

The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Augmented 3-Ary n -Cubes

Nan Zhao¹, Shiyong Wang^{1,2*}

¹School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan

²Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, Henan Normal University, Xinxiang Henan

Email: wangshiyong@htu.edu.cn

Received: Nov. 10th, 2016; accepted: Nov. 26th, 2016; published: Nov. 30th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Diagnosability of a multiprocessor system is an important study topic. The g -good-neighbor diagnosability of the system was proposed by Peng *et al.* in 2012, which restrained every fault-free node containing at least g fault-free neighbors. As a favorable topology structure, the augmented 3-ary n -cubes graph has many good properties. In this paper, we prove that the 1-good-neighbor diagnosability of augmented 3-ary n -cube is $8n - 10$ under the PMC model and MM* model for $n \geq 4$.

Keywords

Interconnection Network, Augmented 3-Ary n -Cubes, Connectivity, Diagnosability

扩张3元 n 立方的1好邻诊断度

赵楠¹, 王世英^{1,2*}

¹河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡

²河南师范大学, 河南省大数据统计分析与优化控制工程实验室, 河南 新乡

Email: wangshiyong@htu.edu.cn

收稿日期: 2016年11月10日; 录用日期: 2016年11月26日; 发布日期: 2016年11月30日

*通讯作者。

摘要

多重处理器系统的故障诊断是一个非常重要的研究课题。处理器系统的 g 好邻诊断度是在2012年被Peng等提出来的,它要求每个非故障顶点至少有 g 个非故障邻点。扩张3元 n 立方体是一个受欢迎的拓扑结构,它有许多好的性质。在本文中,我们证明了扩张3元 n 立方体在PMC模型和MM*模型下的1好邻诊断度都是 $8n-10$ ($n \geq 4$)。

关键词

互连网络, 扩张3元 n 立方, 连通度, 诊断度

1. 引言

诊断度是多处理器系统故障分析的一个重要参数。它在衡量互连网络可靠性方面有着重要作用。在1997年, Preparata [1]等首次提出了系统诊断度理论。它的优点在于能够自动地检测系统中的处理器。系统级故障理论的研究依赖于模型的建立, 因此许多模型被提出。例如 Preparat [1]等提出了 PMC 模型; Maeng 和 Malek [2]提出了 MM*模型。在2005年, Lai [3]等考虑到在一个系统中, 某个处理器的所有与之相邻的处理器同时发生故障的概率很小, 故而对传统诊断理论做了改进, 提出了条件诊断度, 它要求系统中每个处理器至少与一个非故障处理器相连。在2012年, Peng [4]在条件诊断度的基础上, 进一步提出了 g 好邻条件诊断度。它要求每个非故障处理器至少与 g 个非故障处理器相邻, 并且证明了超立方体在 PMC 模型下的 g 好邻诊断度是 $2^g(n-g)+2^g-1$ ($0 \leq g \leq n-3$)。原军等在[5] [6]中分别证明了 g 元 n 立方体在 PMC 模型下的 g 好邻诊断度是 $2^g(2n-g+1)-1$ ($k \geq 4, n \geq 3, 0 \leq g \leq n$)和3元 n 立方体在 PMC 模型和 MM*模型下的 g 好邻诊断度是 $\frac{g}{2}(2n-g+1)-1$ (g 是偶数)和 $\frac{g-1}{2}(4n-2g+1)-1$ (g 是奇数) ($n \geq 4, 0 \leq g \leq n-1$)。在[7] [8]中, 王伞江山等研究了 CT_n 在 PMC 模型和 MM*模型下的 g 好邻诊断度, 此时 $g=1, 2$ 。在[9]中, 王世英和韩威萍研究了 n 维超立方体在 MM*模型下的 g 好邻诊断度。近些年来, 许多基于超立方体的变形网络图被提出, 例如, 交叉立方体, 分层立方网络, k 元 n 立方网络等, 它们较之超立方体有着更好的拓扑性质, 因此在某些领域更受青睐。在本文中, 我们主要证明了在 $n \geq 4$ 时, 扩展3元 n 立方网络图在 PMC 模型和 MM*模型下的1好邻诊断度均为 $8n-10$ 。

2. 预备知识

2.1. 符号

我们用一个无向简单图 $G=(V, E)$ 来表示多重处理器系统, 其中 $V=V(G)$ 是图的顶点集, 一个顶点代表了一个处理器, $E=E(G)$ 是图 G 的边集, 它表示了处理器之间的连接关系。对于任意的非空顶点子集 $V' \subset V$, 以 V' 为顶点集, 以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为 V' 在 G 中的导出子图, 记作 $G[V']$ 。 $d_G(v)$ 是顶点 v 在 G 中关联的边的数目, 表示 v 在 G 中的度。 $\delta(G)$ 表示 G 的顶点的最小度。对于任意顶点 $v \in V$, 在 G 中与 v 相邻的所有顶点组成的集合称为 v 的邻集, 记作 $N_G(v)$ 。若 S 是 G 的非空顶点子集, 则 S 的邻集为 $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v) \setminus S$ 。对 $\forall u, v \in G$, 令

$cn(G) = \max\{cn(G; u, v) : u, v \subseteq V(G)\}$ 。图 G 被叫做 k -正则的, 是指它的任意一点 v 都有 $d_G(v) = k$ 。对

于任意的 $F \subset V$, 若 $v \in V \setminus F$ 且 v 在 $G[V \setminus F]$ 中至少有 g 个邻点, 则称 F 为 G 的 g 好邻故障集。如果 $G - F$ 不连通且 $G - F$ 的每个连通分支的最小度为 g , 则称 F 是一个 g 好邻割。 G 的所有 g 好邻割中的最小顶点数称为 G 的 g 好邻连通度, 记作 $\kappa^{(g)}(G)$ 。

在 PMC 模型中, 相邻的处理器之间可以相互测试。图 G 中, 对于任意的 $(u, v) \in E(G)$ 表示用 u 测试 v , 其中 u 是测试者, 而 v 是被测试者。若 u 是非故障点而 v 是故障点(或非故障点), 则测试结果是 1 (或 0)。若 u 是故障点, 则测试结果不可靠。

在 MM*模型下, 一个结点 w 同时向与它相邻的两个结点 u, v 发出一个相同的测试任务, 再把测试结果返回给结点 w , w 会对返回的结果进行比较。用 $(u, v)_w$ 来表示 w 对 u, v 进行测试的比较结果。如果这两个结果是相同的, 则 $(u, v)_w = 0$; 否则, $(u, v)_w = 1$ 。若 w 是故障的, 则测试结果无论是 0 或 1 都是不可靠的。

2.2. 扩展 k 元 n 立方体

令 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 。在[10]中, 作者给出了扩展 k 元 n 立方的两个定义。

定义 1 [10] 令 $n \geq 1$ 和 $k \geq 3$ 是整数, 扩展 k 元 n 立方 $AQ_{n,k}$ 有 k^n 点, 每个点用一组 n 维字符串表示, 即 $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, 其中 $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 和 $i \in [n]$ 。如果 $u = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_1)$ 和 $v = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ 相邻当且仅当满足下列条件中的一个:

1) $v_i = u_i - 1$ (或 $v_i = u_i + 1$), 对 $\forall i \in [n]$, 而 $u_j = v_j$, 对 $j \in [n] \setminus \{i\}$, 那么这种边 (u, v) 被称为一条 $(i, -1)$ 边(或 $(i, +1)$ 边);

2) 存在某个 $2 \leq i \leq n$, $v_i = u_i - 1$, $v_{i-1} = u_{i-1} - 1, \dots, v_1 = u_1 - 1$ (或 $v_i = u_i + 1, v_{i-1} = u_{i-1} + 1, \dots, v_1 = u_1 + 1$), $u_j = v_j$, 对所有的 $j > i$ 成立, 则这种边 (u, v) 被叫做 $(\leq i, -1)$ 边(或 $(\leq i, +1)$ 边)。

扩展 k 元 n 立方也可以按照如下定义。

定义 2 [10] 令 $k \geq 3$, 扩展 k 元 1 立方 $AQ_{1,k}$ 的顶点集为 $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ 。 u 与 v 相邻当且仅当 $v = u - 1$ 或者 $v = u + 1$ 。令 $n \geq 2$, 扩展 k 元 n 立方 $AQ_{n,k}$ 是由 k 个扩展 k 元 $n-1$ 立方 $AQ_{n-1,k}$ 构成的, 其中第 i 个 $AQ_{n-1,k}$ 中的点的第 n 位皆为一个固定的数 i ($i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$)。且对 $\forall u \in AQ_{n-1,k}$, 点 u 将增加四条边, 即 $(n, -1)$ 边, $(n, +1)$ 边, $(\leq n, -1)$ 边, $(\leq n, +1)$ 边。

引理 1 [10] 令 $AQ_{n,k}$ 为扩展 k 元 n 立方, 且 $n \geq 2$ 和 $k \geq 3$ 是整数。

1) 对 $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, 由第 n 位是 i 的所有点构成的 $AQ_{n,k}$ 的导出子图, 被定义为 $AQ_{n,k}^i$, 它同构与 $AQ_{n-1,k}$;

2) $AQ_{n,k}$ 是点传递的, $AQ_{2,k}$ 是边传递的, 而且 $\kappa(AQ_{n,k}) = 4n - 2$;

3) $AQ_{n,k}^i$ 与 $AQ_{n,k}^{i+1}$ 之间的边组成的集合被定义为 E_i , 并且 $|E_i| = 2 \times k^{n-1}$;

4) 令 $U \subset V(AQ_{n,k}^i)$ (其中 $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$), 那么 $|N_{AQ_{n,k} - AQ_{n,k}^i}(U)| \geq 2|U|$ 。

为了方便, 我们采用下面的方法来表示一个点在 $AQ_{n,k}$ 中的邻点。令 $u = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1) \in V(AQ_{n,k})$ 。那么, u 的邻点分别是: 当 $1 \leq i \leq n$, $u_{(i,-1)} = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_i - 1, \dots, u_2, u_1)$, 或 $u_{(i,+1)} = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_i + 1, \dots, u_2, u_1)$; 当 $2 \leq i \leq n$, $u_{(\leq i,-1)} = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_i - 1, \dots, u_2 - 1, u_1 - 1)$, 或 $u_{(\leq i,+1)} = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_i + 1, \dots, u_2 + 1, u_1 + 1)$ 。

引理 2 [11] 如果 $(u, u_{(i,-1)})$ 是 $AQ_{n,k}$ 的一条 $(i, -1)$ 边, $(u, u_{(\leq i,-1)})$ 是 $AQ_{n,k}$ 的一条 $(\leq i, -1)$ 边, 那么下列条件成立:

1) 当 $n = 2$ 且 $k = 3$ 时,

$$N_{AQ_{2,3}}(u) \cap N_{AQ_{2,3}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(1,+1)}, u_{(\leq 2,-1)}, u_{(2,+1)}\};$$

$$N_{AQ_{2,3}}(u) \cap N_{AQ_{2,3}}(u_{(\leq 2,-1)}) = \{u_{(1,-1)}, u_{(\leq 2,-1)}, u_{(2,-1)}\}.$$

2) 当 $n=2, k \geq 4$,

如果 $i=1$, $N_{AQ_{2,k}}(u) \cap N_{AQ_{2,k}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(\leq 2,-1)}, u_{(2,+1)}\};$

如果 $i=2$, $N_{AQ_{2,k}}(u) \cap N_{AQ_{2,k}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(\leq 2,-1)}, u_{(1,+1)}\};$

$$N_{AQ_{2,k}}(u) \cap N_{AQ_{2,k}}(u_{(\leq 2,-1)}) = \{u_{(2,-1)}, u_{(1,-1)}\}.$$

3) 当 $n \geq 3, k=3$,

如果 $i=1$, 那么 $N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(i,+1)}, u_{(\leq 2,-1)}, u_{(2,+1)}\};$

如果 $2 \leq i < n$, 那么 $N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(i,+1)}, u_{(\leq i,-1)}, u_{(\leq i-1,+1)}\};$

如果 $2 \leq i \leq n-1$, 那么 $N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(u_{(\leq i,-1)}) = \{u_{(i,+1)}, u_{(\leq i+1,-1)}, u_{(\leq i-1,-1)}, u_{(i+1,+1)}, u_{(i,-1)}\};$

如果 $i=n$, 那么 $N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(u_{(\leq i,-1)}) = \{u_{(i,-1)}, u_{(\leq i,+1)}, u_{(\leq i-1,-1)}\}.$

4) 当 $n \geq 3, k \geq 4$,

如果 $i=1$, 那么 $N_{AQ_{n,k}}(u) \cap N_{AQ_{n,k}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(\leq 2,-1)}, u_{(2,+1)}\};$

如果 $2 \leq i < n$, 那么 $N_{AQ_{n,k}}(u) \cap N_{AQ_{n,k}}(u_{(i,-1)}) = \{u_{(\leq i,-1)}, u_{(\leq i-1,+1)}\};$

如果 $2 \leq i \leq n-1$, 那么 $N_{AQ_{n,k}}(u) \cap N_{AQ_{n,k}}(u_{(\leq i,-1)}) = \{u_{(\leq i+1,-1)}, u_{(\leq i-1,-1)}, u_{(i+1,+1)}, u_{(i,-1)}\};$

如果 $i=n$, 那么 $N_{AQ_{n,k}}(u) \cap N_{AQ_{n,k}}(u_{(\leq i,-1)}) = \{u_{(i,-1)}, u_{(\leq i-1,-1)}\}.$

引理 3 [11] 令 $AQ_{n,k}$ 是扩展 k 元 n 立方, 其中 $n \geq 2$ 且 $k \geq 3$ 均为整数. 令 u, v 是 $AQ_{n,k}$ 中的两个不同的点, 那么:

1) $cn(AQ_{n,3}; u, v) \leq 6$, 当 $n \geq 2$;

2) $cn(AQ_{2,k}; u, v) \leq 2$, 当 $k \geq 4$;

3) $cn(AQ_{n,k}; u, v) \leq 4$, 当 $n \geq 3, k \geq 4$.

引理 4 [11] 令 $AQ_{n,3}$ 是扩展 3 元 n 立方, 当 $n \geq 3$ 时, $AQ_{n,3}$ 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}(AQ_{n,3}) = 8n - 11$.

3. $AQ_{n,3}$ 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度

定理 1 [12] 一个系统 $G=(V, E)$ 在 PMC 模型下是 g 好邻 t -可诊断的当且仅当对于 V 中任意两个不同的顶点数至多为 t 的 g 好邻故障集 F_1, F_2 , 存在 $u \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uv \in E$ (如图 1).

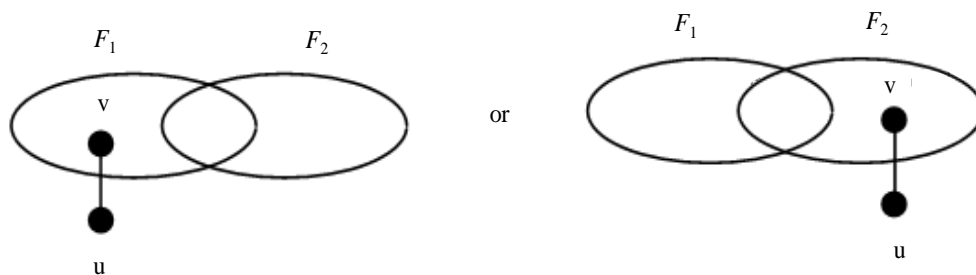


Figure 1. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the PMC model

图 1. 在 PMC 模型下可区分对 (F_1, F_2)

引理 5 [11] 当 $n \geq 4$ 时, 对任意的 $u, v \in V(AQ_{n,3})$, 若 u 和 v 相邻, 则有 $cn(AQ_{n,3}:u,v) \leq 5$; 若 u 和 v 不相邻, 则有 $cn(AQ_{n,3}:u,v) \leq 6$ 。

引理 6 当 $n \geq 4$ 时, 设 $u = (0, 0, \dots, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, \dots, 0, 2, 2)$, $A = \{u, v\}$, $F_1 = N_{AQ_{n,3}}(A)$ 和 $F_2 = A \cup N_{AQ_{n,3}}(A)$, 那么有 $|F_1| = 8n - 11$, $|F_2| = 8n - 9$, 且 $\delta(AQ_{n,3} - F_1) \geq 1$, $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 。

证明 因为 $v = u_{(\leq 2, -1)}$, 所以 $AQ_{n,3}[A] = K_2$ 。又因为 $N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(v) = \{(0, 0, \dots, 0, 1, 1), (0, 0, \dots, 0, 2, 0), (0, 0, \dots, 1, 0, 0), (0, 0, \dots, 2, 2, 2), (0, 0, \dots, 0, 0, 2)\}$, 所以 $|N_{AQ_{n,3}}(u) \cap N_{AQ_{n,3}}(v)| = 5$ 。根据引理 5 知, u, v 在 $AQ_{n,3}$ 中的公共邻点数达到最大。又因为 $|N_{AQ_{n,3}}(u) \setminus A| = 4n - 3$, $|N_{AQ_{n,3}}(v) \setminus A| = 4n - 3$, 所以 $|F_1| = 2 \times (4n - 3) - 5 = 8n - 11$, $|F_2| = |F_1| + 2 = 8n - 9$ 。

下面我们证明 $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 。

任取 $x \in V(AQ_{n,3}) \setminus F_2$, 根据引理 5, 任意一对不相邻的顶点至多有 6 个公共邻点, 即 $cn(AQ_{n,3}:u,x) \leq 6$, $cn(AQ_{n,3}:v,x) \leq 6$ 。因此, $|N_{AQ_{n,3}}(x) \cap F_1| \leq 6 \times 2 = 12$ 。又因为 $|N_{AQ_{n,3}}(x)| = 4n - 2$, 所以当 $n \geq 4$ 时有 $4n - 2 - 12 = 4n - 14 \geq 2$ 。于是有当 $n \geq 4$, $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 。

$AQ_{n,3} - F_1$ 有两个部分: $AQ_{n,3}[A]$ 和 $AQ_{n,3} - F_2$ 。因为 $\delta(AQ_{n,3}[A]) = 1$ 和 $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$, 所以 $\delta(AQ_{n,3} - F_1) \geq 1$ 。

引理 7 当 $n \geq 4$ 时, $AQ_{n,3}$ 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) \leq 8n - 10$ 。

证明 令集合 A 的定义与引理 6 相同, $F_1 = N_{AQ_{n,3}}(A)$, $F_2 = A \cup N_{AQ_{n,3}}(A)$ 。根据引理 6, $|F_1| = 8n - 11$, $|F_2| = 8n - 9$, $\delta(AQ_{n,3} - F_1) \geq 1$, $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 。因此, F_1 和 F_2 是 $AQ_{n,3}$ 的 1 好邻故障集。因为 $F_1 \Delta F_2 = A$, $N_{AQ_{n,3}}(A) = F_1 \subset F_2$, 所以在 $AQ_{n,3}$ 中, 不存在从 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 到 $F_1 \Delta F_2$ 的边。根据定理 1, $AQ_{n,3}$ 不是 1 好邻 $(8n - 9)$ -可诊断的。因此, $t_1(AQ_{n,3}) \leq 8n - 10$ 。

引理 8 当 $n \geq 4$ 时, $AQ_{n,3}$ 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) \geq 8n - 10$ 。

证明 由 1 好邻诊断度的定义, 我们只需要证明 $AQ_{n,3}$ 是 1 好邻 $(8n - 10)$ -可诊断的。根据定理 1, 等价于证明对于任意两个不同的 1 好邻故障集 F_1, F_2 , 其中 $|F_1| \leq 8n - 10$ 和 $|F_2| \leq 8n - 10$, 存在 $u \in V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uv \in E$ 。反证法。假设 F_1 和 F_2 是两个不同的 1 好邻故障集, 并且 $|F_1| \leq 8n - 10$, $|F_2| \leq 8n - 10$ 。但是这个点集对 (F_1, F_2) 不满足定理 1 的任何条件。不失一般性, 我们假设 $F_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ 。如果 $V(AQ_{n,3}) = F_1 \cup F_2$, 那么 $3^n = |V(AQ_{n,3})| = |F_1 \cup F_2| \leq |F_1| + |F_2| \leq 2(8n - 10) = 16n - 20$, 这显然与 $n \geq 4$ 时 $3^n > 16n - 20$ 矛盾。因此, $V(AQ_{n,3}) \neq F_1 \cup F_2$ 。然后由于从 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 到 $F_1 \Delta F_2$ 没有边和 F_2 是 $AQ_{n,3}$ 的一个 1 好邻故障集, 所以 $\delta(AQ_{n,3}[F_1 \setminus F_2]) \geq 1$ 和 $\delta(AQ_{n,3} - F_1 - F_2) \geq 1$ 。同理, 若 $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$, 那么 $\delta(AQ_{n,3}[F_2 \setminus F_1]) \geq 1$ 。由于从 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 到 $F_1 \Delta F_2$ 没有边, 所以 $F_1 \cap F_2$ 是一个 1 好邻割。根据引理 4, 有 $|F_1 \cap F_2| \geq 8n - 11$ 。又因为 $|F_1 \setminus F_2| \geq 2$, 所以 $|F_1| = |F_1 \setminus F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 8n - 11 = 8n - 9 > |F_1|$, 这显然是矛盾的。因此 $AQ_{n,3}$ 是 1 好邻 $(8n - 10)$ -可诊断的, 即 $t_1(AQ_{n,3}) \geq 8n - 10$ 。

定理 2 $AQ_{n,3}$ ($n \geq 4$) 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) = 8n - 10$ 。

4. $AQ_{n,3}$ 在 MM* 模型下的 1 好邻诊断度

定理 3 [12] 一个系统 $G = (V, E)$ 在 MM* 模型下是 g 好邻 t -可诊断的当且仅当对 V 中任意两个不同的顶点数至多为 t 的 g 好邻故障集 F_1, F_2 , 满足以下其中一个条件(如图 2)。

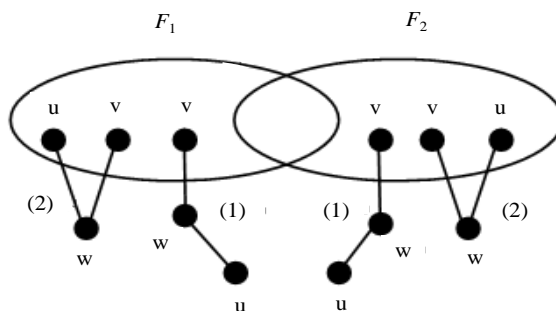


Figure 2. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM^* model

图 2. 在 MM^* 模型下可区分对 (F_1, F_2)

- 1) 存在 $u, w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$ 满足 $uw, vw \in E$ 。
- 2) 存在 $u, v \in F_1 \setminus F_2$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw, vw \in E$ 。
- 3) 存在 $u, v \in F_2 \setminus F_1$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw, vw \in E$ 。

引理 9 当 $n \geq 4$ 时, $AQ_{n,3}$ 在 MM^* 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) \leq 8n - 10$ 。

证明 令集合 A 的定义与引理 6 相同, $F_1 = N_{AQ_{n,3}}(A)$, $F_2 = A \cup N_{AQ_{n,3}}(A)$ 。根据引理 6, $|F_1| = 8n - 11$, $|F_2| = 8n - 9$, $\delta(AQ_{n,3} - F_1) \geq 1$, $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 。因此, F_1 和 F_2 是 $AQ_{n,3}$ 的 1 好邻故障集。因为 $F_1 \Delta F_2 = A$, $N_{AQ_{n,3}}(A) = F_1 \subset F_2$, 所以在 $AQ_{n,3}$ 中, 不存在从 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 到 $F_1 \Delta F_2$ 的边。根据定理 1, $AQ_{n,3}$ 不是 1 好邻 $(8n - 9)$ -可诊断的。因此, $t_1(AQ_{n,3}) \leq 8n - 10$ 。

引理 10 当 $n \geq 4$ 时, $AQ_{n,3}$ 在 MM^* 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) \geq 8n - 10$ 。

证明 根据 1 好邻诊断度的定义, 需要证明 $AQ_{n,3}$ 是 1 好邻 $(8n - 10)$ -可诊断的。反证法。根据定理 3, 假设 F_1 和 F_2 是两个不同的 1 好邻故障集, 并且 $|F_1| \leq 8n - 10$, $|F_2| \leq 8n - 10$ 。但是这个点集对 (F_1, F_2) 不满足定理 3 的任何一个条件。不失一般性, 我们假设 $F_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ 。按照下面的情况进行讨论:

情形 1 $V(AQ_{n,3}) = F_1 \cup F_2$ 。

因为 $V(AQ_{n,3}) = F_1 \cup F_2$, 所以 $3^n = |V(AQ_{n,3})| = |F_1 \cup F_2| \leq |F_1| + |F_2| \leq 2(8n - 10) = 16n - 20$, 这显然与 $n \geq 4$ 时 $3^n > 16n - 20$ 矛盾。因此, $V(AQ_{n,3}) \neq F_1 \cup F_2$ 。

情形 2 $V(AQ_{n,3}) \neq F_1 \cup F_2$ 。

断言 1 $AQ_{n,3} - F_1 - F_2$ 没有孤立点。

反证法。假设 $AQ_{n,3} - F_1 - F_2$ 至少有一个孤立点 w 。因为 F_2 是一个 1 好邻故障集, 所以至少存在一点 $u \in F_1 \setminus F_2$ 使得 $uw \in E(AQ_{n,3})$ 。因为 F_1, F_2 不满足定理 3 中的(3), 所以至多存在一点 $u \in F_1 \setminus F_2$ 使得 $uw \in E(AQ_{n,3})$ 。因此仅有一点 $u \in F_1 \setminus F_2$ 使得 $uw \in E(AQ_{n,3})$ 。如果 $F_2 \setminus F_1 = \emptyset$ 时, 那么 $F_2 \subseteq F_1$ 。因为 F_1 是一个 1 好邻故障集, 所以 $\delta(AQ_{n,3} - F_2) \geq 1$ 和 $\delta(AQ_{n,3} - F_1 - F_2) \geq 1$, 这与 w 是一个孤立点矛盾。因此, $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$ 。类似地, 我们可以断定仅有一点 $v \in F_2 \setminus F_1$ 使得 $vw \in E(AQ_{n,3})$ 。设 W 是

$AQ_{n,3}[V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)]$ 中的孤立点集, $H = AQ_{n,3}[V(AQ_{n,3}) - F_1 - F_2 - W]$ 。对任意的 $w \in W$, 在 $F_1 \cap F_2$ 中有 $(4n - 4)$ 个邻点。因为 $|F_1| \leq 8n - 10$, 所以 $\sum_{w \in W} |N_{AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]}(w)| = |W|(4n - 4) \leq \sum_{v \in F_1 \cap F_2} d_{AQ_{n,3}}(v)$

$\leq |F_1 \cap F_2|(4n-2) \leq (|F_1|-1)(4n-2) \leq (8n-11)(4n-2)$ 可得 $|W| \leq 8n-8$ 。假设 $V(H) = \emptyset$, 那么 $3^n = |V(AQ_{n,3})| = |F_1 \cup F_2| + |W| \leq 2(8n-10) + (8n-8) = 124n-28$, 这显然与 $n \geq 4$ 时 $3^n > 24n-28$ 矛盾。所以, $V(H) \neq \emptyset$ 。因为 F_1, F_2 不满足定理 3 中的(1)且 $V(H)$ 的任意一点在 H 中不是孤立点, 所以 $V(H)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边相连。因此, $F_1 \cap F_2$ 是 $AQ_{n,3}$ 的一个点割且 $\delta(AQ_{n,3} - (F_1 \cap F_2)) \geq 1$, 即 $F_1 \cap F_2$ 是 $AQ_{n,3}$ 的一个 1 好邻割。由引理 4 知, $|F_1 \cap F_2| \geq 8n-11$ 。因为 $|F_1| \leq 8n-10$, $|F_2| \leq 8n-10$ 且 $F_1 \setminus F_2$ 和 $F_2 \setminus F_1$ 都非空, 所以 $|F_1 \setminus F_2| = |F_2 \setminus F_1| = 1$ 。再根据引理 3, 即任意一对不相邻的顶点至多有 6 个公共邻点, 所以, $|W| \leq 6$ 。于是, 我们来考虑下面三种情况:

情形 2.1 $3 \leq |W| \leq 6$ 。

设 $\{w_1, w_2, w_3\} \subseteq W$ 。因为 $|N_{AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]}(W)| \geq |N_{AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]}(\{w_1, w_2, w_3\})|$, 所以我们来考虑 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 在 $F_1 \cap F_2$ 中的邻点个数。不失一般性, 令 $u \in F_1 \setminus F_2$ 和 $v \in F_2 \setminus F_1$ 。由引理 2 和 3 知, w_1, w_2 和 w_3 中任意两点在 $F_1 \cap F_2$ 中的公共邻点个数分别为: $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]: w_1, w_2) \leq 4$, $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]: w_1, w_3) \leq 4$ 和 $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W]: w_2, w_3) \leq 4$ 。又因为 w_1, w_2 和 w_3 均有 $(4n-4)$ 邻点在 $F_1 \cap F_2$ 中, 所以 $|F_1 \cap F_2| \geq 3(4n-4) - 4 \times 3 = 12n-24$ 。因此, $|F_1| = |F_1 \setminus F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 12n - 24 = 12n - 23$ 。而这与 $n \geq 4$ 时 $|F_1| \leq 8n-10$ 矛盾。所以 $|W| \leq 2$ 。

情形 2.2 $|W| = 2$ 。

令 $W = \{w_1, w_2\}$, $u \in F_1 \setminus F_2$ 和 $v \in F_2 \setminus F_1$ 。因为

$|N_{AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W \cup \{u, v\}]}(W \cup \{u, v\})| \geq |N_{AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup W \cup \{u, v\}]}(\{w_1, w_2, u\})|$, 所以我们来考虑 $\{w_1, w_2, u\}$ 在 $F_1 \cap F_2$ 中的邻点个数。由引理 2 和 3 知, w_1 , w_2 和 u 中任意两点在 $F_1 \cap F_2$ 中的公共邻点个数分别为: $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{u, w_1\}]: u, w_1) \leq 5$, $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{u, w_2\}]: u, w_2) \leq 5$ 和 $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{w_1, w_2\}]: w_1, w_2) \leq 4$ 。又因为 w_1, w_2 和 u 均有 $(4n-4)$ 邻点在 $F_1 \cap F_2$ 中。所以, $|F_1 \cap F_2| \geq 3(4n-4) - 2 \times 5 - 4 = 12n - 26$ 。因此, $|F_1| = |F_1 \setminus F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 12n - 26 = 12n - 25$ 。而这与 $n \geq 4$ 时 $|F_1| \leq 8n-10$ 矛盾。所以 $|W| \leq 1$

情形 2.3 $|W| = 1$ 。

令 $W = \{w\}$, $u \in F_1 \setminus F_2$ 和 $v \in F_2 \setminus F_1$ 。由引理 2 和 3 知, w , u 和 v 中任意两点在 $F_1 \cap F_2$ 中的公共邻点个数分别为: $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{u, w\}]: u, w) \leq 5$, $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{u, v\}]: u, v) \leq 5$ 和 $cn(AQ_{n,3}[(F_1 \cap F_2) \cup \{v, w\}]: v, w) \leq 5$ 。又因为 w 有 $(4n-4)$ 邻点在 $F_1 \cap F_2$ 中, u, v 各有 $(4n-3)$ 邻点在 $F_1 \cap F_2$ 中, 所以, $|F_1 \cap F_2| \geq (4n-4) + 2(4n-3) - 3 \times 5 = 12n - 25$ 。因此, $|F_1| = |F_1 \setminus F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 12n - 25 = 12n - 24$ 。这与 $|F_1| \leq 8n-10$ ($n \geq 4$) 矛盾。所以, $|W| = 0$ 。断言 1 证明完毕。

对 $\forall u \in H$, 根据断言 1, u 在 $AQ_{n,3} - F_1 - F_2$ 中至少有一个邻点。因为 F_1, F_2 不满足定理 3, 根据定理 3 的(3), 所以 u 在 $F_1 \Delta F_2$ 中没有邻点。因为 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 中间没有边和 F_2 是一个 1 好邻故障集, 所以 $\delta(AQ_{n,3}[F_1 \setminus F_2]) \geq 1$, $\delta(AQ_{n,3} - F_1 - F_2) \geq 1$ 。又因为 $V(AQ_{n,3}) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 中间没有边, 所以 $F_1 \cap F_1$ 是 $AQ_{n,3}$ 的一个 1 好邻割。根据引理 4, $|F_1 \cap F_2| \geq 8n-11$ 。由于 $\delta(AQ_{n,3}[F_1 \setminus F_2]) \geq 1$, 那么, $|F_1| = |F_1 \setminus F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 8n - 11 = 8n - 9 > |F_1|$, 矛盾。因此, $AQ_{n,3}$ 是 1 好邻 $(8n-10)$ -可诊断的。故 $t_1(AQ_{n,3}) \geq 8n-10$ 。

结合引理 9 和引理 10 可得以下定理:

定理 4 $AQ_{n,3}$ ($n \geq 4$) 在 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(AQ_{n,3}) = 8n - 10$ 。

5. 结束语

在这篇文章中, 我们研究了扩展 3 元 n 立方 $AQ_{n,3}$ 在 PMC 和 MM*模型下的 1 好邻诊断度。我们证明了当 $n \geq 4$ 时, 扩展 3 元 n 立方 $AQ_{n,3}$ 在 PMC 和 MM*模型下的 1 好邻诊断度都是 $8n - 10$ 。这为今后进一步研究扩展 3 元 n 立方网络的 g 好邻连通度、诊断度和相关诊断算法提供了理论基础。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61370001), 教育部博士点基金(博导类)资助项目(20111401110005)。

参考文献 (References)

- [1] Preparata, F., Metze, G. and Chien, R.T. (1968) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, **12**, 848-854.
- [2] Joon, M. and Mirosław, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems. *Proceeding of 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Portland, June 1981, Vol. 11, 173-175.
- [3] Lai, P.-L., Tan, J.J.M., Chang, C.-P. and Hsu, L.-H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/TC.2005.19>
- [4] Peng, S.-L., Lin, C.-K., Tan, J.J.M. and Hsu, L.-H. (2012) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Hypercube under the PMC Model. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10406-10412. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.092>
- [5] Yuan, J., Liu, A.X., Ma, X., Liu, X.L., Qin, X. and Zhang, J.F. (2015) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k -Ary n -Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305>
- [6] Yuan, J., Liu, A.X., Qin, X., Li, J. and Zhang, J.F. (2016) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of 3-Ary n -Cubes under the PMC Model and MM* Model. *Theoretical Computer Science*, **622**, 144-162.
- [7] Wang, M., Lin, Y.Q. and Wang, S.Y. (2016) The 2-Good-Neighbor Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees under the PMC Model and MM* Model. *Theoretical Computer Science*, **628**, 92-100. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.03.019>
- [8] Wang, M., Guo, Y.B. and Wang, S.Y. (2015) The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees under the PMC Model and MM* Model. *International Journal of Computer Mathematics*, 1-12. <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1119817>
- [9] Wang, S.Y. and Han, W.P. (2016) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of n -Dimensional Hypercubes under the PMC Model and MM* Model. *International Processing Letters*, **116**, 574-577. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2016.04.005>
- [10] Xiang, Y.L. and Stewart, L.A. (2011) Augmented k -Ary n -Cubes. *Information Science*, **181**, 239-256. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.09.005>
- [11] Lin, R.Z. and Zhang, H.P. (2015) The Restricted Edge-Connectivity and Restricted Connectivity of Augmented k -Ary n -Cubes. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 1281-1298. <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1067690>
- [12] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault Identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 486-492. <https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676472>

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org