Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(2), 224-230**
Published Online February 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.72027

Hans汉斯

Approximately Greater Than or Equal Relation on Fuzzy N-Cell Numbers

Xiaofen Liu, Huan Huang

Department of Mathematics, Jimei University, Xiamen Fujian
Email: 1586204764@qq.com, hhuangjy@126.com

Received: Feb. 7th, 2018; accepted: Feb. 21st, 2018; published: Feb. 28th, 2018

Abstract

In this paper, we introduce the approximately greater than or equal relation on fuzzy n-cell numbers and investigate its properties. We focus on the variation of this relationship under addition, subtraction, multiplication, division and scalar-multiplication.

Keywords

Approximately Greater Than or Equal, Fuzzy N-Cell Numbers, Fuzzy Numbers

N-Cell模糊数上的近似大于等于关系

刘晓芬，黄　欢

集美大学数学系，福建　厦门
Email: 1586204764@qq.com, hhuangjy@126.com

收稿日期：2018年2月7日；录用日期：2018年2月21日；发布日期：2018年2月28日

摘　要

本文给出n-cell模糊数近似大于等于关系的定义，并对近似大于等于关系的性质进行了详细的研究，重点讨论了这一关系在加、减、乘、除和数乘下的变化。

关键词

近似大于等于，N-Cell模糊数，模糊数

文章引用: 刘晓芬, 黄欢. N-Cell 模糊数上的近似大于等于关系[J]. 应用数学进展, 2018, 7(2): 224-230.
DOI: 10.12677/aam.2018.72027

1. 引言

在决策中，影响决策对象的因素常具有模糊性。为了对模糊决策对象进行排序，迫切需要考虑模糊数上的近似大于、近似等于以及近似大于等于等基本关系。

Buckley [1] [2]率先提出了一维模糊数近似大于、近似等于以及近似大于等于关系的概念，并将其应用于具有模糊性决策对象的排序中。吴望名在[3]中提出了一维模糊数相容的概念。王绪柱在[4]中针对 Buckley 在文[1]中提出的近似相等关系给出了易于判定的充要条件，并讨论了一维模糊数近似相等的性质。但是，在实际应用中，一维模糊数往往无法满足需求。因此，王桂祥、吴从炘在[5]中提出了 n-cell 模糊数的概念，n-cell 模糊数是一种特殊的 n 维模糊数，同时也是对一维模糊数的推广。王桂祥及其团队[5] [6]将 n-cell 模糊数应用于分类、模式识别、信息融合等领域中，受到了广泛的关注，因此，讨论 n-cell 模糊数上的近似大于等于关系也是非常重要的。

本文引入了 n-cell 模糊数上的近似大于等于关系，并详细讨论了这一关系的性质，我们的结论对 n-cell 模糊数排序问题的相关理论和应用有着重要的意义。

2. 预备知识

本节介绍了 n 维模糊数和 n-cell 模糊数的基本概念和性质，以及 n-cell 模糊数的代数运算，详细内容请读者参阅文献[7] [8] [9] [10]。

设 u 是 R^n 上的模糊集，u 可看作 $R^n \to [0,1]$ 的函数。任取 $\alpha \in [0,1]$，我们称 $[u]_\alpha$ 是 u 的α-截集，当 $\alpha > 0$，$[u]_\alpha = \{x \in R^n \mid u(x) \ge \alpha\}$，当 $\alpha = 0$，$[u]_0 = \overline{\{x \in R^n \mid u(x) > 0\}}$。$[u]_0$ 也称为 u 的支集，记作 supp$u$。

若 $u : R^n \to [0,1]$ 满足以下性质(1)-(4):

1) u 是正规的模糊集，即存在 $x_0 \in R^n$ 使得 $u(x_0) = 1$；

2) u 是凸模糊集，即对任意 $x, y \in R^n, \lambda \in [0,1]$ 有 $u(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \min\{u(x), u(y)\}$；

3) u 是上半连续函数，即 $\limsup\limits_{x \to x_0} u(x) \le u(x_0)$；

4) $[u]_0$ 有界。

则称 u 为 n 维模糊数，全体 n 维模糊数记作 E^n。

用 a 表示 R^n 中的点 $(a, a, \cdots, a)$，用 $\hat{\mathrm{a}}$ 表示模糊集 $\hat{\mathrm{a}} : R^n \to [0,1]$，$\hat{\mathrm{a}}(x) = \begin{cases} 0, x \ne \mathrm{a}, \\ 1, x = \mathrm{a}. \end{cases}$ 在不引起混淆的情况下，我们也用 a 表示 $\hat{\mathrm{a}}$，此时对任意的 $\alpha \in [0,1]$，$[\mathrm{a}]_\alpha = \{\mathrm{a}\}$。

王桂祥在[5]中引入了 n-cell 模糊数的概念：设 $u \in E^n$，若对任意 $\alpha \in [0,1]$，$[u]_\alpha = \prod_{i=1}^{n} [u_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha)]$，其中 $u_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha) \in R$ 且 $u_i^-(\alpha) \le u_i^+(\alpha), i = 1, 2, \cdots, n$，则称 u 是 n-cell 模糊数。记 $L(E^n)$ 为 R^n 上全体 n-cell 模糊数，显然 $L(E^n) \subset E^n$，且 $L(E^n) \ne E^n$。

设 $u \in L(E^n)$，若 $u_i^-(0) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，则称 u 为正 n-cell 模糊数；若 $u_i^+(0) < 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则称 u 为负 n-cell 模糊数。

N-cell 模糊数的代数运算如下：对任意 $u,v\in L\left(E^n\right),k\in R,\alpha\in[0,1]$，有：

$$[u+v]_\alpha=[u]_\alpha+[v]_\alpha=\prod_{i=1}^n\left[u_i^-(\alpha)+v_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha)+v_i^+(\alpha)\right],$$

$$[u-v]_\alpha=[u]_\alpha-[v]_\alpha=\prod_{i=1}^n\left[u_i^-(\alpha)-v_i^+(\alpha),u_i^+(\alpha)-v_i^-(\alpha)\right],$$

$$[ku]_\alpha=k[u]_\alpha=\begin{cases}\prod_{i=1}^n\left[ku_i^-(\alpha),ku_i^+(\alpha)\right],k\ge 0,\\ \prod_{i=1}^n\left[ku_i^+(\alpha),ku_i^-(\alpha)\right],k\le 0,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}[uv]_\alpha=\prod_{i=1}^n\Big[&\min\left\{u_i^-(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^-(\alpha)v_i^+(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^+(\alpha)\right\},\\ &\max\left\{u_i^-(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^-(\alpha)v_i^+(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^+(\alpha)\right\}\Big],\end{aligned}$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]_\alpha=\left[\min\left\{\frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^+(\alpha)},\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\},\max\left\{\frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^+(\alpha)},\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\}\right]$$ (其中 v 为正 n-cell 模糊数或负 n-cell 模糊数)。

容易看出 $u-v=u+(-v)$。

Buckley 在[1]中给出了一维模糊数近似大于等于关系的概念：

对任意两个模糊数 $u,v\in E^1$，任取 $\alpha\in(0,1]$，定义 $v(u\ge v)=\sup_{x\ge y}\min\left(u(x),v(y)\right)$。

1) 若 $v(u\ge v)=1$ 且 $v(v\ge u)<\alpha$，则称 u 在 α 水平下近似大于 v，记为 $u\succ_\alpha v$ 或 $v\prec_\alpha u$；

2) 若 $\min\left(v(u\ge v),v(v\ge u)\right)\ge\alpha$，则称 u 与 v 在 α 水平下近似相等，记为 $u\approx_\alpha v$；

3) 若 $u\succ_\alpha v$ 或 $u\approx_\alpha v$，则称 u 在 α 水平下近似大于等于 v，记为 $u\ge_\alpha v$ 或 $v\le_\alpha u$。

3. N-Cell 模糊数上近似大于等于关系的性质

本节将引入 n-cell 模糊数上的近似大于等于关系，并探讨该关系在加、减、乘、除以及数乘运算下的变化。

定义 3.1： 设 $u,v\in L\left(E^n\right)$，$\alpha\in(0,1]$，若 $u_i^+(\alpha)\ge v_i^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$，则称 u 在 α 水平下近似大于等于 v，记作 $u\ge_\alpha v$ 或 $v\le_\alpha u$。

性质 1： 设 $u,v\in L\left(E^n\right)$，$\alpha\in(0,1]$。若 $u\ge_\alpha v$，则 $u-v\ge_\alpha \mathbf{0}$。

证明： 由于

$$[u-v]_\alpha=\prod_{i=1}^n\left[u_i^-(\alpha)-v_i^+(\alpha),u_i^+(\alpha)-v_i^-(\alpha)\right]$$

由 $u\ge_\alpha v$ 知：$u_i^+(\alpha)\ge v_i^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$。则

$$(u-v)_i^+(\alpha)=u_i^+(\alpha)-v_i^-(\alpha)\ge 0=0_i^-(\alpha),i=1,2,\cdots,n$$

所以，$u-v\ge_\alpha \mathbf{0}$。

性质 2： 设 $u,v\in L\left(E^n\right)$，$\alpha\in(0,1]$。若 $u\ge_\alpha v$，则

1) 若 v 为正，则 $\frac{u}{v}\ge_\alpha 1$；

2) 若 v 为负，则 $\frac{u}{v} \le_a 1$。

证明： (1) 因为 v 为正，则 $v_i^-(\alpha) > 0, i = 1,2,\cdots,n$。所以，

$$\left[\frac{u}{v}\right]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{\frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^-(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\}\right]$$

由 $u \ge_\alpha v$ 知：$u_i^+(\alpha) \ge v_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$。则

$$\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)} \ge 1 = 1_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

因此，

$$\left(\frac{u}{v}\right)_i^+(\alpha) = \max\left\{\frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\} \ge \frac{u_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)} \ge 1_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

所以，$\frac{u}{v} \ge_a 1$。

(2)证明与(1)类似。

性质 3： 设 $u, v \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$。若 $u \ge_\alpha v$，则对任意 $\omega \in L(E^n)$ 有

1) $u + \omega \ge_\alpha v + \omega$；

2) $u - \omega \ge_\alpha v - \omega$。

证明： (1)由于

$$[u+\omega]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[u_i^-(\alpha) + \omega_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha) + \omega_i^+(\alpha)\right]$$

$$[v+\omega]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[v_i^-(\alpha) + \omega_i^-(\alpha), v_i^+(\alpha) + \omega_i^+(\alpha)\right]$$

由 $u \ge_\alpha v$ 知：$u_i^+(\alpha) \ge v_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$。则

$$u_i^+(\alpha) + \omega_i^+(\alpha) \ge v_i^-(\alpha) + \omega_i^+(\alpha) \ge v_i^-(\alpha) + \omega_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

因此，

$$(u+\omega)_i^+(\alpha) \ge (v+\omega)_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

所以，$u + \omega \ge_\alpha v + \omega$。

(2)由于 $u - \omega = u + (-\omega)$，结论可从(1)推出。

性质 4： 设 $u, v \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$。若 $u \ge_\alpha v$，则对任意 $\omega \in L(E^n)$

1) 若 ω 为正，则 $u\omega \ge_\alpha v\omega$；

2) 若 ω 为负，则 $v\omega \ge_\alpha u\omega$。

证明： (1)因为 ω 为正，则 $\omega_i^-(\alpha) > 0, i = 1,2,\cdots,n$。所以，

$$[u\omega]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{u_i^-(\alpha)\omega_i^-(\alpha), u_i^-(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\}, \max\left\{u_i^+(\alpha)\omega_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\}\right]$$

$$[v\omega]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{v_i^-(\alpha)\omega_i^-(\alpha), v_i^-(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\}, \max\left\{v_i^+(\alpha)\omega_i^-(\alpha), v_i^+(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\}\right]$$

由 $u \geq_\alpha v$ 知：$u_i^+(\alpha) \geq v_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$。则

$$u_i^+(\alpha)\omega_i^+(\alpha) \geq v_i^-(\alpha)\omega_i^+(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

因此，

$$\max\left\{u_i^+(\alpha)\omega_i^-(\alpha), u_i^+(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\} \geq \min\left\{v_i^-(\alpha)\omega_i^-(\alpha), v_i^-(\alpha)\omega_i^+(\alpha)\right\}, i = 1,2,\cdots,n$$

即，

$$(u\omega)_i^+(\alpha) \geq (v\omega)_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

所以，$u\omega \geq_\alpha v\omega$。

(2)证明与(1)类似。

性质 5： 设 $u, v, \omega \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$。若 $u \geq_\alpha v$，则

1) 若 ω 为正，则 $\frac{u}{\omega} \geq_\alpha \frac{v}{\omega}$；

2) 若 ω 为负，则 $\frac{v}{\omega} \geq_\alpha \frac{u}{\omega}$。

证明： 1) 因为 ω 为正，则 $\omega_i^-(\alpha) > 0, i = 1,2,\cdots,n$。所以，

$$\left[\frac{u}{\omega}\right]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{\frac{u_i^-(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^-(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{u_i^+(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^+(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\}\right]$$

$$\left[\frac{v}{\omega}\right]_\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{\frac{v_i^-(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{v_i^-(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{v_i^+(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{v_i^+(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\}\right]$$

由 $u \geq_\alpha v$ 知：$u_i^+(\alpha) \geq v_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$。则

$$\frac{u_i^+(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)} \geq \frac{v_i^-(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}, i = 1,2,\cdots,n$$

因此，

$$\max\left\{\frac{u_i^+(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{u_i^+(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\} \geq \min\left\{\frac{v_i^-(\alpha)}{\omega_i^-(\alpha)}, \frac{v_i^-(\alpha)}{\omega_i^+(\alpha)}\right\}, i = 1,2,\cdots,n$$

即，

$$\left(\frac{u}{\omega}\right)_i^+(\alpha) \geq \left(\frac{v}{\omega}\right)_i^-(\alpha), i = 1,2,\cdots,n$$

所以，$\frac{u}{\omega} \geq_\alpha \frac{v}{\omega}$。

(2)证明与(1)类似。

性质 6： 设 $u, v, \omega \in L(E^n)$，$\alpha \in (0,1]$。若 $uv \geq_\alpha \omega$，则

1) 若 v 为正，则 $u \geq_\alpha \frac{\omega}{v}$；

2) 若 v 为负，则 $\frac{\omega}{v} \geq_\alpha u$。

证明：(1)因为v为正，则$v_i^-(\alpha)>0, i=1,2,\cdots,n$。所以，

$$[uv]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{u_i^-(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^-(\alpha)v_i^+(\alpha)\right\},\max\left\{u_i^+(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^+(\alpha)\right\}\right]$$

$$\left[\frac{\omega}{v}\right]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[\min\left\{\frac{\omega_i^-(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{\omega_i^-(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\},\max\left\{\frac{\omega_i^+(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{\omega_i^+(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\}\right]$$

由$uv\geq_\alpha \omega$知：

$$\max\left\{u_i^+(\alpha)v_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha)v_i^+(\alpha)\right\}\geq\omega_i^-(\alpha), i=1,2,\cdots,n$$

因此，

$$u_i^+(\alpha)\geq\min\left\{\frac{\omega_i^-(\alpha)}{v_i^-(\alpha)},\frac{\omega_i^-(\alpha)}{v_i^+(\alpha)}\right\}=\left(\frac{\omega}{v}\right)_i^-(\alpha), i=1,2,\cdots,n$$

所以，$u\geq_\alpha\frac{\omega}{v}$。

(2)证明与(1)类似。

性质 7：设$u,v\in L(E^n)$，$\alpha\in(0,1]$。若$u\geq_\alpha v$，则对任意$k\in R$有

1) 若$k>0$，则$ku\geq_\alpha kv$；

2) 若$k<0$，则$kv\geq_\alpha ku$。

证明：1) 因为$k>0$，所以，

$$[ku]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[ku_i^-(\alpha),ku_i^+(\alpha)\right]$$

$$[kv]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[kv_i^-(\alpha),kv_i^+(\alpha)\right]$$

由$u\geq_\alpha v$知：$u_i^+(\alpha)\geq v_i^-(\alpha), i=1,2,\cdots,n$。则

$$ku_i^+(\alpha)\geq kv_i^-(\alpha), i=1,2,\cdots,n$$

因此，

$$(ku)_i^+(\alpha)\geq(kv)_i^-(\alpha), i=1,2,\cdots,n$$

所以，$ku\geq_\alpha kv$。

(2)证明与(1)类似。

性质 8：设$u,v\in L(E^n)$，$\alpha\in(0,1]$，$k\in R$。若$ku\geq_\alpha v$，则

1) 若$k>0$，则$u\geq_\alpha\frac{v}{k}$；

2) 若$k<0$，则$\frac{v}{k}\geq_\alpha u$。

证明：(1)因为$k>0$，所以，

$$[ku]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[ku_i^-(\alpha),ku_i^+(\alpha)\right]$$

$$\left[\frac{v}{k}\right]_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{v_i^-(\alpha)}{k},\frac{v_i^+(\alpha)}{k}\right]$$

由 $ku \geq_{\alpha} v$ 知：

$$ku_i^+(\alpha) \geq v_i^-(\alpha), i = 1, 2, \cdots, n$$

因此，

$$u_i^+(\alpha) \geq \frac{v_i^-(\alpha)}{k} = \left(\frac{v}{k}\right)_i^-(\alpha), i = 1, 2, \cdots, n$$

所以，$u \geq_{\alpha} \dfrac{v}{k}$。

(2)证明与(1)类似。

基金项目

福建省自然科学基金(No. 2016J01022)。

参考文献 (References)

[1] Buckley, J.J. (1985) Fuzzy Hierarchical Analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, **17**, 233-247. https://doi.org/10.1016/0165-0114(85)90090-9

[2] Buckley, J.J., Feuring, T. and Hayashi, Y. (2001) Fuzzy Hierarchical Analysis Revisited. *European Journal of Operational Research*, **129**, 48-64. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00405-1

[3] 吴望名, 陆秋君. 关于模糊数的 Sarkovskii 定理[C]//中国模糊数学与模糊系统委员会. 第九届年会论文选集: 1998 年卷. 石家庄: 河北大学出版社, 1998: 104-106.

[4] 王绪柱. 关于模糊数近似相等[J]. 工程数学学报, 2003, 20(1): 55-59.

[5] Wang, G.X. and Wu, C.X. (2002) Fuzzy *N*-Cell Numbers and the Differential of Fuzzy *N*-Cell Number Value Mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, **130**, 367-381. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00113-6

[6] Wang, G.X. and Shi, P. (2009) Representation of Uncertain Multichannel Digital Signal Spaces and Study Pattern Recognition Based on Metrics and Difference Values on Fuzzy *N*-Cell Number Spaces. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **17**, 421-439. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.2012352

[7] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[8] Diamond, P. and Kloeden, P. (1994) Metric Spaces of Fuzzy Sets-Theory and Application. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2326

[9] Huang, H., Wu, C.X., Xie, J.L. and Zhang, D.X. (2017) Approximation of Fuzzy Numbers Using the Convolution Method. *Fuzzy Sets and Systems*, **310**, 14-46. https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.06.010

[10] Huang, H. and Wu, C.X. (2018) Characterizations of Compact Sets in Fuzzy Set Spaces with Lp Metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **330**, 16-40. https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.11.007