Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(3), 1317-1323**
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.123134

Hans汉斯

模糊软赋范空间中的*t*最佳逼近

李　浩

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年2月27日；录用日期：2023年3月23日；发布日期：2023年3月30日

摘　要

本文结合模糊理论和软集理论研究了模糊软赋范空间的距离，借助模糊软赋范空间的距离提出了模糊软集中的*t*最佳逼近。利用*t*最佳逼近的概念进一步研究了模糊软赋范空间的*t*最佳逼近集，并证明了这些集合上的相关定理。

关键词

***t*最佳逼近，*t*最佳逼近集，模糊软赋范空间**

T-Best Approximation in Fuzzy Soft Normed Space

Hao Li

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 27th, 2023; accepted: Mar. 23rd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

Abstract

In this paper, the distance of fuzzy soft normed space is studied by combining fuzzy theory and soft set theory. The best approximation of fuzzy soft set is proposed by the distance of fuzzy soft normed space. Using the concept of best approximation, we further study the best approximation sets of fuzzy soft-normed Spaces, and prove related theorems on these sets.

Keywords

***t*-Best Approximation, Best Approximation Set, Fuzzy Soft Normed Space**

文章引用: 李浩. 模糊软赋范空间中的 *t* 最佳逼近[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1317-1323.
DOI: 10.12677/aam.2023.123134

1. 引言

模糊集理论是由 L. Zadeh [1]在 1965 年提出的，是基于粗糙集的有辅助函数和距离函数。2003 年 Bag T，Samanta S K [2]研究了有限维模糊赋范空间的相关性质。1999 年，Molodtsov [3]首次提出软集理论，解决了传统数学工具无法解决的问题，2001 年，Veeramani [4]在模糊度量空间中引入了最佳逼近的概念。2008 年，VAEZ P S M，Karimi [5]研究了模糊赋范空间中的 t 最佳逼近。本文结合模糊理论和软集理论，讨论了模糊软赋范空间上的 t 最佳逼近，并证明了这个集合的几个定理。本文结合软集，在模糊软赋范空间上进一步研究 t 最佳逼近集。

2. 软线性赋范空间

定义 2.1 [3] 设 U 是全空间，E 是一个参数集。令 $P(U)$ 表示 U 幂集，A 是 E 的一个非空子集。(F,A) 称为 U 上的软集，其中 F 是由 $F:A\to P(U)$ 的映射，即 U 上的软集是宇宙 U 的子集的参数化族。

定义 2.2 [3]如果对于任意 $e\in E$，$F(e)=\phi$，则软集 (F,E) 称为 X 上的一个软空集。

定义 2.3 [6]如果任意的 $e\in E$ 有 $F(e)=X$，则软集 (F,E) 是 X 上的一个绝对软集。令 X 是数域 $K(K=R)$ 上的一个向量空间，参数集 E 为实数集 R。

定义 2.4 [6] 设 X 是一个非空集，A 是一个非空参数集。函数 $\varepsilon:A\to X$ 是 X 的一个软元。如果对 $\forall e\in A$，$\varepsilon(e)\in F(e)$，则 X 的一个软元 ε 属于软集 F，记为 $\varepsilon\tilde{\in}F$。因此，对于 X 的每一个软集 F 关于参数集 A，有 $F(e)=\{\varepsilon(e)\varepsilon\tilde{\in}F\},\forall e\in A$。

注意到每一个单元软集(一个软集 (F,E)，对于 $\forall e\in E$，$F(E)$ 是一个单元集)可以用包含 $\forall e\in E$ 的元素来标识单元集。

定义 2.5 [2] 设 R 是实数集，$B(\mathrm{R})$ 是 R 的非空子集族，E 是一个参数集。则映射 $F:E\to B(\mathrm{R})$ 是一个软实数集。如果一个实数集是一个单元集(一个软集 (F,E)，对于 $\forall e\in E$，$F(E)$ 是一个单元集)，则称它为一个软实数。

将包含所有软实数的集合记为 $\mathrm{R}(A)$，包含所有非空软实数的集合记为 $\mathrm{R}(A)^*$。

设 X 是一个非空集，$\tilde{X}$ 是一个绝对软集，即 $\forall\lambda\in A,F(\lambda)=X$，$(F,A)=\tilde{X}$。设 $S(\tilde{X})$ 为 X 上所有软集 (F,A) 的集族，对于 $\forall\lambda\in A$，$F(\lambda)\neq\phi$。

设 $(F,A)(\neq\phi)\in S(\tilde{X})$，所有软集 (F,A) 的集族记为 $SE(F,A)$。

定义 2.6 [6] 映射 $d:SE(\tilde{X})\times SE(\tilde{X})\to\mathrm{R}(A)^*$ 称为软集 $\tilde{X}$ 上的一个度量空间，则 d 满足：

1) $d(\tilde{x},\tilde{y})\geq 0,\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$；

2) $d(\tilde{x},\tilde{y})=0$，当且仅当 $\tilde{x}=\tilde{y}$；

3) 对于 $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$，$d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$；

4) 对于 $\forall\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\tilde{\in}\tilde{X}$，$d(\tilde{x},\tilde{z})\tilde{\leq}d(\tilde{x},\tilde{y})+d(\tilde{y},\tilde{z})$。

在 $\tilde{X}$ 上定义距离 d 软度量空间记为 $(\tilde{X},d,A)$ 或 $(\tilde{X},d)$。

定义 2.7 [6] 设 V 是数域 K 上的一个向量空间，A 是一个参数集。G 是 (V,A) 上的一个软集。如果对于 $\forall\lambda\in A$，$G(\lambda)$ 是 V 的一个向量子空间，则称 G 为 V 的一个软向量空间或软线性空间。

定义 2.8 [6] 设 G 是 V 在数域 K 上的一个软向量空间。G 上的一个软元称为 G 的一个软向量。类似

的，软集(K,A)的一个软元称为软标量，K为一个标量域。

定义 2.9 [6] 设$\tilde{x},\tilde{y}$是G上的软向量，$\tilde{k}$是一个软标量，则对$\forall\lambda\in A$，有

$$(\tilde{x}+\tilde{y})(\lambda)=\tilde{x}(\lambda)+\tilde{y}(\lambda)，\left(\tilde{k}\cdot\tilde{x}(\lambda)\right)=\tilde{k}(\lambda)\cdot\tilde{x}(\lambda)$$

$\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{k}\cdot\tilde{x}$任然是$G$的软向量。

定义 2.10 [6] 设$\tilde{X}$是绝对软向量空间，即对$\forall\lambda\in A$，$\tilde{X}(\lambda)=X$。映射$\|\cdot\|:SE(\tilde{X})\to \mathrm{R}(A)^*$是软向量空间$\tilde{X}$的一个软范数，则：

1) $\|\tilde{x}\|\tilde{\geq}\bar{0},\forall\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$；
2) $\|\tilde{x}\|=\bar{0}\Leftrightarrow\tilde{x}=\tilde{\theta}$；
3) 对$\forall\tilde{x}\in\tilde{X},\tilde{k}\in K$，$\|\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x}\|=|\alpha|\|\tilde{x}\|$；
4) 对$\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\tilde{\leq}\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|$。

在$\tilde{X}$定义了软范数$\|\cdot\|$的软向量空间称为软赋范线性空间，记为$(\tilde{X},\|\cdot\|,A)$或$(\tilde{X},\|\cdot\|)$。

模糊软赋范空间

定义 2.11 [5] 设二元运算$*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$是连续的$t$范，则：

1) $*$满足结合律和交换律；
2) $*$具有连续性；
3) 对$\forall a\in[0,1]$，$a*1=a$；
4) 当$a\leq c,b\leq d\ (a,b,c,d\in[0,1])$，有$a*b\leq c*d$。

定义 2.12 如果$\tilde{X}$是一个绝对软向量空间，则$(\tilde{X},N,*)$称为模糊软赋范线性空间。设$*$是一个连续的t范，N是$\tilde{X}\times R(A)^*$上的一个模糊软集($R(A)^*$为一个非负软实数集)，对$\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}SE(\tilde{X})$，$\tilde{t},\tilde{s}\tilde{\in}R(A)^*$有

1) $N(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{>}\tilde{0}$；
2) $N(\tilde{x},\tilde{t})=\bar{1}\Leftrightarrow\tilde{x}_e=\bar{\theta}$；
3) 对$\forall\tilde{\alpha}\neq\tilde{0}$，$N(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x},\tilde{t})=N\left(\tilde{x},\dfrac{\tilde{t}}{|\tilde{\alpha}|}\right)$；
4) $N(\tilde{x},\tilde{t})*N(\tilde{y},\tilde{s})\leq N(\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{t}+\tilde{s})$；
5) $N(\tilde{x},\cdot):R(A)^*\to[0,1]$是连续的；
6) $\lim\limits_{\tilde{t}\to\infty}N(\tilde{x},\tilde{t})=\bar{1}$。

定义 2.13 设$\{\tilde{x}_n\}$是模糊软赋范线性空间$(\tilde{X},N,*)$的一个序列，如果对$\forall n\geq p$ (p是一个正整数)，$\tilde{\alpha}\in(0,1]$，$\lim\limits_{\tilde{t}\to\infty}N(\tilde{x}_{n+p}-\tilde{x}_n,\tilde{t})=\tilde{1}$。则$\{\tilde{x}_n\}$在模糊软赋范线性空间$(\tilde{X},N,*)$上是一个收敛序列。

引理 2.14 设N是一个模糊软范数，则：

1) 对于$\forall\tilde{x}\in\tilde{X}$，$N(\tilde{x},\tilde{t})$是非减的；
2) $N(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t})=N(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t})$。

证明：1) 令$\tilde{t}\tilde{<}\tilde{S}$。则$\tilde{k}=\tilde{s}-\tilde{t}\tilde{>}\tilde{0}$有

$$\begin{aligned}N(\tilde{x},\tilde{t})&=N(\tilde{x},\tilde{t})*\tilde{1}\\&=N(\tilde{x},\tilde{t})*N(\bar{0},\tilde{k})\\&\leq N(\tilde{x},\tilde{s}).\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} N\left(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t}\right) &= N\left(\left(-\overline{1}\right)\left(\tilde{y}-\tilde{x}\right),\tilde{t}\right) \\ &= N\left(\tilde{y}-\tilde{x},\frac{\tilde{t}}{\left|-\overline{1}\right|}\right) \\ &= N\left(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}\right). \end{aligned}$$

定理 2.15 设 $\left(\tilde{X},N,*\right)$ 是一个模糊软赋范线性空间，$\tilde{t}\tilde{>}\overline{0}$ 是一个软实数。定义一个中心为 $\tilde{x}$ 半径为 $\overline{0}\tilde{<}\tilde{r}\tilde{<}\overline{1}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(A)^*$ 的开球 $B\left(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}\right)$ 和闭球 $B\left[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}\right]$:

$$B\left(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}\right)=\left\{\tilde{y}\tilde{\in}SE\left(\tilde{X}\right):N\left(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t}\right)\tilde{>}\overline{1}-\tilde{t}\right\}$$

$$B\left[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}\right]=\left\{\tilde{y}\tilde{\in}SE\left(\tilde{X}\right):N\left(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t}\right)\tilde{\geq}\overline{1}-\tilde{t}\right\}$$

引理 2.16 如果 $\left(\tilde{X},N,*\right)$ 是一个模糊软赋范线性空间，则

1) $\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\to\tilde{x}+\tilde{y}$ 是连续的；

2) $\left(\tilde{c},\tilde{x}\right)\to\tilde{c}\cdot\tilde{x}$ 是连续的。

3. *t* 最佳逼近

定义 3.1 设 A 是模糊软赋范线性空间的一个非空子集。对 $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(A)^*$，

$$d\left(\tilde{A},\tilde{x},\tilde{t}\right)=\sup\left\{N\left(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}\right):\tilde{y}\tilde{\in}A\right\}$$

把 A 中的一个元素 $\tilde{y}$ 称为 A 中的一个元素 $\tilde{x}$ 的最佳逼近元，如果

$$N\left(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}\right)=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$$

定义 3.2 设 A 是模糊软赋范线性空间 $\left(\tilde{X},N,*\right)$ 的一个非空集。对 $\tilde{x}\in\tilde{X}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(A)^*$。$A$ 中所有元素 $\tilde{x}$ 的最佳逼近元构成的集合记为 $P_A^{\tilde{t}}$ $P_A^{\tilde{t}}=\left\{\tilde{y}\tilde{\in}A:d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)=N\left(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}\right)\right\}$。

如果对 $\forall\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ 在 $\tilde{A}$ 中至少存在一个最佳逼近元，则把 $\tilde{A}$ 称为一个 t 最佳逼近(t-Chebyshev)集。

定义 3.3 如果对 $\forall\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\overline{0}\tilde{<}\tilde{r}\tilde{<}\overline{1}$，$B\left[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}\right]\cap A$ 是 $\tilde{X}$ 的一个紧子集，则模糊软赋范线性空间 $\left(\tilde{X},\tilde{N},*\right)$ 的一个非空闭子集是 t 有界紧的。

定理 3.4 设 A 是模糊软赋范空间 $\left(\tilde{X},N,*\right)$ 的一个非空子集，则

(1) 对 $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(E)^*$，有 $d\left(A+\tilde{y},\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{t}\right)=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$；

(2) 对 $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(E)^*$，$P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right)=P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)+\tilde{y}$；

(3) 对 $\forall\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{E}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(E)^*$，$\tilde{\alpha}\tilde{\in}R(E)^*\setminus\{0\}$，$d\left(\tilde{\alpha}\cdot A,\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x},\tilde{t}\right)=d\left(A,\tilde{x},\frac{\tilde{t}}{|\tilde{\alpha}|}\right)$；

(4) 对 $\forall\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{E}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(E)^*$，$\tilde{\alpha}\tilde{\in}R(E)^*\setminus\{0\}$，$P_{\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x}}^{|\tilde{\alpha}|\tilde{t}}\left(\tilde{\alpha}\tilde{x}\right)=\tilde{\alpha}\cdot P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)$；

(5) A 是一个 t 最佳逼近集当且仅当 $A+\tilde{y}$ 是一个 t 最佳逼近集，对 $\forall\tilde{v}\tilde{\in}\tilde{X}$。

(6) A 是一个 t 最佳逼近集当且仅当 $\tilde{\alpha}\cdot A$ 是一个 $|\tilde{\alpha}|\cdot\tilde{t}$ 最佳逼近集，对 $\forall\tilde{\alpha}\tilde{\in}R(A)^*\setminus\{0\}$。

证明：(1) 对 $\forall\tilde{x},\tilde{y}\tilde{\in}\tilde{X}$，$\tilde{t}\tilde{\in}R(E)^*$，

$$\begin{aligned} d\left(A+\tilde{y},\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{t}\right) &= \sup\left\{N\left(\left(\tilde{z}+\tilde{y}\right)-\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right),\tilde{t}\right):\tilde{z}\tilde{\in}A\right\} \\ &= \sup\left\{N\left(\tilde{z}-\tilde{x},\tilde{t}\right):\tilde{z}\tilde{\in}A\right\} \\ &= d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right). \end{aligned}$$

(2) 通过(1)，$\tilde{y}_0\tilde{\in}P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right)$ 当且仅当 $\tilde{y}\tilde{\in}A$，$d\left(A,\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{t}\right)=N\left(\tilde{x}+\tilde{y}-\tilde{y}_0\right)$ 当且仅当 $\tilde{y}_0-\tilde{y}\tilde{\in}A$，

$d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)=N\left(\tilde{x}+\tilde{y}-\tilde{y}_0,\tilde{t}\right)$ 当且仅当 $\tilde{y}_0-\tilde{y}\in P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)$；即 $\tilde{y}_0\,\tilde{\in}\,P_A^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)+\tilde{y}$。

(3)

$$
\begin{aligned}
d\left(\tilde{\alpha}\cdot A,\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x},\tilde{t}\right)&=\sup\left\{N\left(\overline{\alpha}\cdot\tilde{x}-\tilde{\alpha}\cdot\tilde{z},\tilde{t}\right):\tilde{z}\in A\right\}\\
&=\sup\left\{N\left(\overline{\alpha}\cdot\left(\tilde{x}-\tilde{z}\right),\tilde{t}\right):\tilde{z}\in A\right\}\\
&=\sup\left\{N\left(\tilde{x}-\tilde{z},\frac{\tilde{t}}{\left|\tilde{\alpha}\right|}\right):\tilde{z}\in A\right\}\\
&=d\left(A,\tilde{x},\frac{\tilde{t}}{\left|\tilde{\alpha}\right|}\right).
\end{aligned}
$$

(4) 通过(3) $\tilde{y}_0\,\tilde{\in}\,P_{\tilde{\alpha}\cdot A}^{\left|\tilde{\alpha}\right|A}\left(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x}\right)$ 当且仅当 $\tilde{y}_0\in\tilde{\alpha}\cdot A$，

$$
d\left(\tilde{\alpha}\cdot A,\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x},\left|\tilde{\alpha}\right|\tilde{t}\right)=N\left(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x}-\left|\tilde{\alpha}\right|\tilde{y}_0,\tilde{t}\right)
$$

$\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{\alpha}}\in A$，$N\left(\tilde{x}-\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{\alpha}},\tilde{t}\right)=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$ 当且仅当 $\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{\alpha}}\in A$，(5)是(2)的直接结果，且(6)是从四开始的。

推论 3.5 设 M 是 $\tilde{X}$ 的子集。则：

(1) 对 $\forall\tilde{t}\,\tilde{\in}\,R\left(E\right)^*$，$\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ 和 $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{M}$，$d\left(M,\tilde{x}+\tilde{y},\tilde{t}\right)=d\left(M,\tilde{x},\tilde{t}\right)$；

(2) 对 $\forall\tilde{t}\,\tilde{\in}\,R\left(E\right)^*$，$\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ 和 $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{M}$，$P_M^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}+\tilde{y}\right)=P_M^{\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)+\tilde{y}$；

(3) 对 $\forall\tilde{t}\,\tilde{\in}\,R\left(E\right)^*$，$\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ 和 $\tilde{\alpha}\in R\left(E\right)^*\setminus\left\{0\right\}$，$d\left(M,\tilde{\alpha}\tilde{x},\left|\tilde{\alpha}\tilde{t}\right|\right)=d\left(M,\tilde{x},\tilde{t}\right)$；

(4) 对 $\forall\tilde{t}\,\tilde{\in}\,R\left(E\right)^*$，$\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ 和 $\tilde{\alpha}\in R\left(E\right)^*\setminus\left\{0\right\}$，$P_M^{\left|\tilde{\alpha}\right|\cdot\tilde{t}}\left(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{x}\right)=\tilde{\alpha}\cdot P_M^{\left|\tilde{\alpha}\right|\cdot\tilde{t}}\left(\tilde{x}\right)$。

定理 3.6 设 $\left(\tilde{X},N,*\right)$ 是模糊软赋范空间。如果 $\tilde{X}$ 是一个有限维空间，则对 $\tilde{X}$ 中的任意非空闭集 $\tilde{A}$，是一个 t 最佳逼近集。

证明 假设 A 是 $\tilde{X}$ 的一个非空闭集。对 $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}\setminus A$，$\tilde{t}\,\tilde{\in}\,R\left(E\right)^*$。

选取 $\tilde{r}_0$，$\overline{0}\,\tilde{<}\,\tilde{r}\,\tilde{<}\,\overline{1}$，$\tilde{r}_0=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$。如果 $\tilde{r}\,\tilde{>}\,\tilde{r}_0\left(\overline{0}\,\tilde{<}\,\tilde{r}\,\tilde{<}\,\overline{1}\right)$，则 $\exists\tilde{y}\,\tilde{\in}\,A$ 使得 $N\left(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t}\right)\tilde{>}\,\tilde{r}$。因此 $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,B\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}\right)\cap A$，$B\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}\right)\cap A\neq\phi$。对

$$
\forall n\in N,\overline{0}\,\tilde{<}\,\overline{1}-\tilde{r}_0+\frac{\tilde{r}_0}{n+\overline{1}}\,\tilde{<}\,\overline{1},\quad A_n^{\tilde{t}}=A\cap B\left[\tilde{x},\overline{1}-\tilde{r}_0+\frac{\tilde{r}_0}{n+\overline{1}},\tilde{t}\right]\left(n=1,2,\cdots\right)
$$

$A_n^{\tilde{t}}$ 是 $\tilde{X}$ 的一个非空 t 有界紧子集，$A_1^{\tilde{t}}\supset A_2^{\tilde{t}}\supset\cdots$。因为对 $\forall n\,\tilde{\in}\,N$，$\tilde{r}_0\,\tilde{>}\,\tilde{r}_0\left(\overline{1}-\dfrac{\overline{1}}{n+\overline{1}}\right)$，有

$$
d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)\tilde{>}\,d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)\left(\overline{1}-\frac{\overline{1}}{n+\overline{1}}\right)
$$

因此，$\exists\tilde{a}_n\in A$ 使得

$$
N\left(\tilde{a}_n-\tilde{x},\tilde{t}\right)\tilde{>}\,d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)\left(\overline{1}-\frac{\overline{1}}{n+\overline{1}}\right)
$$

因此 $\tilde{a}_n\,\tilde{\in}\,A_n^{\tilde{t}}$。因为 $\forall A_n^{\tilde{t}}$ 是 $\tilde{X}$ 的一个闭紧子集，$\exists\tilde{a}_0,\tilde{a}_1\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^{\tilde{t}}$。有

$$
d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)\tilde{\geq}\,N\left(\tilde{a}_0-\tilde{x},\tilde{t}\right)\tilde{\geq}\,d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)\left(\overline{1}-\frac{\overline{1}}{n+\overline{1}}\right)
$$

对 $\left(n=1,2,\cdots\right)$。因为 $\tilde{r}_0=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$，$\overline{1}-\tilde{r}_0=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)$ 有

$$
N\left(\tilde{a}_0-\tilde{x},\tilde{t}\right)=\tilde{r}_0=d\left(A,\tilde{x},\tilde{t}\right)
$$

因此 $\tilde{a}_0,\tilde{a}_1$ 是 $\tilde{x}$ 的最佳逼近，即是 $\tilde{a}_0,\tilde{a}_1 \tilde{\in} P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$。因此，$A$ 是一个最佳逼近集。

定义 3.6 对 $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$，$\bar{0} \tilde{<} \tilde{r} \tilde{<} \bar{1}$，$\tilde{t} \tilde{\in} R(A)^*$，

$$S[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}] = \{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X} : N(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t})\}$$

$$q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}) = \bar{1} - d(A,\tilde{x},\tilde{t})$$

定理 3.7 设 $(\tilde{X},N,*)$ 是一个模糊软赋范空间，A 是 $\tilde{X}$ 的一个子集，$\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \setminus A$，$\tilde{t} \tilde{\in} R(A)^*$。因此有：

$$P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}) = A \cap B[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}] = A \cap S[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}]$$

证明：结论

$$P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}) \subseteq A \cap S[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}] \subseteq A \cap B[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}]$$

可以很容易通过定义里的 $P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$ 和 $q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$。相反，令 $\tilde{y} \tilde{\in} A \cap B[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}]$，则当 $\tilde{y} \tilde{\in} A$ 有，

$$N(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}) \tilde{\geq} \bar{1} - q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}) \tilde{\geq} N(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t})$$

因此 $\tilde{y} \tilde{\in} A$，

$$N(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{t}) = d(A,\tilde{x},\tilde{t})$$

这证明 $\tilde{y} \tilde{\in} P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$。因此，$A \cap B[\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}] \subset P_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$，定理得证。

注：设 $(\tilde{X},N,*)$ 是一个模糊软赋范空间，A 是 $\tilde{X}$ 的一个子集，$\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \setminus A$，$\tilde{t} \tilde{\in} R(A)^*$。则

$$A \cap B(\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t}) = \phi$$

因为，如果 $\tilde{y} \tilde{\in} A \cap B(\tilde{x},q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x}),\tilde{t})$，$d(A,\tilde{x},\tilde{t}) \tilde{\geq} N(\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{t}) \tilde{\geq} d(A,\tilde{x},\tilde{t})$ 这是矛盾的。

引理 3.8 设 $(\tilde{X},N,*)$ 是一个模糊软赋范空间，A 是 $\tilde{X}$ 的一个子集，$\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \setminus A$，$P_A^{\tilde{t}}(x) \neq \phi$ 且 $\bar{0} \tilde{<} \tilde{r} \tilde{<} \bar{1}$ 使得：

$$\phi \neq A \cap B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}] \subseteq S[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}]$$

则有

$$\tilde{r} = q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$$

因此，$A \cap B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}] = P_A^{\tilde{t}}(x)$。

证明：如果 $\tilde{r} < q_A^{\tilde{t}}(x)$，则根据 $q_A^{\tilde{t}}(x)$ 的定义，有 $A \cap B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}] = \phi$，矛盾。如果 $\tilde{r} > q_A^{\tilde{t}}(\tilde{x})$，因为 $P_A^{\tilde{t}}(x) \neq \phi$，则有

$$\phi \neq P_A^{\tilde{t}}(x) = A \cap B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}] \subseteq A \cap B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})$$

定义 3.9 设 $(\tilde{X},N,*)$ 是一个模糊软赋范空间，$\bar{0} \tilde{<} \tilde{r} \tilde{<} \bar{1}$，$\tilde{t} \tilde{\in} R(A)^*$。则称 $\tilde{A} \tilde{\subset} \tilde{X}$ 是 $B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}]$ 的一个支集，或如果 $d(\tilde{X},B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}],\tilde{t}) = \bar{1}$ 且 $A \cap B(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}) = \phi$，则 A 是 $B[\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t}]$ 的支集。

4. 结论

本文结合模糊理论和软集理论研究了模糊软集中的 t 最佳逼近。利用 t 最佳逼近的概念进一步研究了 t 最佳逼近集，证明了这些集合上的相关定理。未来将对模糊软赋范线性空间的其他性质进行研究。

致　谢

我要感谢我的导师，是他在我论文撰写时提供了思路，给予了我帮助，还要感谢潘同学和杨同学，

给予我的鼓励，在我遇到困难时集思广益，在此由衷的感谢他们。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-706.

[3] Molodtsov, D. (1999) Soft Set Theory—First Results. *Computers & Mathematics with Applications*, **37**, 19-31. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5

[4] Veeramani, P. (2001) Best Approximation in Fuzzy Metric Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **9**, 75-80.

[5] Vaez, P.S.M. and Karimi, F. (2008) t-Best Approximation in Fuzzy Normed Spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **5**, 93-99.

[6] Majumdar, P. and Samanta, S.K. (2008) Similarity Measure of Soft Sets. *New Mathematics and Natural Computation*, **4**, 1-12. https://doi.org/10.1142/S1793005708000908