的零初始条件, 对不同的 u_F 求主谐波解可列表 1, 两个分量非线性耦合均能产生混沌如图 2。

第二种、当 U_{hm} 与 U_{pm} 相差悬殊时不产生混沌, 以相同的 u_F 对不同的 (u_{10}, \dot{u}_{10}) , 用程序 Tab2.nb 求主谐波解列表 2。为获得 $U_{hm} \gg U_{pm}$ 应该使 $|u_{10}|$ 远大于 U_{Fm} , 以表 2/A 与 2/B 画相图, 大体相同如图 3(a), 可见初始储能基本上仅与初始位移的绝对值 $|u_{10}|$ 有关, u_{10} 正负引起两个分量振荡强度的差别是很小的。

Table 2. Main harmonic solutions of Example 1 for identical u_F
表 2. 对于相同的 u_F 例 1 的主谐波解

A	$u_r = U_{Fmr} \sin \omega_r t + U_{Fmx} \cos \omega_r t \quad u_r = U_{Fmr} = 8 \quad u_x = U_{Fmx} = 6$ $u_m = U_{Fm} = 10 \quad u_m^2 = u_r^2 + u_x^2 \quad \omega_{hx}^2 = w + 3kU_{eqmh}^2/4$ the difference between U_{hm} and U_{pm} is very outstanding $u_{10} = 50 \quad \dot{u}_{10} = 0 \quad u_{pm} = 0.0715 \quad u_{hm} = 50.043 \quad u_{\max} = 50.11$ $U_{hm} \gg U_{pm}$
B	$u_i = -0.0429 \text{Cos}(1560t) + 50.043 \text{Cos}(8130t) \quad U_{eqmh}^2 = 2504$ $- 0.0572 \text{Sin}(1560t) + 0.011 \text{Sin}(8130t)$ $u_{10} = -50 \quad \dot{u}_{10} = 0 \quad u_{pm} = 0.0717 \quad u_{hm} = 49.96 \quad u_{\max} = 50.03$ $U_{hm} \gg U_{pm}$
C	$u_i = -0.043 \text{Cos}(1560t) - 50 \text{Cos}(8116t) \quad U_{eqmh}^2 = 2496$ $- 0.057 \text{Sin}(1560t) + 0.011 \text{Sin}(8116t)$ $u_{10} = -6.05234 \quad \dot{u}_{10} = -13212.4 \quad u_{pm} = 10.59 \quad u_{hm} = 0.3$ $U_{hm} \ll U_{pm}$
D	$u_i = -6.35 \text{Cos}(1560t) + 0.3 \text{Cos}(2499t) \quad U_{eqmh}^2 = 224$ $- 8.47 \text{Sin}(1560t) + 0.00020 \text{Sin}(2499t)$ $u_{10} = -6.35678 \quad \dot{u}_{10} = -13222.1 \quad u_{pm} = 10.59 \quad u_{hm} = 0$ $u_{\max} = 10.59 \quad U_{hm} \ll U_{pm}$
	$u_i = -6.36 \text{Cos}(1560t) - 8.48 \text{Sin}(1560t)$ $U_{hm} = 0$

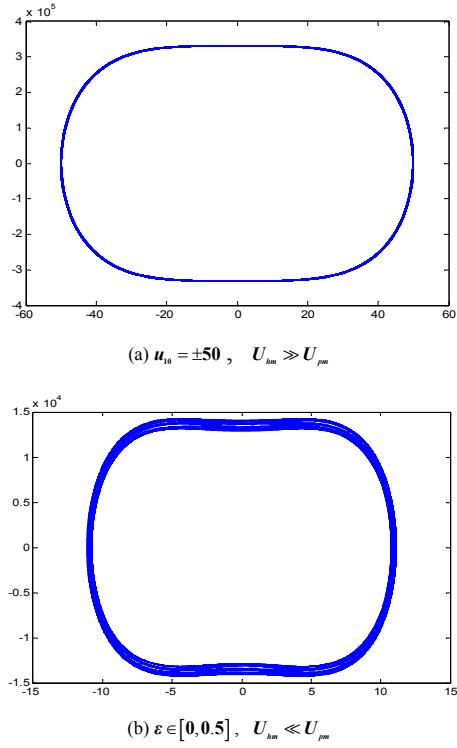


Figure 3. Phase portrait of Table 2
图 3. 表 2 的相图

$$u_{10} = U_{pmx} + \varepsilon \quad \dot{u}_{10} = U_{pmr}\omega_F + \varepsilon \quad \varepsilon \in [0, 0.5] \quad (20)$$

另之，如果初始条件满足式(20)，式中 ε 为充分小的数，则有 $U_{hm} \ll U_{pm}$ 如表 2/C，当 $\varepsilon = 0$ 时，自振分量消失 $uhm = 0$ ，只有强振分量如表 2/D。以表 2/C 与 2/D 画相图，其性状大体相同如图 3(b)说明，当 U_{hm} 与 U_{pm} 相差比较悬殊时，两者非线性耦合不能产生混沌。

两个振荡成份有各自的基波，如果其中有一个成份占绝对压倒优势，它就容易形成以此频率成份为主导的周期振荡；如果两个振荡成份强弱相差不多，两者都不能成为占有压倒优势的主导地位，它无法形成以其中之一为主导的周期振荡，非线性混合的结果就造成非周期振荡也就是混沌，它只能诞生在三维或以上的相空间。上述两者都是振荡解，第一种的时间波形，在观测仿真研究的时间内没有周期性，相图的轨迹没有重复性；第二种的时间波形有周期性，相图的轨迹不断重复^[8-10]。

6. 等效电路和非线性电感的实现

$$\begin{aligned} i_F &= I_{Fmx} \cos \omega_F t + I_{Fmr} \sin \omega_F t = C_2 \dot{u}_F \\ &= \omega_F C_2 (U_{Fmr} \cos \omega_F t - U_{Fmx} \sin \omega_F t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\ddot{u} + u(w + ku^2) = i_F/C \quad (22a)$$

$$i_F/C = -\omega_F^2 C_2 u_F/C = C_2 \ddot{u}_F/C \quad (22b)$$

视图 1 电路 AB 端口以右的 $1/(\omega_F C_2)$ 为线性电抗，可以用代维南诺尔顿定理转换成电流源电路图 4，图中的 i_F 如式(21)，两个图对端口 AB 贡献相同的端口电压 u 和端口电流 i_A 。图 4 的两个电容合并 $C_1 + C_2 = C$ 可得图 5，这是一个诞生混沌的典型电路，图 1 是它的变形，列图 5 标量方程如式(22)，式(22a)与式(7)的右边项相等如式(22b)，电压源电路图 1 和电流源电路图 5 贡献相同的状态变量电压 u ，对于表 1 的各激励电压 u_F ，用程序 Tab3.nb 可求出其对应的激励电流 i_F 如表 3。

由表 3 可发现，电压源与电流源成正比

$I_{Fm} = (0.593 \times U_{Fm})$ 毫安，若电压源用 20 伏，则电流源要求 11.86 毫安，在电子技术实验室这是两个很容易实现的数据。

$$u = iL_0 / (1 + kCL_0 u^2) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} i_d = i &= u/L_N = u/L_0 + kCu^3 \\ &= 0.36u + 0.035u^3 \end{aligned} \quad (24)$$

压控非线性电感 L_N 被表示如式(1b)，它建立 $i = di/dt$ 和 u 之间的非线性关系即 $u = L_N i$ 如式(23)，用式(1b)的参数代入(23)，展开这个非线性关系可以得出式(24)，式中 i 代表电流的微分， u 代表电压。构造一个模拟网络使端口电压 $u(t)$ 和端口电流的微分

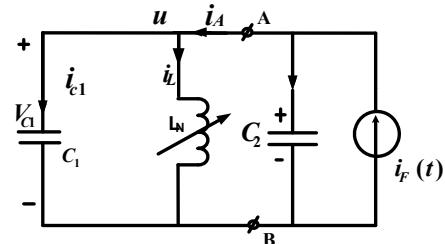


Figure 4. Equivalent circuit
图 4. 等效电路

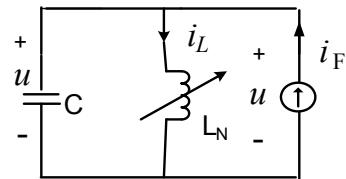


Figure 5 Current source circuit
图 5. 电流源电路

Table 3. Contrast excited voltage u_F to excited current i_F 表 3. 对照激励电压 u_F 和激励电流 i_F

$u_F = U_{Fm} \sin \omega_F t + U_{Fmx} \cos \omega_F t$ (伏) $I_F = I_{Fmx} \cos \omega_F t + I_{Fm} \sin \omega_F t$ (毫安) 相量表示 $i\bar{U}_F = u_r + j \cdot u_x$ $\bar{I}_F = j\omega_F C_2 (u_r + j \cdot u_x) = \omega_F C_2 (j \cdot u_r - u_x) = i_r + j \cdot i_x$ $I_{Fmx} = i_x = \omega_F C_2 U_{Fmx}$; $I_{Fm} = i_r = -\omega_F C_2 U_{Fmx}$ $u_r = U_{Fmx}$ $u_x = U_{Fmx}$ $U_{Fm}^2 = u_r^2 + u_x^2$ $I_{Fm}^2 = i_r^2 + i_x^2$ $\omega_F C_2 = 593 \times 10^{-6}$ (西门子)					
A	$U_{Fm} = 1$	$u_r = 0.5477$	$u_x = 0.8367$ (伏)	$I_{Fm} = 0.593$	$i_r = -0.496$ $i_x = 0.325$ (毫安)
B	$U_{Fm} = 2$	$u_r = 1.265$	$u_x = 1.55$	$I_{Fm} = 1.186$	$i_r = -0.9188$ $i_x = 0.75$
C	$U_{Fm} = 5$	$u_r = 3.16$	$u_x = 3.873$	$I_{Fm} = 2.963$	$i_r = -2.30$ $i_x = 1.873$
D	$U_{Fm} = 10$	$u_r = 7.746$	$u_x = 6.32$	$I_{Fm} = 5.93$	$i_r = -3.75$ $i_x = 4.59$
E	$U_{Fm} = 15$	$u_r = 12.55$	$u_x = 8.216$	$I_{Fm} = 8.89$	$i_r = -4.87$ $i_x = 7.44$
F	$U_{Fm} = 20$	$u_r = 7.746$	$u_x = 18.44$	$I_{Fm} = 11.86$	$i_r = -10.93$ $i_x = 4.59$

$i(t)$ 形成上述的三次方非线性关系，这个网络特性就是 L_N 。

7. 混沌的本质是非周期振荡

在无法求出方程解析解的情况下，通过数值仿真相图，可以定性分析连续时间系统轨道混沌的本质，属于非周期振荡，当前学术界关于混沌存在各种共识或非共识的论点。可以通过无损耗系统的非周期振荡性状加以印证或甄别^[11-13]。

1) 相点运动轨迹的有界性不一定是吸引子

非周期振荡的运动轨道是有界的非线性函数，不一定是吸引子，它对周围的轨线没有吸引性，因而无损耗系统形成的这一类混沌振荡不是吸引子，混沌和吸引子是两个必须区别的概念。

2) 混沌振荡的确定性(没有内随机性)

系统参数或起始值在一个临界点左右发生微小变化。系统的动态特性会发生质的根本性变化(蝴蝶效应)，这在自然界经常出现，这种貌似随机的现象并不是存在于混沌诞生以后的混沌内部过程，因而混沌的广泛实际应用没有受到影响，这个临界点发生在《是否产生混沌的边界》，向右偏 0_+ 它混沌了，向左偏 0_- 它不混沌了，它貌似随机是在这个临界点，如果远离这个临界点，混沌一旦诞生之后，其内部的变化规律就完全确定下来了。就是说要明确貌似随机究竟发生在什么地方。 $y = \tan x$ ，当 $x = \pi/2 + 0_\pm$ ，那不也是一种蝴蝶效应吗？我们决不能说由于这种蝴蝶效应，因而 $\tan x$ 是一个奇异函数，最多只能说在 $x = \pi/2 + 0_\pm$

时是一个奇异的间断点，在这个间断点的左右，函数值发生质的根本变化。混沌吸引子的轨道描写还是遵守各科学定理定律对它的约束。它是确定性的，貌似随机的相点不可能停留在相图上显示出来，例如有大小两个稳定极限环，中间夹有一个不稳定极限环，环的全部点集是貌似随机的相点，即蝴蝶效应的点集是无法显示成一条轨线，相图上不可能显示出不稳定极限环的轨线。混沌相图显示的轨线是确定性的，不是随机也不是貌似随机的。

微分方程的唯一性理论说明，一个方程的解只可能有一个相图，如果混沌有内随机性，则说明方程的数值仿真解可能有两个相图，这是违背唯一性理论的。况且，这一次发射的混沌信号与下一次的不同，那么混沌根本不可应用于工程实际。如果有内随机引起的轨道不确定性，是无法用外加的控制与镇定加以改善的。

3) 振荡的不稳定性(有外随机性)

无损耗系统构成的混沌，对初值的敏感依赖说明，它在外来因素的干扰下轨线会随之而变，是局部不稳定的。但它的有界性说明它是全局稳定的。这种外随机因素引起的轨道不稳定，是可以通过控制与镇定加以改善的。

4) 混沌相图有复杂确定的固有规律

大多数非线性方程的解析解都是求不出的，混沌非周期函数形式正是这些解不出方程，用数值仿真计算出来的结果。混沌相图不是没有规律，而是至今人类还没有识透其中的规律。其相图的混乱程度已经足

以令人相信，人类至今无法用数学语言来描写它的变化规律，人类至今只能认识的是，它的变化规律要遵守微分方程的约束，混沌相图的性状唯一的取决于微分方程。

混沌诞生至今已有半世纪的时间，它的出现没有动摇微分方程的基础理论，它并没有摆脱自然科学各学科理论各种定理定律对它的约束，混沌的普遍性还表现在，一个混沌系统的输出方程，可以变出几十种不同的变形相图，无论怎样变来变去，它的状态描写并没有冲破现有各种科学理论的框架。

5) 当前混沌的研究现状

数学领域的非线性函数千变万化，其造就的非线性微分方程的相轨线千姿百态，当前新混沌系统不断涌现如雨后春笋。各文献中提出的新混沌和变形，对混沌科学的发展做出创新性贡献，从这些文献总结抽象出具有共性的特征，才能正确认识混沌应用混沌^[12,13]。在原来形成混沌的基础上，再添写一些非线性项，只要这些非线性项的增加，系统没有诞生趋于无穷的理想特性，相点不可能趋于无穷，没有诞生新的稳定平衡点，必然又是另一个混沌或超混沌的。不久的将来，随着对混沌的深入研究和实践工程应用，各种非线性混沌系统相继提出，这种趋势在今后会快速发展起来。只要用数值仿真，造就出一些不同的混沌相图，就是新的或变形的，正如数学领域有很多非线性函数一样，今后各种各类的混沌或超混沌系统会不断大量涌现出来。

8. 结论

1) 非周期振荡的普遍性

非周期振荡形成千姿百态的混沌相图是振荡运动的一般普遍形式。人类完全可以提出相反的反问，奇怪？为什么相点会始终不断的重复原来的运动轨道，人们也完全可以得出相反的结论：相点在相空间自由任意不重复的游荡(并非随机而是确定性的)，是正常普遍的运动形式，而不断重复原来运动轨迹的等周期振荡，才是相点运动的特殊形式。

2) 电路图 1 和图 5 比蔡氏电路简单，混沌不但可由三维自治电路产生，也可用二维非自治电路产生，提出这样一个即简单又典型的电路，它们产生混沌的普遍性是指，可以不须要刻意的设计电路参数，均能

很容易诞生混沌，例如表 1 的各参数；而并不是说图 1 和图 5 在任意情况下必然会诞生混沌(如表 2 所示的情况不混沌)。在理论上，它有阐明混沌振荡基本特征的重要意义。振荡解不一定要用相图表示，将混沌相图展开为非周期振荡的时间波形，在实用上可以破除混沌信号的神秘感，奇异感。使混沌信号发生器走进普通高校本科实验室，要在国内外的学术平台上，用实验与理论分析论证，混沌是一个非常普通普遍与广泛存在的非线性函数，它是三维或以上非线性微分方程的一般解。

9. 致谢

感谢国家自然科学基金资助项目：非线性微分方程基础上的功率平衡(60662001)。

参考文献 (References)

- [1] 黄炳华, 卫雅芬, 黄莹. 非线性振荡每一谐波成份的复功率守恒[A]. 第 23 届电路与系统学术年会论文集[C]. 桂林: 桂林电子科技大学, 2011.
- [2] D. D. Ganji, M. Esmailpour and S. Soleimani. Approximate solutions to van der pol damped nonlinear oscillators by means of he's energy balance method. Computer Mathematics, 2010, 87(9): 2014-2023
- [3] Y. M. Chen, J. K. Liu. A new method based on the harmonic balance method for nonlinear oscillators. Physics Letters A, 2007, 368(5): 371-378
- [4] 黄炳华, 黄新民, 张海明. 各类自激振荡的基波分析法[J]. 固体电子学研究和进展, 2005, 25(1): 102-107.
- [5] 黄炳华, 黄新民, 王庆华. 用基波平衡原理分析非线性电子网络的稳定性[J]. 固体电子学研究和进展, 2006, 26(1): 43-48.
- [6] 黄炳华, 黄新民, 韦善革. 用基波平衡原理分析非线性振荡与混沌[J]. 通信学报, 2008, 29(1): 65-70.
- [7] 黄炳华, 钮利荣, 蘭兰峰. 功率平衡基础上的基波分析法[J]. 电子学报, 2007, 35(10): 1994-1998.
- [8] 黄炳华, 黄新民, 李晖. 基于功率平衡的谐波分析法[A]. 第 22 届电路与系统学术年会论文集[C]. 上海: 复旦大学, 2010.
- [9] B.-H. Huang, X.-M. Huang and H. Li. Main components of harmonic solutions. In: International Conference on Electric Information and Control Engineering. New York: IEEE Inc., 15-17 April 2011: 2307-2310.
- [10] B.-H. Huang, X.-M. Huang and H. Li. Main components of harmonic solutions of nonlinear oscillations. Procedia Engineering, 2011, 16: 325-332.
- [11] 黄炳华, 李广明, 卫雅芬. 用虚功平衡原理求解无损耗系统的主谐波[J]. 现代物理, 2012, 2(3): 60-69.
- [12] S. M. Yu, W. K. S. Tang, J. Lu, et al. Generating 2n-wing attractors from Lorenz-like systems. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2010, 38(3): 243-258.
- [13] S.-M. Yu, S.-S. Qiu and Q.-H. Lin. New results of study on generating multiple-scroll chaotic attractors. Science in China (Series F), 2003, 46(2): 104-115.
- [14] Mathematica 程序(按出现先后排序): ①first.nb; ②Tab1.nb; ③Tab2.nb; ④Tab3.nb.