Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1333-1340
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135136

Hans汉斯

结合方案上Sylow *p*-子集的若干性质研究

张晓婷[1,2]，闫　焱[1,2,3*]，阎　熠[1]，王　悦[1]

[1]华北理工大学理学院，河北 唐山
[2]河北省数据科学与应用重点实验室，河北 唐山
[3]河北师范大学数学科学学院，河北 石家庄

收稿日期：2023年4月18日；录用日期：2023年5月22日；发布日期：2023年5月29日

摘　要

本文主要研究结合方案上Sylow *p*-子集(*p*是素数)的若干性质，并利用Sylow *p*-子集的存在性判断结合方案是非本原的。此外，利用Sylow定理分析价为6和200的结合方案的数学结构，给出价为6的结合方案至少存在一个价为2和3的闭子集，价为200的结合方案至少存在一个价为2、4、5、8和25的闭子集。

关键词

结合方案，Sylow定理，本原结合方案，Sylow *p*-子集

Research on Some Properties of Sylow *p*-Subsets on Association Schemes

Xiaoting Zhang[1,2], Yan Yan[1,2,3*], Yi Yan[1], Yue Wang[1]

[1]College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei
[2]Hebei Key Laboratory of Data Science and Application, Tangshan Hebei
[3]School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei

Received: Apr. 18th, 2023; accepted: May 22nd, 2023; published: May 29th, 2023

Abstract

In this paper, we study some properties of Sylow *p*-subset (*p* is a prime number) on association schemes, and the existence of Sylow *p*-subset is used to judge that the association scheme is imprimitive. Sylow theorem is used to analyze the mathematical structure of the association schemes with valency 6 and 200. The association scheme of valency 6 has at least one closed subset with

*通讯作者。

文章引用: 张晓婷, 闫焱, 阎熠, 王悦. 结合方案上 Sylow *p*-子集的若干性质研究[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1333-1340.
DOI: 10.12677/pm.2023.135136

valency 2 and 3. And the association scheme of valency 200 has at least one closed subset with valency 2, 4, 5, 8 and 25.

Keywords

Association Scheme, Sylow Theorem, Primitive Association Scheme, Sylow *p*-Subset

1. 引言

结合方案是与部分平衡不完全区组设计相伴的一个代数结构，在 1952 年首次由 R. C. Bose 和 T. Shimamoto 给出明确定义，被用于描述具有多个结合类的处理之间的不平衡性[1]。1959 年，R. C. Bose 和 D. M. Mesner 引入代数方法，结合方案成为了代数学的重要研究对象[2]。1984 年，E. Bannai 撰写并出版了代数组合的第一本专著，利用代数方法系统的介绍了结合方案的理论，总结规划了这个分支的研究方向[3]。20 世纪 90 年代，P. H. Zieschang 建立了结合方案的公理化理论，推广了有限群论[4] REF _Ref136176999 \r \h [5]。结合方案是代数组合的核心概念之一，源自可迁置换群性质的公理化，与群有着某种天然的联系[6]。

近年来，结合方案引起了许多人的研究兴趣。事实上，关于有限群的许多重要结果已经推广到了结合方案上[7]-[12]。例如，在[7]中，针对结合方案推广并证明了有限群上的同态定理、同构定理和 Jordan-Hölder 定理；在[8]中，将有限群上的 Sylow 定理推广到结合方案上；在[9]中，将有限群上的 Sylow 定理推广至 table 代数，这一结果包含了结合方案上的 Sylow 定理；在[11]中，将有限群中的 Schur-Zassenhaus 定理自然推广到了结合方案上。

2002 年，P. H. Zieschang 等将有限群上的 Sylow 定理推广到结合方案上，其中 Sylow 子群适当的推广为 Sylow 闭子集[8]。结合方案理论中每个定义或结论在有限群论中都有相应的定义和结论。有限群中给出了许多关于 Sylow 子群的结论[13] [14]，例如，利用 Sylow 定理判断群是否是单群和幂零群。本文的主要目的就是将这些结论适当的推广到结合方案上，例如，利用 Sylow 定理判断结合方案是否是本原结合方案。

此外，Sylow 定理同拉格朗日定理一样，是有限群论中最基本的定理之一，描述了有限群与它的某些子群之间的一些重要联系，这种联系为理解有限群的结构提供了有力依据[13]。利用 Sylow 定理可以了解给定阶群的数学结构，在本文最后给出了几个利用 Sylow 定理了解给定价结合方案数学结构的例子。

2. 结合方案上的 Sylow 定理

2.1. 结合方案的基本概念

下面结合方案的基本概念来源于文献[4]和[5]。

定义 1 [5]设 X 是一个有限集合。定义 $1_X=\{(x,x)|x\in X\}$。对于 $\forall r\subseteq X\times X$，定义 $r^*=\{(x,y)|(y,x)\in r,x,y\in X\}$。对于 $\forall r\subseteq X\times X,x\in X$，定义 $xr=\{y\in X|(x,y)\in r\}$。

定义 2 [5]令 G 表示 $X\times X$ 的一个划分，满足 $\varnothing\notin G$ 且 $1_X\in G$。假设对于 $\forall g\in G$，有 $g^*\in G$。(X,G) 称为一个结合方案如果对于任意的 $d,e,f\in G$ 存在一个基数 $a_{def}(G)$ 使得对于任意的 $y\in X$ 和 $z\in yf$，有

$\left|yd\cap ze^*\right|=a_{def}(G)$。

注意，将用 1 代替 1_X，用 a_{def} 代替 $a_{def}(G)$。

定义 3 [5]对于 $\forall e,f\in G$，定义 $ef=e\{f\}$。

给定 G 的一个元素 s 和 G 的一个非空子集 R，Rs 代替 $R\{s\}$，sR 代替 $\{s\}R$。

定义 4 [4]对于 $\forall g\in G$，$n_g=a_{gg^*1}=|xg|,x\in X$，称 n_g 为元素 $g\in G$ 的价；设 F 是 G 的一个子集，定义 $n_F=\sum_{f\in F}n_f$，称 n_F 为子集 F 的价；并定义 $O_g(F)=\left\{f\in F\middle|n_f=1\right\}$。

定义 5 [5]给定 $e\in G$，对于 $\forall f\in G$，定义 $ef=\left\{g\in G\middle|a_{efg}\neq 0\right\}$。

定义 6 [5]对于 $\forall E,F\subseteq G$，定义 $EF=\bigcup_{e\in E}eF=\bigcup_{f\in F}Ef=\bigcup_{e\in E}\bigcup_{f\in F}ef$，$eF=\bigcup_{f\in F}ef$，$Ef=\bigcup_{e\in E}ef$ 集合 EF 称为 E,F 的复积。给定 $F\subseteq G$，对于 $\forall x\in X$，定义 $xF=\bigcup_{f\in F}xf$。对于任意的 $F\subseteq G$ 和 $Y\subseteq X$，定义 $YF=\bigcup_{y\in Y}yF=\bigcup_{y\in Y}\bigcup_{f\in F}yf$。

定义 7 [5] G 的一个非空子集 F 是闭的如果满足对于 $\forall d,e\in F$ 总有 $de\subseteq F$。

定义 8 [8]对于 G 的任意闭子集 T，$N_G(T)=\left\{s\in G\middle|s^*Ts\subseteq T\right\}$ 表示 G 在 T 中的正规化子。

有限价方案允许对任意闭子集定义一个商结构，而不仅仅是对正规闭子集。

定义 9 [8]假设 n_G 是有限的，T 是 G 的闭子集。对于 $\forall x\in X$，定义 $xT=\bigcup_{t\in T}xt$，定义 $X/T=\left\{xT\middle|x\in X\right\}$。对于 $\forall s\in G$，定义 $s^T=\left\{(yT,zT)\middle|y\in X,z\in yTsT\right\}$，明显看出 $G//T=\left\{s^T\middle|s\in G\right\}$ 是 X/T 上的方案。这个方案称为 G 在 T 上的商方案。

定义 10 [7]给定 G 的同态 ϕ，将 ϕ 的核定义为 $\left\{s\in G\middle|s\phi=1\phi\right\}$，同态 ϕ 的核用 $\ker(\phi)$ 表示。

从核的定义来看，核是闭的。这里是方案的同态定理：

定理 1 [7]设 H 是 G 的一个闭子集，对于 $\forall x\in X$，令 $x\phi=xH$；对于 $\forall g\in G$，令 $g\phi=g^H$，则 ϕ 是从 (X,G) 到 $(X,G)^H$ 的一个双射态射，满足 $H=\ker(\phi)$。设 ϕ 是 (X,G) 的一个同态，则 $\ker(\phi)$ 是 G 的一个闭子集，且 $\left(X\phi,(G\phi)_{X\phi}\right)$ 是结合方案，且 $\left(X\phi,(G\phi)_{X\phi}\right)\cong(X,G)^{\ker\phi}$。

下面给出结合方案上的两个同构定理：

定理 2 [7]设 T 和 U 是 G 的闭子集，假设 $T\subseteq U$，则 $(G//T)//(U//T)\cong G//U$。

定理 3 [7]设 X 是集合，G 是 X 上的方案，$x\in X$，T 和 U 是 G 的闭子集且 $T\subseteq N_G(U)$，则 $(T//T\cap U)_x\cong(TU//U)_x$。

2.2. 结合方案上的 Sylow 定理

定义 10 [8]若 p 是一个素数，G 中的元素 g 称为 p-价的如果 n_g 可以表示成 p 的方幂，G 的一个子集称为 p-价的如果它的每个元素都是 p-价的；G 的一个 p-价子集 F 称为 p-子集如果 n_F 可以表示成 p 的方幂。

定义 11 [8]令 $Syl_p(G)$ 表示 G 中所有封闭 p-子集 H 的集合，其中 H 满足 p 不整除 $n_{G//H}$。

由 Sylow p-子集的定义可知，当 $n_G=p^n m$，其中 $(p,m)=1$，Sylow p-子集的价为 p^n。

结合方案上 Sylow 定理的具体内容如下所示：

定理 4 [8]设 X 是有限集，G 是 $X\times X$ 的划分，满足 $\varnothing\notin G$ 且 $1_X\in G$，(X,G) 是有限结合方案(简称方案)，p 是素数，P 为 G 的一个封闭 p-子集。如果 G 是 p-价的，则有下列结论：

1) 若 $P\notin Syl_p(G)$，则存在 G 的一个封闭 p-子集 P' 使得 $P\subseteq P'\subseteq N_G(P)$ 且 $pn_P=n_{P'}$；

2) 对于 $\forall P'\in Syl_p(G)$，则存在 $g\in G$，使得 $gPg^*\subseteq P'$。特别地，若 $P\in Syl_p(G)$，$gPg^*=P'$；

3) 若 $P\in Syl_p(G)$，令 $N=N_G(P)$，则 $n_{G//N}\equiv 1(p)$ 且 $n_{G//N}\equiv\left|\left\{gPg^*\mid g\in G\right\}\cap Syl_p(G)\right|(p)$。

3. 主要结论

下面给出关于结合方案 Sylow p-子集的几个简单但十分有用的结论。

引理 1 [4]设(X,G)是结合方案，T 和 U 是 G 的闭子集，假设 n_T 和 n_U 是有限的，则有下列结论：

1) $n_T n_U = n_{TU} n_{T\cap U}$；

2) 如果 $T \subseteq U$，则 n_T 整除 n_U；

3) 假设 n_G 是有限的，$(n_T)^{-1} n_G$ 和 $(n_U)^{-1} n_G$ 是互素的，则 $TU = G$。

定理 5 设(X,G)是有限价方案，N 是 G 的正规闭子集，P 是 G 的 Sylow p-子集，则 $PN//N$ 是 $G//N$ 的 Sylow p-子集，$P\cap N$ 是 N 的 Sylow p-子集。

证明：由闭子集的相关性质可得，$\{1\}$ 是 $P\cap N$ 的闭子集，$P\cap N$ 是 N 的闭子集，N 是 PN 的闭子集，PN 是 G 的闭子集；由引理 1 中 1)可得 $n_{P\cap N} \cdot n_{PN//N} = n_P$。

要证 $PN//N$ 是 $G//N$ 的 Sylow p-子集，$P\cap N$ 是 N 的 Sylow p-子集，由 Sylow p-子集的定义可以得到 $n_{(G//N)//(PN//N)}$ 和 $n_{N//P\cap N}$ 均不能被 p 整除，根据同构定理可以得到 $n_{G//PN}$ 不能被 p 整除，$n_{PN//N}$ 不能被 p 整除；由 N 是 G 的正规闭子集，P 是 G 的 Sylow p-子集和 $n_{P\cap N} \cdot n_{PN//N} = n_P$ 得到 $n_{G//PN}$ 不能被 p 整除，$n_{PN//N}$ 不能被 p 整除，即 $n_{(G//N)//(PN//N)}$ 和 $n_{N//P\cap N}$ 均不能被 p 整除，故 $PN//N$ 是 $G//N$ 的 Sylow p-子集，$P\cap N$ 是 N 的 Sylow p-子集。

引理 2 [4]设(X,G)是结合方案，T 和 U 是 G 的闭子集，则 TU 是闭的当且仅当 $TU = UT$。

定义 12 [4]设(X,G)是结合方案，T 和 U 是 G 的闭子集，满足 $T \subseteq U$ 并且 $T \neq U$，称 T 是 U 的极大闭子集如果 T 和 U 是包含 T 作为一个子集 U 的仅有闭子集。

定理 6 设(X,G)是结合方案，则有以下结论：

1) 如果 $P \in Syl_p(G)$，B 是任一封闭 p-子集，并且满足 $PB = BP$，则 B 是 P 的闭子集。特别地，如果 Q 是 G 的正规封闭 p-子集，则 Q 包含于 G 的任一 Sylow p-子集中；

2) G 的所有 Sylow p-子集的交，记作 $O_p(G)$，是 G 的极大正规封闭 p-子集，它包含 G 的每个正规封闭 p-子集；

3) 如果 $P \in Syl_p(G)$，并且 P 是 G 的正规闭子集，那么 G 的 Sylow p-子集的个数为 1；特别地，P 是 $N_G(P)$ 中唯一的 Sylow p-子集。

证明：因为 B 和 P 是 G 的闭子集，并且 $PB = BP$，所以由引理 2 可得 PB 是 G 的闭子集；假设 $P \in Syl_p(G)$，B 是任一封闭 p-子集，所以 n_B 和 n_P 可以写作 p 的方幂；由引理 1 可得 $n_{PB} = n_P n_B / n_{P\cap B}$，所以 PB 是 G 的封闭 p-子集，故 $n_{PB} \le n_P$；显然有 $n_{PB} \ge n_P$，故 $n_{PB} = n_P$；由闭子集和价之间的关系可以得到 $PB = P$，即 B 是 P 的闭子集。

因为 G 的 Sylow p-子集在 G 中是共轭的，所以 G 的任一正规封闭 p-子集包含于每个 Sylow p-子集中，又包含于所有 Sylow p-子集的交，即 $O_p(G)$ 中，所以 $O_p(G)$ 是 G 的极大正规封闭 p-子集。

因为 $P \in Syl_p(G)$，P 是 G 的正规闭子集，由 Sylow 第二定理和 Sylow 第三定理可得 G 的 Sylow p-子集的个数为 1，故有 $P = O_p(G)$，P 是 $N_G(P)$ 中唯一的 Sylow p-子集。

定理 7 设(X,G)是结合方案，N 是 G 的正规闭子集，P 是 N 的 Sylow p-子集，则有 $G = N_G(P)N$。

证明：由于 P 是 N 的 Sylow p-子集，N 的每个 Sylow p-子集是 P 的一个共轭，由 Sylow 第二定理可以得到，共轭的形式为 h^*Ph，$h \in N$。设 g 是 G 的一个元素，由于 N 是 G 的正规闭子集，闭子集 g^*Pg 包含于 N，即 g^*Pg 是 N 的一个 Sylow p-子集，它必定共轭与 P，即存在 $h \in N$，使得 $g^*Pg = h^*Ph$，所以有 $hg^*Pgh^* = P$，即有 $gh^* \in N_G(P)$。由 $g \in G$ 的任意性可得 $G = NN_G(P) = N_G(P)N$。

定理 8 设(X,G)是结合方案，P 是 G 的 Sylow p-子集，H 是 G 的闭子集，$N_G(P)$是 H 的闭子集，则 $H = N_G(H)$。

证明：由正规化子的相关性质可得 $H \subseteq N = N_G(H)$，现在要证 $H \supseteq N$。

对于 $\forall a \in N_G(H)$，又 P 是 G 的 Sylow p-子集，所以有 P 是 $N_G(P)$的闭子集，又 $N_G(P)$是 H 的闭子

集，故有 aPa^* 是 $aHa^*=H$ 的闭子集，有 P 和 aPa^* 都是 H 的 Sylow p-子集；由 Sylow 第二定理可得存在 $h\in H$，使得 $P=h\left(aPa^*\right)h^*\Rightarrow ha\in\tilde{N}_G\left(P\right)\subseteq H\Rightarrow a\in H$，故有 $H\supseteq N$。综上所述 $H=N_G\left(H\right)$。

定理 9 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，如果 G 的每个极大闭子集 M 是 G 的正规闭子集，并且 n_G/n_M 是素数，则 G 的每个 Sylow p-子集是正规的，并且 G 是它的诸 Sylow p-子集的直积。

证明：设 P 是 G 的 Sylow p-子集，$H=N_G\left(P\right)$。如果 $G\neq H$，取 G 的一个极大闭子集 M，使得 H 是 M 的闭子集；由于 M 是 G 的正规闭子集，但是由定理 8 可得 $M=N_G\left(M\right)$，矛盾，故必有 $G=N_G\left(P\right)$，即 P 是 G 的正规闭子集，于是 G 是它的诸 Sylow p-子集的直积。

定义 13 [4]设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，T 为 G 的闭子集，集合 T 称为本原的如果 $\left\{1\right\}$ 和 T 是 T 的仅有闭子集；G 称为本原的如果 $\left\{1\right\}$ 和 G 是 G 的仅有闭子集。

定理 10 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，$n_G=pq$，其中 $p<q$ 是两个不同的素数，则 Sylow q-子集是正规闭子集，故该方案不是本原方案。

证明：由 Sylow 第三定理可知 Sylow q-子集的个数是 $1+kq\left(k\geq 0\right)$，并且 $1+kq$ 整除 q，故由 $p<q$ 得 Sylow q-子集的个数只有一个，因此它是正规闭子集，则该方案不是本原方案。

定理 11 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，$n_G=p^2q$，其中 p 和 q 是两个不同的素数，则该方案不是本原方案。

证明：分为两种情况。

1) 如果 $p>q$，由定理 10 得 Sylow p-子集只有一个，是正规闭子集，该方案不是本原方案；

2) 如果 $p<q$，当 $q>3$ 时，$p-1<q$，故 q 不整除 $p-1$，也不整除 p^2-1，所以 Sylow q-子集的个数只有一个，是正规闭子集，该方案不是本原方案；当 $q=3$ 时只能有 $p=2$，即是价为 12 的结合方案，Sylow 2-子集的价为 4，Sylow 2-子集的个数只有一个，是正规闭子集，该方案不是本原方案。

综上所述，$\left(X,G\right)$ 是价为 $n_G=p^2q$ 的结合方案时不是本原方案。

定理 12 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，$n_G=pqr$，其中 p,q,r 是三个不同的素数，则该方案不是本原方案。

证明：不妨设 $p<q<r$，Sylow r-子集的个数是 $1+kr\left(k\geq 0\right)$，并且整除 pq，$1+kr=1$，$1+r>q>p$，$1+2r$，$\cdots$，$1+kr$ 只能等于 1 或 pq，当 $1+kr=1$ 时，Sylow r-子集是正规闭子集，该方案不是本原方案；当 $1+kr=pq$ 时，该方案的闭子集不仅只有 $\left\{1\right\}$ 和方案本身，还有 pq 个 Sylow r-子集，故该方案不是本原方案。

Sylow q-子集的个数是 $1+mq\left(m\geq 0\right)$，并且整除 pr，$1+mq=1$，$1+q>p$，$\cdots$，$1+mq=1$ 或 $1+mq=r$ 或 $1+mq=pr$，当 $1+mq=1$ 时，Sylow q-子集是正规闭子集，该方案不是本原方案，当 $1+mq=r$ 或 $1+mq=pr$ 时，该方案的闭子集不仅只有 $\left\{1\right\}$ 和方案本身，还有 r 或 pr 个 Sylow q-子集，故该方案不是本原方案。

同理，Sylow p-子集的个数是 $1+np\left(n\geq 0\right)$，并且整除 qr，$1+np$ 可能是 q 或 r 或 qr，这三种情况下，该方案均不是本原方案。

综上所述，$\left(X,G\right)$ 是价为 $n_G=p^2q$ 的结合方案时不是本原方案。

定理 13 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，当 $n_G\in\left\{5,10,15,20\right\}$ 时，则 G 只包含一个 Sylow 5-子集。

证明：当 $n_G=5$ 时，令 $J_5=\left|Syl_5\left(G\right)\right|$，则由 Sylow 第三定理可得 $J_5=\left|Syl_5\left(G\right)\right|$ 是 5/5 的因子，即 1 的因子，故此时只包含一个 Sylow 5-子集。

当 $n_G=10$ 时，$10=2\times 5$，2、5 是两个不同的素数；当 $n_G=15$ 时，$15=3\times 5$，3、5 是两个不同的素数；当 $n_G=20$ 时，$20=2^2\times 5$，2、5 是两个不同的素数；由定理 10 和定理 11 可知，G 只包含一个 Sylow 5-子集。

例 1 设 $\left(X,G\right)$ 是有限价方案，$n_G=30$ 时，$30=2\times 3\times 5$，2、3 和 5 是三个不同的素数，则由 Sylow 第三定理可得 Sylow 2-子集的个数是 $J_2=2k+1\left(k\geq 0\right)$，可能的情况有 1、3、5、15；Sylow 3-子集的个

数是 $J_3 = 3k+1(k \ge 0)$，可能的情况有 1、10；Sylow 5-子集的个数是 $J_5 = 5k+1(k \ge 0)$，可能的情况有 1、6，所以该方案的闭子集除了 $\{1\}$ 和方案本身外，至少还有一个 Sylow 2-子集、Sylow 3-子集和 Sylow 5-子集，所以该方案不是本原方案。

对于一个给定价的方案，利用 Sylow 定理从计数的角度研究它的结构。对于给定价的结合方案仅知道包含 1 作为一个元素，其余的结构信息是不清楚的，如图 1 所示。下面以价为 6 和价为 200 的结合方案为例，探究它们的数学结构。

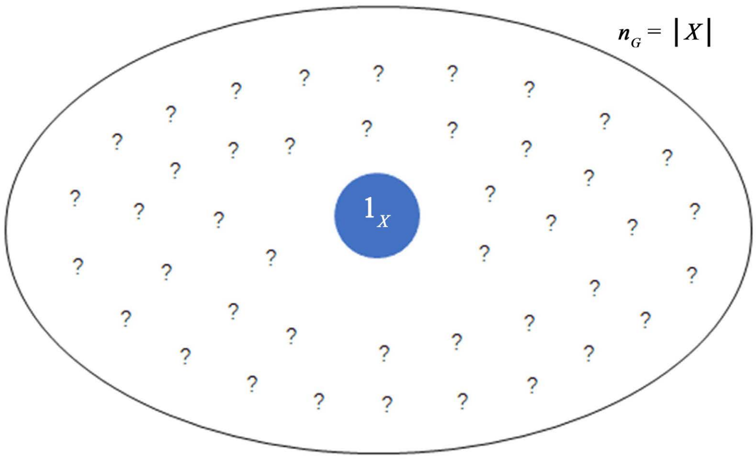

Figure 1. The internal structure of the initial association scheme
图 1. 初始结合方案的内部结构

定理 14 [8]设 p 表示素数，(X,G) 是 p-价方案，如果 p 整除 n_G，则有 $O_{\vartheta}(G)=\{g \in G | n_G = 1\}$ 包含一个闭子集 H，其中 $n_H = p$。

例 2 $n_G = 6$ 时，$6 = 2\times 3$，由柯西定理可知存在价为 2 和 3 的闭子集，但不知道价为 2 和价为 3 的闭子集各有多少个，只是知道这些闭子集至少存在一个。由 $Syl_p(G)$ 的定义可知存在两个 Sylow p-子集，价为 2 的 Sylow 2-子集和价为 3 的 Sylow 3-子集。由 Sylow 第二定理可知，如果存在其它的闭子集，则它们必定与已知的封闭 p-子集有相同的内部结构，事实上必定是共轭的。

由 Sylow 第三定理可知 Sylow p-子集的个数是 $1+kp(k \ge 0)$，6 的因子有 1、2、3 和 6，价为 2 的 Sylow 2-子集的个数可能是 1、3，价为 3 的 Sylow 3-子集的个数是 1，Sylow 3-子集是正规闭子集。

例 3 $n_G = 200$ 时，$200 = 2^3 \times 5^2$，2、5 均为素数，由柯西定理可知存在价为 2 和价为 5 的闭子集，由 Sylow 第一定理可知还存在价为 4、8 和 25 的闭子集，其中价为 4 的闭子集包含价为 2 的闭子集，价为 8 的闭子集包含价为 4 的闭子集，价为 25 的闭子集包含价为 5 的闭子集；但是不知道这些闭子集各有多少个，只知道这些闭子集至少存在一个，由 $Syl_p(G)$ 的定义可知存在两个 Sylow p-子集分别是价为 8 的 Sylow 2-子集和价为 25 的 Sylow 5-子集。

由 Sylow 第二定理可知如果还存在其他的封闭 p-子集，它们必定与已知的封闭 p-子集是共轭的。由 Sylow 第三定理可知 Sylow p-子集的个数是 $1+kp(k \ge 0)$，200 的因子有 1、2、4、5、8、10、20、25、40、50、100 和 200，价为 8 的 Sylow 2-子集的个数可能是 1、5、25；价为 25 的 Sylow 5-子集的个数是 1，Sylow 5-子集是正规闭子集，具体如图 2 所示。

由上述的例子可知，对于价较小的结合方案，利用柯西定理可以得到有价值的信息；当结合方案的价更高时，利用柯西定理得到的信息相对单薄。对于价较大的结合方案可以利用 Sylow 定理分析它的数

学结构，一般步骤如下：

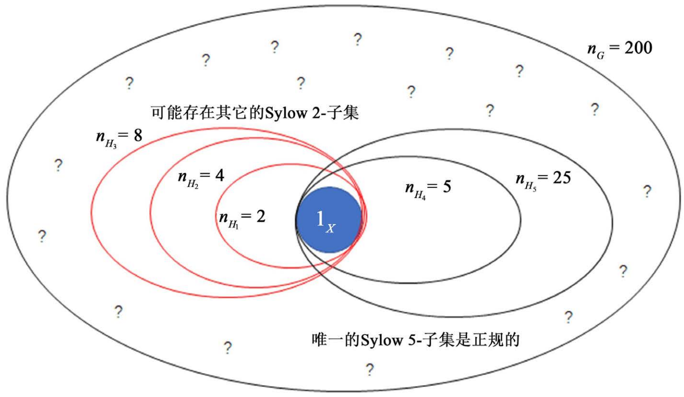

Figure 2. The internal structure of association scheme based on Sylow theorem
图 2. 基于 Sylow 定理的结合方案内部结构

1) 根据给定的价，对其进行因子分解，将其化为不同素数的乘积；

2) 根据价的因子分解，应用柯西定理和 Sylow 第一定理，得到该方案的存在的闭子集的种类及其之间的包含关系以及 Sylow *p*-子集所对应的价；

3) 利用 Sylow 第二定理得到如果存在其他的封闭 *p*-子集，它们必定与已知的封闭 *p*-子集是共轭的；

4) 利用 Sylow 第三定理得到 Sylow *p*-子集的个数。

在有限群上可以利用 Sylow 定理的相关性质分析群的结构特征，将有限群上 Sylow 相关内容适当推广到结合方案上，可以从计数的角度探究结合方案的结构特征，更好地了解结合方案的子结构、原始结构等结构问题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目“结构数学在现代数学中的渗透与应用”(项目编号：12171137)。

参考文献

[1] Bose, R.C. and Shimamoto, T. (1952) Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Association Classes. *Journal of the American Statistical Association*, **47**, 151-184. https://doi.org/10.1080/01621459.1952.10501161

[2] Bose, R.C. and Meaner, D.M. (1959) On Linear Associative Algebras Corresponding to Association Schemes of Partially Balanced Designs. *The Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 21-38. https://doi.org/10.1214/aoms/1177706356

[3] Bannai, E. and Ito, T. (1984) Algebraic Combinatorics I (Association Schemes). Benjinamin/Cummings, Menlo Park.

[4] Zieschang, P.H. (2005) Theory of Association Schemes. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

[5] Zieschang, P.H. (1996) An Algebraic Approach to Association Schemes. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0097032

[6] Bannai, E. (2010) Combinatorics Regarded as Pure Mathematics: The Aims of Algebraic Combinatorics. *Sugaku*, **62**, 433-452.

[7] Rassy, M. and Zieschang, P.H. (1998) Basic Structure Theory of Association Schemes. *Mathematische Zeitschrift*, **227**, 391-402. https://doi.org/10.1007/PL00004380

[8] Hirasaka, M., Muzychuk, M. and Zieschang, P.H. (2002) A Generalization of Sylow’s Theorems on Finite Groups to Association Schemes. *Mathematische Zeitschrift*, **241**, 665-672. https://doi.org/10.1007/s00209-002-0430-x

[9] Blau, H.I. and Zieschang, P.H. (2004) Sylow Theory for Table Algebras, Fusion Rule Algebras, and Hypergroups.

Journal of Algebra, **273**, 551-570. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.09.041

[10] Hanaki, A. (2008) Nilpotent Schemes and Group-Like Schemes. *Journal of Combinatorial Theory*, **115**, 226-236. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2007.05.007

[11] French, C. and Zieschang, P.H. (2015) A Schur-Zassenhaus Theorem for Association Schemes. *Journal of Algebra*, **435**, 88-123. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.02.033

[12] Andrey, V. and Zieschang, P.H. (2022) Solvable Hypergroups and a Generalization of Hall's Theorems on Finite Solvable Groups to Association Schemes. *Journal of Algebra*, **594**, 733-750. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.11.026

[13] 韩士安, 林磊. 近世代数[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2009.

[14] 徐明曜, 曲海鹏. 有限 p 群[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.