Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1400-1415
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117157

非齐次Burgers方程的黎曼初值扰动问题解的渐近稳定性

张兆祥，李 悦

上海师范大学，上海
Email: 1914939880@qq.com

收稿日期：2021年6月12日；录用日期：2021年7月14日；发布日期：2021年7月21日

摘 要

本文主要研究非齐次 Burgers 方程的柯西问题，初值为黎曼初值周期扰动时，基本波结构的渐近稳定性。我们发现激波解扰动后，在有限时间 T 后仍为激波解，在任意时刻 $t > T$，它左右状态仍为周期函数，且在 L^∞ 范数的意义下衰减至0。特别地，扰动后的激波在原激波两侧摆动，扰动后的稀疏波解在 L^∞ 范数的意义下衰减至0。

关键词

非齐次Burgers方程，激波，稀疏波，周期扰动，广义特征线

Asymptotic Stability of Shock Waves and Rarefaction Waves under Periodic Perturbations for Inhomogeneous Burgers Equation

Zhaoxiang Zhang, Yue Li

Shanghai Normal University, Shanghai
Email: 1914939880@qq.com

文章引用: 张兆祥, 李悦. 非齐次Burgers方程的黎曼初值扰动问题解的渐近稳定性[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1400-1415.
DOI: 10.12677/pm.2021.117157

Received: Jun. 12^{th}, 2021; accepted: Jul. 14^{th}, 2021; published: Jul. 21^{st}, 2021

Abstract

In this paper we study large time behaviors toward shock waves and rarefaction waves under periodic perturbations for inhomogeneous Burgers equation. We show that for shock waves, after a finite time, the perturbed shock actually consists of two periodic functions contacting each other at a shock, and this shock curve oscillates on both sides of the background shock curve. Both of perturbed shock waves and perturbed rarefaction waves tend to zero in the L^∞ norm.

Keywords

Inhomogeneous Burgers Equation, Shock Waves, Rarefaction Waves, Periodic Perturbations, Generalized Characteristics

1. 引言

本文研究如下初值问题的大时间行为

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = -u, \quad x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \bar{u}_l + \omega_0(x), & x < 0, \\ \bar{u}_r + \omega_0(x), & x > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\bar{u}_l, \bar{u}_r$ 为常数, $\omega_0(x)$ 是周期为 $p(>0)$ 的函数. 为了方便计算, 我们令

$$\frac{1}{p}\int_0^p \omega_0(x)dx \equiv 0.$$

方程 (1.1) 是如下非齐次守恒律方程的特殊情况

$$u_t + f(u)_x = g(u), \quad x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0, \tag{1.3}$$

其中 $f(u) \in C^2(R)$ 且 $f''(u) > 0$, $g : R \to R$ 为光滑函数.

对于一般的初值

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{1.4}$$

我们知道问题 (1.3)(1.4) 即便初值光滑, 其解也可能由于特征在有限时间内相交而爆破. 因此在通常情况下 (1.3)(1.4) 的光滑解是不存在的. 故我们考虑 (1.3)(1.4) 的弱解. 如果函数 $u(x, t)$ 是问题 (1.3)(1.4) 的弱解, 并且对几乎所有的 $t > 0$, $u(x, t)$ 满足下面的熵条件

$$u(x-, t) \geq u(x+, t), \tag{1.5}$$

那么我们称 $u(x, t)$ 是问题 (1.3)(1.4) 的熵解.

另外对于问题 (1.3)(1.4), Kruzkov 在 [1]中利用粘性消失法证明了对于任意局部有界变差的初值, 问题 (1.3)(1.4) 存在唯一的可容许整体解. 特别地, 当源项不超过线性增长时, 对任意的局部有界变差初值 u_0, 问题 (1.3)(1.4) 在BV空间中有唯一的可容许整体解.

当 $g(u) = 0$ 时, 问题 (1.3)(1.4) 解的渐近形态已经被广泛地研究. 例如, 当 $u_0(x) \in L^\infty \cap L^1$ 时, 熵解在 L^∞ 范数的意义下以 t^{-1} 的速率衰减至0. 当 $u_0(x)$ 有界并具有紧支集时, 熵解在 L^1 范数的意义下以 $t^{-1/2}$ 的速率趋于 $N-$ 波, 见 [2] [3]. 当初值具有周期性时, Glimm 和 Lax [4]证明了熵解以 t^{-1} 的速率衰减至初值在一个周期上的平均. 对于黎曼问题, 辛等 [5]证明了给黎曼初值周期扰动, 激波解扰动后以 t^{-1} 速率趋于原激波解, 稀疏波解扰动后在 L^∞ 范数的意义下以 $t^{-1/2}$ 速率趋于原稀疏波解. 在辛的基础上, 袁等 [6] 给黎曼初值不同的周期扰动, 并证明了激波扰动后相对于原激波产生偏移. 稀疏波解扰动后在 L^∞ 范数的意义下以 $t^{-1/2}$ 的速率趋于原稀疏波解.

当 $g(u) \neq 0$ 时, 非齐次问题 (1.3)(1.4) 也有着大量的研究. Lyberopoulos [7]证明了在 $g(u) = u$ 的情况下, 若初值是连续的周期函数, 在一个周期上均值为零, 并且 $f(0) = f'(0) = 0$, $uf'(u) > 0$, $u \neq 0$, 那么问题 (1.3)(1.4) 的解趋于行波解且波速为零. Fan [8]研究了更加一般的源项, 在 $g(u)$ 具有有限个零点且存在常数 $M_0 > 0$, 使得对任意的 $|u| > M_0$ 都有 $ug(u) < 0$ 的假设条件下, 若初值是局部全变差有界的周期函数, 那么问题 (1.3)(1.4) 的解要么收敛于 $g(u)$ 的某个零点, 要么收敛于波速为 $f'(a_{2n+1})$ 的行波解, 其中 a_{2n+1} 表示 $g(u)$ 的第 $2n + 1$ 个零点. 匡 [9]在此基础上对源项的要求进行减弱, 考虑了 $g(u) \in C(R)$ 具有有限个零点并且在 a_{2n+1} 附近不超过线性增长, 证明了若初值是局部全变差有界的周期函数并且均值等于 a_{2n+1}, 那么问题 (1.3)(1.4) 的解趋于波速为 $f'(a_{2n+1})$ 的行波解.

当扰动 $\omega_0(x) = 0$ 时, 问题 (1.1)(1.2) 为黎曼问题. Mascia [10] 得到了:

当 $\bar{u}_l > \bar{u}_r$时, (1.1)(1.2) 的解为激波解简称背景激波解, 表述如下.

$$u_S(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_l e^{-t}, & x < S(t), \\ \bar{u}_r e^{-t}, & x > S(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

其中激波曲线 $S(t) = (1 - e^{-t})(\bar{u}_l + \bar{u}_r)/2$.

当 $\bar{u}_l < \bar{u}_r$时, (1.1)(1.2) 的解为稀疏波解简称背景稀疏波解, 表述如下,

$$u_R(x,t) = \begin{cases} \bar{u}_l e^{-t}, & x < (1-e^{-t})\bar{u}_l, \\ \tilde{u}(x,t), & (1-e^{-t})\bar{u}_l < x < (1-e^{-t})\bar{u}_r, \\ \bar{u}_r e^{-t}, & x > (1-e^{-t})\bar{u}_r, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $\tilde{u}(x,t)$ 由 [10]中的定义 2.4 给出.

我们发现当 $t \to \infty$ 时, 背景激波解的左右两端以 e^{-t} 速率衰减至0, 背景激波曲线趋于直线 $x = (\bar{u}_l + \bar{u}_r)/2$. 背景稀疏波解两端以 e^{-t} 速率衰减至0, 但是中间部分 $\tilde{u}(x,t)$ 没有显示的表达式, 故无法判断解的渐近性.

已有的结果表明, 单个真正非线性守恒律方程组周期初值问题解会趋于常值, 黎曼初值周期扰动后解趋于背景解; 而对于平衡律方程, 周期初值问题的解趋于常值或者行波解, 这表明源项对问题有本质影响. 本文考虑平衡律方程黎曼初值的周期扰动问题解的长时间性态, 研究其解与背景解之间的关系, 探索源项对解的结构的影响. 对于 Cauchy 问题 (1.1)(1.2), 得到:

定理 1.1 对于 $\bar{u}_l > \bar{u}_r$, 如果周期函数 $\omega_0(x)$ 在一个周期 $(0,p]$ 上全变差有界, 并且存在唯一一点 $a \in (0,p]$, 使得 $\omega_0(a-) \le 0 \le \omega_0(a+)$, 那么存在有限时间 T_s 和唯一曲线 $X(t) \in \mathrm{Lip}(0,+\infty)$, 使得对任何 $t > T_s$, Cauchy 问题 (1.1)(1.2) 的熵解满足

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l(x,t), & x < X(t), \\ u_r(x,t), & x > X(t). \end{cases} \tag{1.8}$$

当 $t \to +\infty$ 时, $\sup\limits_{x<X(t)} |u(x,t)| + \sup\limits_{x>X(t)} |u(x,t)| \to 0$.

特别地, 当 $(\bar{u}_l - \bar{u}_r)(1-e^{-t})/p$ 是正整数时, 扰动后的激波与背景激波相交, 即 $X(t) = S(t)$. 交点的个数与初值相关, 当 $(\bar{u}_l - \bar{u}_r) = Np$, N 为正整数时, 扰动后的激波趋于背景激波. 当 $Np < (\bar{u}_l - \bar{u}_r) < (N+1)p$ 时, 它们存在 N 个交点. 当 $(\bar{u}_l - \bar{u}_r) < p$ 时, 它们不存在交点.

定理 1.2 对于 $\bar{u}_l < \bar{u}_r$, 如果周期函数 $\omega_0(x)$ 在一个周期 $(0,p]$ 上全变差有界, 并且存在唯一一点 $a \in (0,p]$, 使得 $\omega_0(a-) \le 0 \le \omega_0(a+)$. 那么当 $t \to +\infty$ 时, Cauchy 问题 (1.1)(1.2) 的熵解 $u(x,t)$ 在 L^∞ 范数的意义下衰减至0.

2. 广义特征理论

首先我们介绍一下广义特征线理论, 这些都可以在 [8] [9] [11]中找到. 在区间 $[a,b]$ 上的一条 Lipschitz 曲线称为关于 (1.1) 的解 $u(x,t)$ 的特征线, 如果对几乎所有 $t \in [a,b]$, 有

$$\dot{\xi}(t) \in [f'(u(\xi(t)+,t)), f'(u(\xi(t)-,t))].$$

对任意 $(\bar{x},\bar{t}) \in (\mathbb{R}(0,+\infty))$, 至少存在一个定义在 $0 \le s \le \bar{t}$ 上的后向广义特征 $\xi(t;\bar{x},\bar{t})$, 使

得 $\xi(\bar{t};\bar{x},\bar{t})=\bar{x}$. 平面上所有经过点 $(\bar{x},\bar{t})$ 的后向特征都限制在最小和最大后向广义特征所张成的通道中. 我们用 $\xi_-(t;\bar{x},\bar{t})$, $\xi_+(t;\bar{x},\bar{t})$ 分别表示最小和最大后向广义特征. 当 $t>\bar{t}$ 时存在唯一的前向特征, 如图 1所示.

定义在 $[a,b]$ 上的特征 $\xi(\cdot)$, 若对几乎所有 $t\in[a,b]$ 都满足 $u(\xi_-(t),t)=u(\xi_+(t),t)$, 则称为真正的特征.

关于方程 (1.3) 的广义特征, 我们有以下三个性质, 更多细节可以参考 [11].

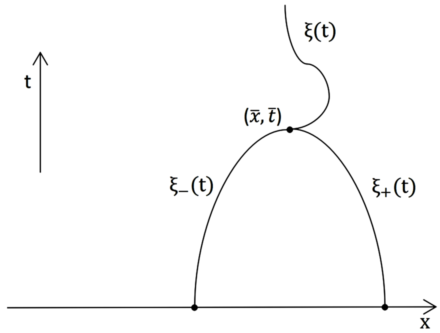

Figure 1. Forward/backward characteristic
图 1. 前向/后向广义特征

引理 2.1 如果 $\xi:[a,b]\to R$ 是一条特征, 那么对于几乎所有 $t\in[a,b]$, 都有

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}(t)=f'(u(\xi(t)\pm,t)), && \text{当}u(\xi(t)+,t)=u(\xi(t)-,t)\text{时},\\ &\dot{\xi}(t)=\frac{f(u(\xi(t)+,t))-f(u(\xi(t)-,t))}{u(\xi(t)+,t)-u(\xi(t)-,t)}, && \text{当}u(\xi(t)+,t)<u(\xi(t)-,t)\text{时}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

引理 2.2 若 $\xi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一条真正的特征, 那么存在一个函数 $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=f'(v(t)),\\ \dot{v}(t)=g(v(t)),\end{cases}\tag{2.2}$$

并且对于几乎所有的 $t\in(a,b)$, 都有

$$v(t)=u(\xi(t)+,t)=u(\xi(t)-,t).$$

引理 2.3 极小和极大后向特征 $\xi_-(t)$ 和 $\xi_+(t)$ 都是是真正的特征. 它们分别通过求解 (2.2) 在 $t=\bar{t}$ 时刻以 $(\bar{x},u(\bar{x}-,\bar{t}))$ 和 $(\bar{x},u(\bar{x}+,\bar{t}))$ 为初值的后向问题得到, 且 u 在端点处满足,

$$\begin{aligned}&u(\xi_-(0)-,0)\le u(\xi_-(0)+,0), \quad u(\xi_-(\bar{t})-,\bar{t})\ge u(\xi_-(\bar{t})+,\bar{t}),\\ &u(\xi_+(0)-,0)\le u(\xi_+(0)+,0), \quad u(\xi_+(\bar{t})-,\bar{t})\ge u(\xi_+(\bar{t})+,\bar{t}).\end{aligned}$$

推论 2.1 *(1)* 若两条不同的真正特征相交, 则此时产生激波, 那么该交点必是这两条真正特征的终点.

(2) 当 $\bar{t}>0$ 时, 极小后向特征 $\xi_-(t)$ 和极大后向特征 $\xi_+(t)$ 重合当且仅当 $u(\bar{x}-,\bar{t})=u(\bar{x}+,\bar{t})$.

(3) 对任意两条从 x 轴出发的极小前向特征 $\xi_-(t)$ 和极大前向特征 $\xi_+(t)$, 如果它们在某一时刻 $t_0>0$ 相交, 那么它们在 $t>t_0$ 重合.

引理 2.4 令 $\xi(t)$ 和 $\tilde{\xi}(t)$ 为分别与 (1.1) 带有局部全变差有界初值 $u(x,0)$ 和 $\tilde{u}(x,0)$ 的熵解 $u(x,t)$ 和 $\tilde{u}(x,t)$ 相关的两条极值后向特征, 如图 2所示, 它们从定点 $(\bar{x},\bar{t}) \in \mathbb{R}(0,+\infty)$ 出发. 若 $\tilde{\xi}(0) < \xi(0)$, 那么成立如下等式

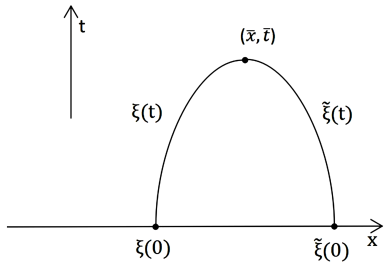

Figure 2. Minimal backward characteristic
图 2. 最小后向特征

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{\xi}(0)}^{\xi(0)} (u(x,0) - \tilde{u}(x,0))dx \\
=&\int_0^{\bar{t}} (-e^t[u(\xi(t),t) - \tilde{u}(\xi(t),t)]\dot{\xi}(t) + e^t[f(u(\xi(t),t)) - f(\tilde{u}(\xi(t),t)))])dt \\
+&\int_0^{\bar{t}} (e^t[u(\tilde{\xi}(t),t) - \tilde{u}(\tilde{\xi}(t),t)]\dot{\tilde{\xi}}(t) - e^t[f(u(\tilde{\xi}(t),t)) - f(\tilde{u}(\tilde{\xi}(t),t)))])dt.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

证 定义区域 $\Omega := (x,t)|0 \le t \le \bar{t}, \tilde{\xi}(t) \le x \le \xi(t)$. 首先将 (1.1) 转换为

$$(e^t u)_t + (e^t f(u))_x = 0. \tag{2.4}$$

令 $u = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$, 并将其在 Ω 上积分, 运用 Green 公式易得 (2.3). ▮

引理 2.5 若初值 u_0 在 $[0,p]$ 上全变差有界并且以 p 为周期, 令 u 是问题 (1.1)(1.4) 的熵解. 那么

(1) 对于任意 $t > 0$, $u(\cdot,t)$ 是以 p 为周期的函数.

(2) 对于每个固定的 $T > 0$,

$$\frac{1}{p}\int_0^p u(x,T)dx = \frac{e^{-T}}{p}\int_0^p u_0(x)dx. \tag{2.5}$$

证 (1) 定义 $v(x,t) = u(x+p,t)$. 对于每个 $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$, 如果 $\tilde{\phi}(x,t) = \phi(x-p,t)$, 那么

$$\begin{aligned}
&\iint_{t>0} v\phi_t + f(v)\phi_x + v\phi dxdt + \int_{t=0} u_0\phi dx \\
=&\iint_{t>0} u(x+p,t)\phi_t + f(u(x+p,t))\phi_x + u(x+p,t)\phi dxdt \\
=&\iint_{t>0} u(x,t)\tilde{\phi}_t + f(u(x,t))\tilde{\phi}_x + u(x,t)\tilde{\phi} dxdt \\
=&0.
\end{aligned}$$

因此, v 也是该问题的解. 于是由解的存在唯一性知 $u(x,t)\equiv v(x,t)$.

(2) 定义矩形区域 $\Omega=\{(x,t)|0\le x\le p, 0\le t\le \bar{t}\}$. 将 (2.4) 在 Ω 上积分. 运用 Green 公式和 (1) 得

$$
\begin{aligned}
0&=\iint_{\Omega}(e^t u(x,t))_t+(e^t f(u(x,t)))_x dxdt\\
&=\oint -e^t u(x,t)dx+e^t f(u(x,t))dt\\
&=\int_0^p -u(x,0)dx+\int_0^T e^t f(u(p,t))dt+\int_0^p e^T u(x,T)dx-\int_0^T e^t f(u(0,t))dt\\
&=\int_0^p -u(x,0)dx+\int_0^p e^T u(x,T)dx.
\end{aligned}
$$

证毕. ∎

令 $\mathcal{R}(u(\cdot,t))=\{u(x\pm,t):x\in\mathbb{R},t>0\}$, 其中 u 满足引理 2.5 的条件. 关于 $\mathcal{R}(u(\cdot,t))$ 我们有如下两个性质, 其证明可以在 [8]中找到.

引理 2.6 $\mathcal{R}(u(\cdot,t))$ 是一个闭区间.

引理 2.7 若 $\mathcal{R}(u(\cdot,t))=[\alpha(t),\beta(t)]$, 那么对任意 $\gamma\in(\alpha(t),\beta(t))$, 存在一个连续点 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $u(x_0,t)=\gamma$.

我们记 $u_l(x,t),u_r(x,t),u(x,t)$ 为(1.1)分别带有如下初值的熵解:

$$u_l(x,0)=\bar{u}_l+\omega_0(x), x\in\mathbb{R},$$

$$u_r(x,0)=\bar{u}_r+\omega_0(x), x\in\mathbb{R},$$

$$u(x,0)=\begin{cases}\bar{u}_l+\omega_0(x), & x<0,\\ \bar{u}_r+\omega_0(x), & x>0.\end{cases}$$

由 Fan [8]中的定理 1.1 可知, 当 $t\to+\infty$ 时,

$$|u_l(x,t)|\to 0,\qquad |u_r(x,t)|\to 0. \tag{2.6}$$

若 $\omega_0(x)$ 满足零均值条件, 那么由引理 2.5(2) 知, 在固定的 $T>0$ 时刻有

$$\frac{1}{p}\int_0^p u_l(x,T)dx=\frac{e^{-T}}{p}\int_0^p u_l(x,0)dx=\bar{u}_l e^{-T}.$$

又由引理 2.6 知, $\mathcal{R}(u(\cdot,T))$ 是一个闭区间. 因此 $\bar{u}_l e^{-T}$ 在该区间内. 利用 $u(\cdot,T)$ 的周期性和引理 2.7, 我们推断存在连续点 $x_0\in(0,p]$, 使得 $u(x_0,T)=\bar{u}_l e^{-T}$.

引理 2.8 假设点 $(\bar{x},\bar{t})\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 满足 $u_l(\bar{x},\bar{t})=\bar{u}_l e^{-\bar{t}}$, 从该点出发作极值后向特征 $\xi(t)$. 于是当 $t>\bar{t}$ 时, $\xi(t)$ 也是有定义的, 并且满足 $u_l(\xi(t),t)=\bar{u}_l e^{-t}$.

证 采用反证法. 取充分小的 $\epsilon > 0$, 假设在 $t = \bar{t} + \epsilon$ 时刻, $u(\xi(t), t) \neq \bar{u}_l e^{-t}$. 但是存在 $x_0 \in (\xi(t) - p/2, \xi(t) + p/2)$, 使得 $u(x_0, t) = \bar{u}_l e^{-t}$. 从该点出发作极值后向特征 $\eta(t)$, 如图 3所示. 由于 $\xi(t)$, $\eta(t)$ 是满足引理 2.2 的, 因此

$$\xi(t) = \xi(0) + \bar{u}_l(1 - e^{-t}), \quad t \in (0, \bar{t}],$$
$$\eta(t) = \eta(0) + \bar{u}_l(1 - e^{-t}), \quad t \in (0, \bar{t} + \epsilon],$$

且沿着 $\xi(t)$ 有 $u(\xi(t), t) = \bar{u}_l e^{-t}$, 沿着 $\eta(t)$ 有 $u(\eta(t), t) = \bar{u}_l e^{-t}$.

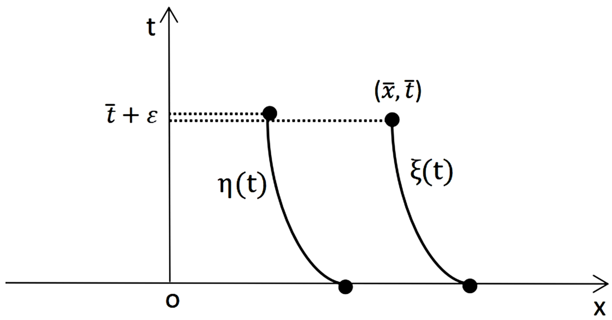

Figure 3. Special characteristic
图 3. 特殊的特征

现在我们只需要证明 $\xi(0) = \eta(0)$ 即可. 由于在 $(0, p]$ 内只有唯一一点 a 满足

$$\omega_0(a-) \leq 0 \leq \omega_0(a+),$$

且由引理 2.3 知

$$\bar{u}_l + \omega_0(\xi(0)-) = u(\xi(0)-, 0) \leq \bar{u}_l \leq u(\xi(0)+, 0) = \bar{u}_l + \omega_0(\xi(0)+),$$
$$\bar{u}_l + \omega_0(\eta(0)-) = u(\eta(0)-, 0) \leq \bar{u}_l \leq u(\eta(0)+, 0) = \bar{u}_l + \omega_0(\eta(0)+),$$

故 $\eta(0) = \xi(0) + Np$, 其中 N 为整数. 显然当 $t \in (0, \bar{t})$ 时, $\xi(t)$ 平行于 $\eta(t)$, 即 $\eta(\bar{t}) = \xi(\bar{t}) + Np$. 令 $\epsilon \to 0$, 由特征的 Lipschitz 连续性得 $\eta(\bar{t} + \epsilon) \to \eta(\bar{t})$. 由于 $\eta(\bar{t}) \in (\xi(\bar{t}) - p/2, \xi(\bar{t}) + p/2)$, 因此 $N = 0$, 即 $\eta(0) = \xi(0)$. 证毕. ∎

引理 2.9 当 $\bar{u}_l > \bar{u}_r$ 时,

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l(x,t), & x < X_+(t), \\ u_r(x,t), & x > X_-(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $X_-(t)$ 为从原点出发关于 u 的极小前向特征, $X_+(t)$ 为从原点出发关于 u 的极大前向特征.

证 不失一般性, 我们证明 $x < X_+(t)$ 的情况.

对于任何固定的 $(\bar{x}, \bar{t})$ 且 $\bar{x} < X_+(\bar{t})$, $\bar{t} > 0$. 我们首先证明 $u(\bar{x}+, \bar{t}) = u_l(\bar{x}+, \bar{t})$. 过点 $(\bar{x}+, \bar{t})$ 分别作关于熵解 u, u_l 的极大后向特征 $\xi_+(t)$ 和 $\eta_+(t)$, 如图 4所示. 因为极大后向特征是真正的特征,

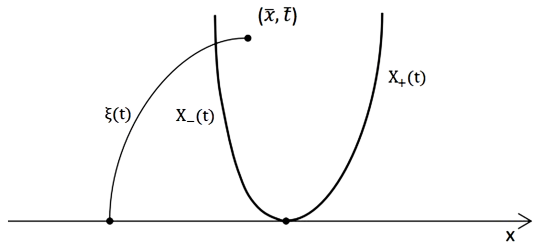

Figure 4. Perturbed shock wave
图 4. 扰动后的激波解

故 $\xi_+(t)$ 和 $\eta_+(t)$ 在 $[0,\bar{t}]$ 上满足如下关系式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_+(t) = f'(v(t)), \\ \dot{v}(t) = -v(t), \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{\eta}_+(t) = f'(\tilde{v}(t)), \\ \dot{\tilde{v}}(t) = -\tilde{v}(t), \end{cases}$$

并且对于几乎所有 $t \in (0,\bar{t})$, 都有

$$v(t) = u(\xi_+(t)+,t) = u(\xi_+(t)-,t), \quad \tilde{v}(t) = u_l(\eta_+(t)+,t) = u_l(\eta_+(t)-,t).$$

由于当 $t > 0$ 时, 从任意点出发的前向特征是唯一的, 故 $\xi_+(t)$ 与 $X(t)$ 不相交, 即 $\xi_+(0) < 0$.

下面采用反证法: 若 $u(\bar{x}+,\bar{t}) > u_l(\bar{x}+,\bar{t})$, 即 $v(\bar{t}) > \tilde{v}(\bar{t})$. 由于

$$\begin{cases} v(t) = v(\bar{t})e^{-(\bar{t}-t)}, \\ \tilde{v}(t) = \tilde{v}(\bar{t})e^{-(\bar{t}-t)}, \end{cases}$$

故 $v(t) > \tilde{v}(t)$. 由 f 的凸性易得

$$\dot{\xi}_+(t) = f'(v(t)) > f'(\tilde{v}(t)) = \dot{\eta}_+(t). \tag{2.8}$$

考虑到这两条极大后向特征都是从 $(\bar{x},\bar{t})$ 出发的, 因此 $\xi_+(0) < \eta_+(0)$. 利用引理 2.4 易得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{t}} e^t[u_l(\xi_+(t),t) - u(\xi_+(t),t)]\dot{\xi}_+(t) - e^t[f(u_l(\xi_+(t),t))) - f(u(\xi_+(t),t))]dt \\ &- \int_0^{\bar{t}} e^t[u_l(\eta_+(t),t) - u(\eta_+(t),t)]\dot{\eta}_+(t) - e^t[f(u_l(\eta_+(t),t))) - f(u(\eta_+(t),t))]dt \\ &= \int_{\xi_+(0)}^{\eta_+(0)} u_l(x,0) - u(x,0)dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

当 $\eta_+(0) \le 0$ 时, (2.9) 的右侧等于0; 当 $\eta_+(0) > 0$ 时, (2.9) 的右侧等于 $\int_0^{\eta_+(0)}(\bar{u}_l - \bar{u}_r)dx > 0$. 利用 f 的凸性不难发现, (2.8) 的左侧是非正的, 因此 $\eta_+(0) \le 0$, 也就是说对于任意的$t \in (0,\bar{t})$, 都有

$$\begin{aligned} u_l(\xi_+(t),t) &= u(\xi_+(t),t) = v(t), \\ u_l(\eta_+(t),t) &= u(\eta_+(t),t) = \tilde{v}(t). \end{aligned}$$

此时 $\eta_+(t)$ 也是与 u 有关的后向特征. 但是 $\xi_+(t)$ 是从 $(\bar{x},\bar{t})$ 出发的关于 u 的极大后向特征, 这与 $\xi_+(0)<\eta_+(0)$ 显然矛盾. 因此 $u(\bar{x}+,\bar{t})\le u_l(\bar{x}+,\bar{t})$.

同理, 假设 $u(\bar{x}+,\bar{t})<u_l(\bar{x}+,\bar{t})$ 也是不成立的. 因此 $u(\bar{x}+,\bar{t})=u_l(\bar{x}+,\bar{t})$. 由 $(\bar{x},\bar{t})$ 的任意性, 即证得当 $x<X_+(t)$ 时, $u(\bar{x}+,\bar{t})=u_l(\bar{x}+,\bar{t})$.

类似的, 从 $(\bar{x},\bar{t})$ 出发分别做和熵解 u,u_l 有关极小后向特征 $\xi_-(t)$ 和 $\eta_-(t)$, 于是可证得 $u(\bar{x}-,\bar{t})=u_l(\bar{x}-,\bar{t})$.

结合上述讨论, 我们得到了当 $x<X_+(t)$ 时, 对任意的 $t>0$, 都有 $u(x,t)=u_l(x,t)$.

证毕. ∎

推论 2.2 若 $\bar{u}_l<\bar{u}_r$, 那么

$$u(x,t)=\begin{cases}u_l(x,t), & x<X_{l+}(t),\\ u_r(x,t), & x>X_{r-}(t),\end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $X_{r-}(t)$ 为从原点出发的关于 u_r 的极小前向特征, $X_{l+}(t)$ 为从原点出发的关于 u_l 的极大前向特征.

证 令

$$u_l(x,t=0)=\begin{cases}u(x,t=0), & x<0,\\ \bar{u}_l-\bar{u}_r+u(x,t=0), & x>0,\end{cases}$$

$$u_r(x,t=0)=\begin{cases}\bar{u}_r-\bar{u}_l+u(x,t=0), & x<0,\\ u(x,t=0), & x>0.\end{cases}$$

将其代入引理 2.9 即得证. ∎

3. 证明定理1.1

首先证明激波曲线的唯一性:

若对任意的 $t\in[0,+\infty)$ 都有 $X_-(t)\equiv X_+(t)$, 由引理 2.9, 可立即求得 (1.8).

若对任意的 $t\in[0,+\infty)$ 都有 $X_-(t)<X_+(t)$, 那么在 $X_-(t)<x<X_+(t)$ 上恒有 $u_l(x,t)=u_r(x,t)$. 这里要求 $X_+(t)-X_-(t)<p$, 否则若存在 $t_0>0$ 使得等式成立, 于是由引理 2.5(2) 立刻得出矛盾. 固定 $\bar{t}>0$, 任取 $\bar{x}\in(X_-(\bar{t}),X_+(\bar{t}))$. 从 $(\bar{x},\bar{t})$ 出发做关于 $u_l(x,t)$ 的极小后向特征 $\xi(t)$. 由引理 2.3 知, $\xi(t)$ 在 $t\in[0,\bar{t}]$ 上是真正的特征, 故

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=f'(v(t)),\\ \dot{v}(t)=g(v(t)),\end{cases}$$

且

$$v(\bar{t})=u_l(\bar{x}-,\bar{t}).$$

进一步, 对于几乎所有的 $t\in(0,\bar{t})$, 都有

$$v(t)=u_l(\xi(t)+,t)=u_l(\xi(t)-,t),$$

且 $u_l(\xi(0)-,0)\leq u_l(\xi(0)+,0)$. 假设 $\xi(t)$ 与 $X_-(t)$ 交于点 $(X_-(\tau),\tau)$, $\tau>0$ (与 $X_+(t)$ 相交的情况类似). 于是 $\xi(t)$ 在 $(\tau,\bar{t})$ 上也是关于 u_r 的真正的特征. 令 $t_0=(\tau+\bar{t})/2$, $x_0=\xi(t_0)$, 不难发现, $u_l(x_0-,t_0)=u_l(x_0+,t_0)$. 于是从点 (x_0,t_0) 出发作关于 u_r 的极值后向特征 $\eta(t)$. 下面将分情况讨论:

(1) 若 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上不重合, 那么这显然与推论 2.1 矛盾.

(2) 若 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 在 $[0,\tau)$ 上不重合, 但在 $[\tau,t_0]$ 上重合. 由于在 $[0,t_0]$ 上, $\xi(t)$ 为点 (x_0,t_0) 出发关于 u_l 的极值后向特征, $\eta(t)$ 是从点 (x_0,t_0) 出发关于 u_r 的极值后向特征. 而 $u_l(x_0,t_0)=u_r(x_0,t_0)$, 这与引理 2.2 矛盾.

(3)若 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上重合, 这说明在 $[0,t_0]$ 上 $\xi(t)$ 既是关于 $u_l(x,t)$ 的极小后向特征, 也是关于 $u_r(x,t)$ 的真正的后向特征. 因此, $\omega_0(\xi(0))$ 必为间断点. 否则,

$$\bar{u}_l+\omega_0(\xi(0))=u_l(\xi(0),0)=u_r(\xi(0),0)=\bar{u}_r+\omega_0(\xi(0)),$$

显然矛盾. 又在 $(X_-(t),X_+(t))$ 上有不可列个点, 从这些点出发分别作极小后向特征, 它们与 x 轴交于不可列个点且均在一个周期内. 由于这些点均为间断点, 显然与 $\omega_0(x)$ 在 $[0,p]$ 上全变差有界矛盾.

综合上述分析, 必定存在某个充分小的 $T_s>0$, 使得 $t>T_s$ 时恒有 $X_-(t)=X_+(t)$. 于是我们证明了 (1.8).

接下来是关于扰动后的激波曲线 $X(t)$ 和背景激波曲线 $S(t)$ 之间的关系的结论:

注意到初值 $u_l(x,0)=\bar{u}_l+\omega_0(x)$ 和 $\bar{\omega}=0$, 利用引理 2.5 可得, 对任意的 $t>0$,

$$\frac{1}{p}\int_0^p u_l(x,t)dx=\frac{e^{-t}}{p}\int_0^p u_l(x,0)dx=\bar{u}_le^{-t}.$$

由引理 2.6 和引理 2.7 易得, 存在 $x'\in(-\infty,X_-(T))$ 和 $x''\in(X_+(T),+\infty)$, 使得 $u(x',T)=\bar{u}_le^{-T}$, $u(x'',T)=\bar{u}_re^{-T}$. 从 (x',T) 和 (x'',T) 出发分别做关于 u 的极值后向特征 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$,如图5所示, 它们满足

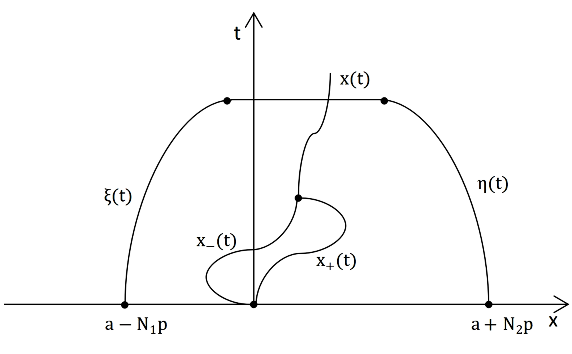

Figure 5. Perturbed shock curve
图 5. 扰动后的激波曲线

$$\xi(t) < X_-(t), \quad \eta(t) > X_+(t).$$

利用 (2.2) 可得

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi(0) + \bar{u}_l(1 - e^{-t}), & t \in [0, T], \\ \eta(t) = \eta(0) + \bar{u}_r(1 - e^{-t}), & t \in [0, T], \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u(\xi(0)-, 0) \le \bar{u}_l \le u(\xi(0)+, 0)$ 和 $u(\eta(0)-, 0) \le \bar{u}_r \le u(\eta(0)+, 0)$. 由 $\omega_0(x)$ 的假设条件, 令

$$\begin{aligned} \xi(0) &= a - N_1 p, && N_1\text{为正整数}, \\ \eta(0) &= a + N_2 p, && N_2\text{为非负整数}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

定义梯形区域:

$$\Omega(T) \triangleq \{(x, t) : 0 \le t \le T, \xi(t) \le x \le \eta(t)\}. \tag{3.3}$$

在 $\Omega(T)$ 中, 由格林公式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_\Omega (e^t u(x,t))_t + (e^t f(u(x,t)))_x dxdt \\ &= \int_{\xi(0)}^{\eta(0)} -u(x,0)dx + \int_{\xi(T)}^{\eta(T)} e^T u(x,T)dx + \int_0^T -e^t u(\eta(t),t)\dot{\eta}(t) + e^t f(u(\eta(t),t))dt \\ &+ \int_0^T e^t u(\xi(t),t)\dot{\xi}(t) - e^t f(u(\xi(t),t))dt \triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

利用 $|\eta(0) - \xi(0)|$ 为周期的倍数, 易得

$$I_1 = \int_{\eta(0)}^0 (\bar{u}_r + \omega_0(x))dx + \int_0^{\xi(0)} (\bar{u}_l + \omega_0(x))dx = \xi(0)\bar{u}_l - \eta(0)\bar{u}_r. \tag{3.4}$$

作伽利略变换

$$\begin{aligned} &t' = t,\ x' = x - \bar{u}_l(1 - e^{-t}), \\ &u'(x', t') = u(x - \bar{u}_l(1 - e^{-t}), t) - \bar{u}_l e^{-t}. \end{aligned}$$

容易验证 $u'(x', t')$ 仍满足方程 (1.1), 故其也是该方程的解, 且对于任意固定的 $t' > 0$

$$\frac{1}{p}\int_0^p u'(x', t')dx' = \frac{1}{p}\int_0^p u(x', t') - \bar{u}_l e^{-t'} dx' = 0.$$

同理, 令 $x' = x - \bar{u}_r(1 - e^{-t})$ 时也有类似的结论. 因此, 第二项改写为

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi(T)}^{X(T)} e^T u_l(x,T)dx + \int_{X(T)}^{\eta(T)} e^T u_r(x,T)dx \\ &= \int_{\xi(T)}^{X(T)} e^T[u'(x - \bar{u}_l(1 - e^{-T}), T) + \bar{u}_l e^{-T}]dx + \int_{X(T)}^{\eta(T)} e^T[u'(x - \bar{u}_r(1 - e^{-T}), T) + \bar{u}_r e^{-T}]dx. \\ &= X(T)(\bar{u}_l - \bar{u}_r) - \bar{u}_l\xi(T) + \bar{u}_r\eta(T) + e^T \int_{X(T) - \bar{u}_r(1 - e^{-T})}^{X(T) - \bar{u}_l(1 - e^{-T})} u'(y, T)dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

接着

$$
\begin{aligned}
I_3+I_4&=\int_0^T -e^t u(\eta(t),t)\dot{\eta}(t)+e^t f(u(\eta(t),t))dt+\int_0^T e^t u(\xi(t),t)\dot{\xi}(t)-e^t f(u(\xi(t),t))dt\\
&=\int_0^T -e^t\bar{u}_r e^{-t}f'(\bar{u}_r e^{-t})dt+\int_0^T e^t\bar{u}_l e^{-t}f'(\bar{u}_l e^{-t})dt-\int_0^T e^t[f(\bar{u}_l e^{-t})-f(\bar{u}_r e^{-t})]dt.\\
&=\int_0^T \bar{u}_r f'(\bar{u}_r e^{-t})dt+\int_0^T \bar{u}_l f'(\bar{u}_l e^{-t})dt-\int_0^T e^t[f(\bar{u}_l e^{-t})-f(\bar{u}_r e^{-t})]dt.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

注意到 $\xi(t)=\xi(0)+\bar{u}_l(1-e^{-t})$, $\eta(t)=\eta(0)+\bar{u}_r(1-e^{-t})$, 结合 (3.4)(3.5)(3.6) 可得

$$
X(T)-S(T)=\frac{e^T}{\bar{u}_l-\bar{u}_r}\int_{X(T)-\bar{u}_l(1-e^{-T})}^{X(T)-\bar{u}_r(1-e^{-T})}u'(y,T)dy.
$$

对于任何正整数 N, 若 $(\bar{u}_l-\bar{u}_r)(1-e^{-T})=Np$, 那么 $X(T)=S(T)$. 故得如下结论

(1) 当 $(\bar{u}_l-\bar{u}_r)=Np$, N 为正整数时, 扰动后的激波趋于背景激波.

(2) 当 $Np<(\bar{u}_l-\bar{u}_r)<(N+1)p$ 时, 扰动后的激波与背景激波存在 N 个交点.

(3) 当 $(\bar{u}_l-\bar{u}_r)<p$ 时, 扰动后的激波与背景激波不存在交点.

4. 证明定理1.2

令 $X_{r-}(t)$ 为从原点出发关于 u_r 的极小前向特征, 由引理 2.8 知, 存在两条与 u_r 相关的特征, 使得

$$
a-p+\bar{u}_r(1-e^{-t})\le X_{r-}(t)\le a+\bar{u}_r(1-e^{-t}),\quad \forall t>0.
$$

同理存在两条与 u_l 相关的特征, 使得

$$
a-p+\bar{u}_l(1-e^{-t})\le X_{l+}(t)\le a+\bar{u}_l(1-e^{-t}),\quad \forall t>0.
$$

令 $\xi(t)=a-p+\bar{u}_l(1-e^{-t})$, $\eta(t)=a+\bar{u}_r(1-e^{-t})$. 由推论 2.2 知, 当 $x<\xi(t)$ 时, $u(x,t)=u_l(x,t)$, $x>\eta(t)$ 时, $u(x,t)=u_r(x,t)$. 所以对任意的 $t>0$, $x\in(\xi(t),\eta(t))$, 从 (x,t) 出发的极值后向特征与 $\xi(t)$, $\eta(t)$ 无交点. 事实上, $u(\xi(t),t)=u_l(\xi(t),t)\equiv\bar{u}_l e^{-t}$. 如果存在 $(\xi(t),\eta(t))$ 之间的一点 $(\bar{x},\bar{t})$, 使得从该点出发的关于 u 的极小后向特征 $\gamma_-(t)$ 与 $\xi(t)$ 相交于点 $(\xi(\tau),\tau)$, 其中 $\tau>0$, 于是 $f'(u(\xi(\tau)+,\tau))>f'(\bar{u}_l e^{-\tau})$, 由 f 的凸性得, $u(\xi(\tau)+,\tau)>\bar{u}_l e^{-t}$. 显然矛盾. 同理可证, 对任意 $t>0$, 从 (x,t) 出发的极大后向特征 $\gamma_+(t)$ 与 $\eta(t)$ 无交点. 如图 6所示.

考虑到 $\gamma_\pm(t)$ 是真正的特征, 利用 (2.2) 可得 $\gamma_\pm(t)=\gamma_\pm(0)+C(1-e^{-t})$, $t\in[0,\bar{t}]$, 其中 C 是与 $u(\bar{x}\pm,\bar{t})$ 有关的常数. 并且在 $t\in(0,\bar{t})$ 上, 有 $u(\gamma_\pm(t),t)=v(t)=Ce^{-t}$.

应用上述结论, 对任意固定的 $t>0$ 我们有

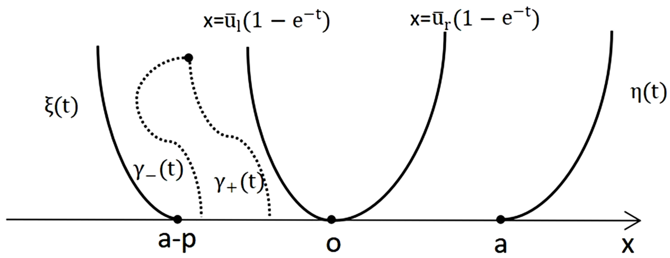

Figure 6. Perturbed rarefaction wave

图 6. 扰动后的稀疏波解

(1) 若 $x<\xi(t)$, 那么由 (1.7)(2.6) 可知, 当 t 充分大时

$$|u(x,t)-u_R(x,t)|=|u_l(x,t)-\bar{u}_l e^{-t}|\to 0.$$

(2) 若 $\xi(t)<x<\bar{u}_l(1-e^{-t})$, 由于 $\gamma_\pm(t)$ 与 $\xi(t)$ 无交点, 我们得到

$$a-p+\bar{u}_l(1-e^{-t})\le\gamma_\pm(0)+C(1-e^{-t})\le\bar{u}_l(1-e^{-t}).$$

由于 $\gamma_\pm(0)\in(a-p,p)$, 故上式可改写成

$$-p+\bar{u}_l(1-e^{-t})\le C(1-e^{-t})\le p-a+\bar{u}_l(1-e^{-t}).$$

不等式两侧同除以 $(1-e^{-t})$, 再减去 $\bar{u}_l$, 得

$$-\frac{p}{1-e^{-t}}\le C-\bar{u}_l\le\frac{p-a}{1-e^{-t}}.$$

不等式两侧同乘 e^{-t}, 由于沿着特征线恒有 $v(t)=Ce^{-t}$, 可得

$$-\frac{p}{e^t-1}\le v(t)-\bar{u}_l e^{-t}\le\frac{p-a}{e^t-1}.$$

由 $(\bar{x},\bar{t})$ 的任意性, 我们得到

$$|u(x,t)-u_R(x,t)|\le\frac{p}{e^t-1}.$$

(3) 若 $\bar{u}_l(1-e^{-t})<x<\bar{u}_r(1-e^{-t})$, 那么 $u_R(x,t)=\tilde{u}(x,t)$. 由于很难给出 $\tilde{u}(x,t)$ 的显示表达式, 故我们此处只对 $u(x,t)$ 进行估计

$$\bar{u}_l(1-e^{-t})\le\gamma_\pm(0)+C(1-e^{-t})\le\bar{u}_r(1-e^{-t}).$$

由于 $\gamma_\pm(0)\in(a-p,p)$, 故上式可改写成

$$-a+\bar{u}_l(1-e^{-t})\le C(1-e^{-t})\le p-a+\bar{u}_r(1-e^{-t}).$$

DOI: 10.12677/pm.2021.117157

不等式两侧同乘 $e^{-t}/(1-e^{-t})$, 故沿着特征线恒有

$$-\frac{a}{e^t-1}+\bar{u}_l e^{-t} \le v(t) \le \frac{p-a}{e^t-1}+\bar{u}_r e^{-t}.$$

由 $(\bar{x},\bar{t})$ 的任意性, 我们得到

$$|u(x,t)| \le Me^{-t}, \qquad M>0\text{为常数}.$$

(4) 若 $\bar{u}_r(1-e^{-t})<x<\eta(t)$, 与第二种情况类似, 可得

$$|u(x,t)-u_R(x,t)| \le \frac{p}{e^t-1}.$$

(5) 若 $x>\eta(t)$, 与第一种情况类似, 可得

$$|u(x,t)-u_R(x,t)| = |u_r(x,t)-\bar{u}_r e^{-t}| \to 0.$$

证毕.

参考文献

[1] Kruzkov, S.N. (1970) First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables. *Matematicheskii Sbornik (N S)*, **10**, 217. https://doi.org/10.1070/SM1970v010n02ABEH002156

[2] Hopf, E. (1950) The Partial Differential Equation ut + uux = μxx. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **3**, 201-230. https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302

[3] Lax, P.D. (1957) Hyperbolic Systems of Conservation Laws II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10**, 537-566. https://doi.org/10.1002/cpa.3160100406

[4] Glimm, J. and Lax, P.D. (1970) Decay of Solutions of Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, Vol. 101. American Mathematical Society.

[5] Xin, Z.P., Qian, Y. and Yuan, Y. (2019) Asymptotic Stability of Shock Waves and Rarefaction Waves under Periodic Perturbations for $1-d$ Convex Scalar Conservation Laws. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **51**, 2971-2994. https://doi.org/10.1137/18M1192883

[6] Yuan, Q. and Yuan, Y. (2020) On Riemann Solutions under Different Initial Periodic Perturbations at Two Infinities for 1-d Scalar Convex Conservation Laws. *Journal of Differential Equations*, **268**, 5140-5155. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.11.008

[7] Lyberopoulos, A.N. (1990) Asymptotic Oscillations of Solutions of Scalar Conservation Laws with Convexity under the Action of a Linear Excitation. *Quarterly of Applied Mathematics*, **48**, 755-765. https://doi.org/10.1090/qam/1079918

[8] Fan, H. and Jack, K.H. (1993) Large-Time Behavior in Inhomogeneous Conservation Laws. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **125**, 201-216.
https://doi.org/10.1007/BF00383219

[9] 匡杰, 王泽军. 非齐次Burgers 方程周期解的大时间行为[J]. 数学物理学报, 2015, 35(1): 1-14.

[10] Mascia, C. and Sinestrari, C. (1997) The Perturbed Riemann Problem for a Balance Law. *Advances in Difference Equations*, **2**, 779-810.

[11] Dafermos, C.M. (2005) Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. Springer, Berlin.
https://doi.org/10.1007/3-540-29089-3