Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1447-1455
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135149

导数在不等式证明中的应用

刘海欣，陈敏风*

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

不等式证明在中学数学学习中很常见。在证明过程中，选择正确的方法可以事半功倍，而导数在数学学习中占据着重要的地位，应用导数可以简化不等式证明过程。因此，导数在不等式证明中的应用探讨是不可或缺的。本论文主要从六个方面，分别为导数的定义、函数的单调性、函数的极值、泰勒展式、微分中值定理、函数的凹凸性，研究在证明不等式的过程中导数如何具体应用，通过例题进行举证分析。

关键词

不等式，导数，函数性质，微分中值定理，泰勒展式

The Application of Derivative in the Process of Proving Inequalities

Haixin Liu, Minfeng Chen*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: Apr. 23rd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

Inequality proof is quite common in high school mathematics learning. During the process, the method of selecting pairs can get twice the result with half the effort. Derivative plays an important role in mathematics learning, which can simplify the process of inequality proof. Therefore, it is necessary to explore how derivative is applied in inequality proof. This paper mainly explores from six parts, including the definition of derivative, monotonicity, extremum of function, Taylor series, mean value theorem and concavity and convexity of function to find its detailed application in inequality proof and verify it with related examples.

*通讯作者。

文章引用: 刘海欣, 陈敏风. 导数在不等式证明中的应用[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1447-1455.
DOI: 10.12677/pm.2023.135149

Keywords

Derivative, Inequality, Properties of Function, Mean Value Theorem, Taylor Series

1. 引言

在中学数学中，不等式证明普遍采用分析法、换元法、判别式法、综合法等初等数学方法，可以解决相对简易的不等式证明问题。面对更复杂的不等式证明问题时，使用初等数学方法证明太难。而导数在高等数学里属于非常基础的概念之一，运用导数在不等式证明中可以使证明过程有效简化，并且导数的具体应用是多样的，具有较高的灵活性。现有文献中有大量关于导数在不等式证明中的应用，程娜[1]归纳总结了拉格朗日中值定理以及函数的单调性在不等式证明中的应用，具体说明了证明的思路，启发学生挖掘出导数的各种性质。李栋红[2]介绍了利用导数定义、柯西中值定理、拉格朗日中值定理、函数性质中的单调性应用与凹凸性应用、导数和函数的极值之间关系以及泰勒展开式证明不等式，辅之以例题详细解析。但每篇基本集中讲述 2~4 种应用，完整的总结相较之下比较少。为此，笔者认为导数在不等式证明中的应用探讨是不可或缺的。不等式证明主要利用导数定义、函数的性质如单调性、极值、凹凸性、泰勒展式、微分中值定理进行证明。本文从以上六个方面，以理论论述结合具体的例子进行分析，探讨证明不等式时导数的具体应用。

2. 不等式证明中应用导数

2.1. 不等式证明中利用导数定义

在不等式的证明过程中，一般会先了解导数的定义，从而应用导数的定义中函数的极限存在进行判断应用，完成证明。

2.1.1. ([1], p. 92)设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 处可导，并称该极限为函数 f 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$。

令 $x=x_0+\Delta x$， $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则上式可以改写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

所以导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限。

2.1.2. ([1], p. 93)设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$。

类似地，我们可定义左导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为单侧导数。

例 2.1 设 $f(x)=d_1\sin x+d_2\sin 2x+\cdots+d_n\sin nx$，并且 $|f(x)|\le|\sin x|$，证明：$|d_1+2d_2+\cdots+nd_n|\le 1$。

证明 $f(x)$ 的导数。当 $x=0$ 时，$f'(0)=d_1\cos 0+2d_2\cos 0+\cdots+nd_n\cos 0=d_1+2d_2+\cdots+nd_n$，$f(0)=0$。由导数定义有，当 $x\to 0$ 时，有 $|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$，由题目 $|f(x)|\le|\sin x|$，得 $|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$，即 $|d_1+2d_2+\cdots+nd_n|\le 1$。

故 $|d_1+2d_2+\cdots+nd_n|\le 1$ 得证。

注意：运用导数定义证明不等式的步骤一般如下：

1) 求出题目所给原函数的一阶导数；

2) 根据题目特点找出符合要求的一点 x_0，求出原函数在此点的函数值 $f(x_0)$ 以及一阶导数在此点的导数值 $f'(x_0)$；

3) 结合所得条件，运用导数的定义进行后续证明。

2.2. 函数单调性证明不等式

利用函数单调性是证明不等式的基本方法之一，根据题目条件构造一个新的可导函数 $f(x)$，再求出函数在定义域内的一阶导数 $f'(x)$，通过一阶导数的正负来判断函数在定义域内呈现递增或者递减，得出单调性后再完成后续证明。

2.2.1. 单调函数定理 1 ([2], p. 127)

若函数 f 在 I 上可导，$f'(x)\ge 0$，则 $f(x)$ 在 I 上递增；

若函数 f 在 I 上可导，$f'(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在 I 上递减。

2.2.2. 单调函数定理 2 ([1], p. 126)

若函数 f 在 (a,b) 上可导，则 f 在 (a,b) 上严格递增(递减)的充要条件是：

1) 对一切 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\ge 0\left(f'(x)\le 0\right)$；

2) 在 (a,b) 的任何子区间上 $f'(x)\ne 0$。

推论 设函数在区间 I 上可微，若 $f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$，则 f 在 I 上严格递增(严格递减)。

例 2.2.1 [3]证明不等式：$e^x>1+x$，$x\ne 0$。

证明令函数 $f(x)=e^x-1-x$，求出 $f(x)$ 导数 $f'(x)=e^x-1$。当 $x>0$ 时，$e^x>1$，即 $f'(x)>0$，此时 f 在 $(0,\infty)$ 上严格递增。当 $x<0$ 时，$e^x<1$，即 $f'(x)<0$，此时 f 在 $(-\infty,0)$ 上严格递减。当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，又因为 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^x-1-x\right)=0=f(0)$，所以由函数在一点的连续性得出函数 f 在点 $x=0$ 处连续。当 $x\ne 0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，由此可证得 $e^x>1+x$。

例 2.2.2 [3]证明不等式：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，其中 $x>0$。

证明令函数 $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$，当 $x=0$，有 $f(0)=0$。求出 $f(x)$ 一阶导数 $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}$。由题有 $x>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，此时得 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递减。因

为 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递减，所以 $f(x)<f(0)$，即 $x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)<0$，此时 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ 得证。

令 $g(x)=\ln(1+x)-x$，当 $x=0$，则 $g(0)=0$。求出 $g(x)$ 一阶导数 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$。由题有 $x>0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递减。因为 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格递减，所以 $g(x)<g(0)$，即 $\ln(1+x)-x<0$，此时 $\ln(1+x)<x$ 得证。

综上所述，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$。

总结：运用函数单调性证明不等式的步骤一般如下：

根据题目条件构造一个新的函数 $f(x)$；

求出可导函数 $f(x)$ 在定义域内的一阶导数 $f'(x)$，通过 $f'(x)$ 的正负来判断 $f(x)$ 在定义域内呈现递增或者递减；

如果需要判断 $f(x)$ 与某个常数的大小，通常情况下是 $f(x)$ 与 0 的比较。如果 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 在 x 的取值范围内呈现递增，说明 $f(x)$ 的最小值大于 0。如果 $f(x)<0$ 且 $f(x)$ 在 x 的取值范围内呈现递减，说明 $f(x)$ 的最大值小于 0。$f(x)$ 与 0 的比较，从而转化成原函数之间的大小比较，由此证得相关结论。同时，某个常数不局限于 0，可以根据题目需要进行选择。

2.3. 函数极值证明不等式

利用函数极值证明不等式，即根据题目要求证明的不等式建立相关函数，由新函数的一阶导数求出驻点，进而求出极大值和极小值、最大值和最小值进行大小比较。

2.3.1. 函数极值定义([4], p. 29)

一般地，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x)<(>)f(x_0)$，我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值。

极大值与极小值统称为极值。

极值反映了函数在某一点附近的大小情况，刻画的是函数的局部性质。

一般地，求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法是：

解方程 $f'(x)=0$． 当 $f'(x_0)=0$ 时：

1) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值；
2) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值。

2.3.2. 费马定理([1], p. 145)

若函数 f 在点 x_0 可导，且 x_0 为 f 的极值点，则 $f'(x_0)=0$。这就是说可导函数在点 x_0 取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$。

2.3.3. 最大值与最小值([1], p. 148)

由连续函数在 $[a,b]$ 上的性质，若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一定有最大、最小值。若函数 f 的最大(小)值在点 x_0 在开区间 (a,b) 上，则 x_0 必定是 f 的极大(小)值点。又若 f 在 x_0 可导，则 x_0 还是一个稳定点。所以我们只要比较 f 在所有的稳定点、不可导点和区间端点上的函数值，就能从中找到 f 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值。

例 2.3.1 [5]已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，当 $x_2,x_2\in[-1,1]$ 时，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{4}{3}$。

证明：$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，求出 $f(x)$ 一阶导数 $f'(x)=x^2-1$。由题意当 $x\in[-1,1]$ 时，$x^2-1<0$，即 $f'(x)\le 0$，此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 呈单调递减。所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f(-1)=\frac{2}{3}$，最小值为 $f(1)=-\frac{2}{3}$，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为 $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$。当 $x_2,x_2\in[-1,1]$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\frac{2}{3}-\frac{-2}{3}=\frac{4}{3}$，所以 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\frac{4}{3}$ 得证。

例 2.3.2 [5]证明不等式：当 $k>1$，$0\le x\le 1$ 时，不等式 $2^{\frac{1}{k-1}}\le x^k+(1-x)^k\le 1$。

证明：令函数 $f(x)=x^k+(1-x)^k$，则 $f(x)$ 一阶导数 $f'(x)=kx^{k-1}-k(1-x)^{k-1}=k\left(x^{k-1}-(1-x)^{k-1}\right)$，令 $f'(x)=0$，即 $x^{k-1}-(1-x)^{k-1}=0$。此时求得 $x=\frac{1}{2}$。即 $x=\frac{1}{2}$ 为函数的驻点。此时，$f(0)=1$，$f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{k-1}}<1$。

因为函数 $f(x)$ 为幂函数，所以在 $x\in[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在此区间有最大值以及最小值。其中最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2^{k-1}}$。所以可以证得 $2^{\frac{1}{k-1}}\le x^k+(1-x)^k\le 1$。

总结：在证明不等式过程中，可以参考以下思路去应用函数的极值性质：

明确函数自变量的取值范围，根据题目条件构造一个新的函数 $f(x)$，可以通过求新函数的一阶导数 $f'(x)$，求出 $f(x)$ 的驻点(稳定点)；

求 $f(x)$ 在此区间上的极值(最值)，接着一般与驻点的函数值、区间两端点的函数值以及在不可导处的函数极值进行大小比较；

根据(2)证明不等式。

2.4. 微分中值定理证明不等式

微分中值定理可以由导数 f' 的已知性质来推断函数 f 所具有的性质，本部分主要介绍拉格朗日定理和柯西中值定理。

2.4.1. 拉格朗日中值定理([1], p. 123)

若函数 f 满足以下条件：

1) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

2) f 在开区间 (a,b) 上可导，则在 (a,b) 上至少存在一点 δ，使得

$$f'(\delta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日中值定理的几何意义是：在满足定理条件的曲线 $y=f(x)$ 上至少存在一点 $P(\delta,f(\delta))$，该曲线在该点的切线平行于曲线两端点的连线 AB。

拉格朗日公式还有下面几种等价表示形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\delta)(b-a),\quad a<\delta<b; \tag{1}$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\quad 0<\theta<1; \tag{2}$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\quad 0<\theta<1. \tag{3}$$

拉格朗日公式无论对于 $a<b$，还是 $a>b$ 都成立，而 δ 则是介于 a 与 b 之间的某一定数。在(2)、(3)中，把中值点 δ 表示成了 $a+\theta(b-a)$，使得 a,b 不论为何值，θ 总可为小于 1 的某一正数。

2.4.2. 柯西中值定理([1], p. 129)

设函数 f 和 g 满足

1) 在 $[a,b]$ 上都连续；
2) 在 (a,b) 上都可导；
3) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为零；
4) $g'(a)\neq g'(b)$，则存在 $\delta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\delta)}{g'(\delta)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

例 2.4.1 ([1], p. 124)证明不等式：$\arctan b-\arctan a\leq b-a$，其中 $a<b$。

证明令函数 $f(x)=\arctan x$，$f(x)$ 是连续函数，且在 $x\in R$ 上可导，则存在一点 δ，有 $f'(\delta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}$。又因为 $f'(\delta)=\frac{1}{1+\delta^2}\leq 1$，所以 $\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}\leq 1$，即 $\arctan b-\arctan a\leq b-a$，得证 $(a<b)$。

例 2.4.2 [6]如果 $0<\beta\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$，那么

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leq\tan\alpha-\tan\beta\leq\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

证明 1)若 $\alpha=\beta$，命题显然成立；

2) 若 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，取 $f(x)=\tan x$，$x\in(\beta,\alpha)$。

证明 1)若 $\alpha=\beta$，则 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，此时 $\alpha-\beta=0$，$\tan\alpha-\tan\beta=0$，所以 $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leq\tan\alpha-\tan\beta\leq\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$ 得证。

2) $f(x)=\tan x$，因为 $f(x)$ 在闭区间 $[\beta,\alpha]$ 上连续，在 (β,α) 上可导，所以由微分中值定理得，在 (β,α) 上至少存在一点 δ，使得

$$f'(\delta)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta},$$

又因为 $f'(\delta)=\frac{1}{\cos^2\delta}$，即 $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{1}{\cos^2\delta}(\alpha-\beta)$。

当 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(\beta)<f'(\delta)<f'(\alpha)$，即 $\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{1}{\cos^2\delta}<\frac{1}{\cos^2\alpha}$，此时 $\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\alpha-\beta}<\frac{1}{\cos^2\alpha}$，证得 $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leq\tan\alpha-\tan\beta\leq\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}$。

证明不等式时，微分中值定理的具体应用思路如下：

根据题目条件，判断不等式所含特点，构建出符合条件的函数 $f(x)$，明确函数 $f(x)$ 的定义域，验证 $f(x)$ 在此取值范围内能否满足微分中值定理的应用；

计算出 $f(x)$ 的导数，写出运用拉格朗日中值定理或者利用柯西中值定理进行证明的结论；

根据导数的特征，进行相乘相除等一系列适当的变换，证得结论。

2.5. 利用函数凹凸性证明不等式

曲线上任意两点间的弧段在这两点连线的下方，具有这一种特性的曲线成为凸的，相应的函数称为凸函数；曲线上任意两点间的弧段总是在这两点连线的上方，具有这一种特性的曲线称为凹的，相应的函数称为凹函数。本部分通过函数二阶导数求得切线斜率的正负，判断函数一阶导数的单调性，从而反映出函数在该取值区间上图像的凹凸性。

1) [7]设函数 $f(x)$ 在某区间内可导，如果 $f'(x)$ 为增函数，那么可以得出这个区间上函数 $f(x)$ 是向下凸的；如果 $f'(x)$ 为减函数，那么可以得出这个区间上函数 $f(x)$ 是向上凹的。

2) ([1], p. 153)设 f 为区间 I 上的二阶可导函数，则在 I 上 f 为凸(凹)函数的充要条件是

$$f''(x)\ge 0\left(f''(x)\le 0\right), x\in I.$$

3) ([1], p. 154)詹森不等式若 f 为 $[a,b]$ 上凸函数，则对任意 $x_i\in[a,b]$，$\delta_i>0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=1$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\delta_i f(x_i).$$

例 2.5 [8]假设 $x>0$， $y>0$，且 $x\ne y$， 试证明不等式 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$。

证明设函数 $f(h)=\ln h$， $h>0$，求出一阶导数 $f'(h)=\ln h+1$，二阶导数 $f''(h)=1/h>0$，即 $f(h)$ 在区间 (x,y) 或 (y,x) 中为二阶可导函数，且在 $x>0$， $y>0$ 中， $f(h)$ 为严格凸函数。由詹森不等式有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$，代入函数 $f(h)$ 得 $\frac{x+y}{2}\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$，化简得 $(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\le x\ln x+y\ln y$。所以不等式 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ 得证。

总结：证明不等式时，函数凹凸性的具体应用思路如下：

选取合适的函数 $f(x)$；

求出函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$，若符合题目条件且在定义域内，接着求二阶导数 $f''(x)$，根据二阶导数的正负来判断函数的凹凸性；

利用詹森不等式完成不等式的相关证明。

同时，当函数不是单调函数时，会具有更加复杂的函数凹凸形式，在求证过程中，对于函数凹凸性的判断需要多加注意，可以借助图像更好地去理解。

2.6. 利用泰勒展开式证明不等式

多项式函数是各类函数中最简单的一种，用多项式逼近函数是近似计算和理论分析的一个重要内容。利用泰勒展开式的目的是为了将函数在所给区间的端点或者根据题目所得的特定点展开，分析出余项的性质，得到不等式结合题目条件进行证明。

2.6.1. 泰勒多项式([1], p. 136)

对于一般函数 f，设它在点 x_0 存在直至 n 阶导数。由这些导数构造一个 n 次多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称为函数在点 x_0 处的泰勒多项式。

2.6.2. 带有佩亚诺型余项的泰勒公式([1], p. 138)

若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数，则有 $f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

此式称为函数 f 在 x_0 处的泰勒公式，$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 称为泰勒公式的余项，形如 $o\left((x-x_0)^n\right)$ 的余项称为佩亚诺型余项。即以泰勒多项式逼近 $f(x)$ 时，其误差为关于 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量。

2.6.3. 带有拉格朗日型余项的泰勒公式([1], p. 141)

(泰勒定理)若函数 f 在 (a,b) 上存在直至 n 阶的连续导函数，在 (a,b) 上存在 $(n+1)$ 阶导函数，则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$，至少存在一点 $\delta\in[a,b]$，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

此式同样成为泰勒公式，它的余项为

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\delta=x_0+\theta(x-x_0)(0<\theta<1),$$

称为拉格朗日余项。

例 2.6 [9]设函数 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 是二阶可导，并且 $f'(m)=f'(n)=0$，证明存在一点 $\sigma\in(m,n)$，使得 $|f''(\sigma)|\geq\frac{2}{(n-m)^2}|f(n)-f(m)|$。

证明：因为 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 是二阶可导，将其分别在 $x_0=m$，$x_0=n$ 处展开成带有拉格朗日余项的泰勒公式，此时令 $x=\frac{m+n}{2}$，在点 m 处，$f\left(\frac{m+n}{2}\right)=f(m)+f'(m)\left(\frac{m+n}{2}-m\right)+\frac{f''(\sigma_1)}{2!}\left(\frac{m+n}{2}-m\right)^2$，$m<\sigma_1<x$；在点 n 处，$f\left(\frac{m+n}{2}\right)=f(n)+f'(n)\left(\frac{m+b}{2}-n\right)+\frac{f''(\sigma_2)}{2!}\left(\frac{m+n}{2}-n\right)^2$，$x<\sigma_2<n$。对 $f(n)$，$f(m)$ 作差，因为 $f'(m)=f'(n)=0$，得

$$\begin{aligned}f(n)-f(m)&=f'(m)\left(\frac{m+n}{2}-m\right)+\frac{f''(\sigma_1)}{2!}\left(\frac{a+n}{2}-m\right)^2-f'(n)\left(\frac{m+n}{2}-n\right)-\frac{f''(\sigma_2)}{2!}\left(\frac{m+n}{2}-n\right)^2\\&=\frac{f''(\sigma_1)}{2!}\left(\frac{m+n}{2}-m\right)^2-\frac{f''(\sigma_2)}{2!}\left(\frac{m+n}{2}-n\right)^2\\&=\frac{1}{8}\left[f''(\sigma_1)-f''(\sigma_2)\right](n-m)^2\end{aligned}$$

。

此时，$f(n)-f(m)=\frac{1}{8}\left[f''(\sigma_1)-f''(\sigma_2)\right](n-m)^2\leq\frac{1}{8}\left(|f''(\sigma_1)|+|f''(\sigma_2)|\right)(n-m)^2$，令 $f''(\sigma)=\max\{f''(\sigma_1),f''(\sigma_2)\}$，则 $|f(n)-f(m)|\leq\frac{1}{4}|f''(\sigma)|(n-m)^2$。

综上，$|f''(\sigma)|\geq\frac{4}{(n-m)^2}|f(n)-f(m)|$。又因为 $\frac{4}{(n-m)^2}|f(n)-f(m)|\geq\frac{2}{(n-m)^2}|f(n)-f(m)|$，所以可证得 $|f''(\sigma)|\geq\frac{2}{(n-m)^2}|f(n)-f(m)|$。

注意：证明不等式时，泰勒展式的具体应用思路如下：

1) 判断题目中原函数在定义域内直至 n 阶的连续导函数是否存在，即 n 阶可导；

2) 结合题目具体条件与要求，选择适合的 x 与 x_0，根据泰勒定理写出原函数低于最高阶导数一阶的泰勒展式；

3) 对得到的式子通过放缩等方式进行相应变换，从而完成证明。

3. 小结

笔者在此向读者们提供较为完整的在不等式证明中利用导数的思考方向，从导数的定义本身、泰勒展式、微分中值定理以及运用函数的性质如单调性、凹凸性、极值进行证明，相应简化证明过程。除利用导数的定义证明之外，无论采用哪种方法，构建适合题目中不等式的特点的辅助函数是不可或缺的步骤，接着通过辅助函数的一阶导数、二阶导数进行单调性、凹凸性等分析，结合题目所需，进行相乘相除、放缩等一系列适当的变换，证得结论。需要注意的是，虽然方法多样，具有灵活性、便捷性，但是需要找到合适的切入点，才能达到用此方法证明的目的。

致　谢

非常感谢审稿人对本文提出宝贵的意见。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001117)、广州市科技计划项目(202102020438)资助。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系编. 数学分析上册(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[2] 全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修 II)》[M]. 北京: 人民教育出版社, 2006.
[3] 程娜. 导数在不等式证明中的应用[J]. 电大理工, 2013(2): 61-62.
[4] 普通高中课程标准实验教科书《数学·选修 2-2·A 版》[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.
[5] 王莉闻. 导数在不等式证明中的应用[J]. 考试周刊, 2011(82): 85.
[6] 臧兰娟. 导数在不等式证明中的应用[J]. 科教导刊, 2018(6): 248.
[7] 王学红. 函数的导数(变化率)与函数的凹凸性的关系[J]. 考试周刊, 2009(15): 64.
[8] 李栋红. 导数在不等式证明中的应用[J]. 贵阳学院学报, 2014, 9(1): 68-71.
[9] 邱伟. 导数在不等式证明中的应用[J]. 白城师范学院学报, 2016, 30(5): 47-51.