

# 径向基函数插值中形状参数的选取方法

王鸿丽\*, 龚佃选, 王 玲

华北理工大学理学院, 河北 唐山

Email: \*wanghongli\_sx@163.com

收稿日期: 2020年8月18日; 录用日期: 2020年9月4日; 发布日期: 2020年9月11日

## 摘 要

径向基函数的形状参数对插值精度的影响很大。如何选取形状参数使得插值误差最小的问题, 受到国内外学者的广泛关注。结合径向基函数插值的误差理论, 本文围绕形状参数的选取方法进行归纳总结, 并通过数值实验, 对现有的方法对比研究。为了提高变参数径向基函数的插值精度, 提出用拉格朗日法和径向基函数法相结合的方式加以改进。

## 关键词

径向基函数, 插值精度, 形状参数, 拉格朗日法

# Selection of Shape Parameters in Radial Basis Function Interpolation

Hongli Wang\*, Dianxuan Gong, Ling Wang

School of Science, North China University of Technology, Tangshan Hebei

Email: \*wanghongli\_sx@163.com

Received: Aug. 18<sup>th</sup>, 2020; accepted: Sep. 4<sup>th</sup>, 2020; published: Sep. 11<sup>th</sup>, 2020

## Abstract

The shape parameters of radial basis function have a great influence on interpolation accuracy. How to select the shape parameters to minimize the interpolation error has been widely concerned by scholars at home and abroad. Combined with the error theory of radial basis function interpolation, the selection methods of shape parameters are summarized in this paper. Through numerical experiments, the existing methods are compared. In order to improve the interpolation accuracy of variable parameter radial basis function, the combination of Lagrange method and

\*通讯作者。

radial basis function method is proposed.

## Keywords

Radial Basis Function, Interpolation Accuracy, Shape Parameter, Lagrange Method

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Frank 在文献[1]中比较了 27 种数据处理方法, 最后得出结论: 径向基函数插值法在所有数值方法当中综合性能最好。到目前为止, 径向基函数的理论研究已经基本完善。众多研究和实际应用表明, 径向基函数插值中形状参数对插值精度有较大的影响, 因此形状参数的选取是至关重要的, 国内外众多学者从不同角度对该问题展开了讨论。本文拟对径向基函数插值中形状参数的选取方法进行归纳总结, 结合径向基函数插值误差理论, 并通过数值实验对现有的方法对比研究。为了提高变参数径向基函数的插值精度, 提出用两种插值方法相结合的方式加以改进。

## 2. 径向基函数插值

E.M. Stein 和 G. Weiss [2]对径向基函数是这样定义的:

径向基函数是一个取值仅与离原点距离有关的实值函数  $\phi$ , 即  $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ 。如果满足:  $\|x_1\| = \|x_2\|$ , 那么  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ , 其中,  $\|\cdot\|$  是标准欧式范数, 常用的径向基函数(吴宗敏教授在文献[3]):

Kriging 方法的 Gauss 分布函数:  $\phi(\|x_k - x_j\|) = e^{-c^2 \|x_k - x_j\|^2}$ ;

Hardy 的 MQ 函数:  $\phi(\|x_k - x_j\|) = (c^2 + \|x_k - x_j\|^2)^\beta$ ;

Hardy 的逆 MQ 函数:  $\phi(\|x_k - x_j\|) = (c^2 + \|x_k - x_j\|^2)^{-\beta}$  (其中  $\beta$  是正实数)。

其中,  $c$  可以确定基函数的形状, 称之为形状参数。

径向基函数插值的定义为:

对于给定的  $n$  个样本点  $\{x_j, f_j\}_{j=1}^n \in R^n \otimes R$ 。选取径向基函数  $\phi: R_+ \rightarrow R$  构造径向基函数空间  $\{\phi(\|x - x_j\|)\}_{j=1}^n$ , 并寻找形如  $S(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(\|x - x_j\|)$  ( $\lambda_j$  为插值系数)的插值函数  $S(x)$ , 使其满足条件  $S(x_j) = f_j, j = 1, 2, \dots, n$ 。

## 3. 径向基函数插值误差估计

当选定合适的基函数之后, 进一步, 需要考察径向基函数的拟合效果, 即考察验证样本点的误差估计。取  $m$  个验证样本点  $\{x_i, f_i\}_{i=1}^m$ ,  $S(x_i)$  为径向基函数在  $x_i$  处的预测值。常用的误差估计方法有:

均方根误差[4] (Root Mean Square Error):  $RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m [f_i - S(x_i)]^2}{m}}$ 。

最大误差[5] (Maximum Error):  $ME = \max |f_i - S(x_i)|, i = 1, 2, \dots, m$ 。

相对误差[6] (Relative Error):  $RE = \frac{|f_i - S(x_i)|}{f_i}, i = 1, 2, \dots, m$ 。

交叉验证误差[7] (Cross Validation Error): 在样本点  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  中, 去掉  $X$  中的  $x_i$ , 得到  $X_{-i} = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m\}$ , 用  $X_{-i}$  构造径向基模型  $\tilde{S}_{-i}(x_i)$ , 并用  $x_i$  作为验证点, 在  $x_i$  处的误差可以表示为:  $CVE_i = |S(x_i) - \tilde{S}_{-i}(x_i)|, i = 1, 2, \dots, m$ 。

相关系数[8] (Correlation Coefficient):  $r(F, S) = \frac{Cov(F, S)}{\sqrt{Var(F)Var(S)}}$ 。其中,  $F = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T$ ,

$S = [S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_m)]^T$ ,  $Cov(F, S)$  为  $F$  与  $S$  的协方差,  $Var(F)$  为  $F$  的方差,  $Var(S)$  为  $S$  的方差。比较好的模型预测值和真实值有较高的相关系数, 最大值为 1。

拟合优度[7] (Goodness of Fit):  $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n [f_i - S(x_i)]^2}{SS_T}$ 。其中,  $SS_T$  称为平方和, 即  $SS_T = \sum_{i=1}^n f_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n}$ 。

$R^2$  在 0 到 1 范围内取值,  $R^2$  越接近 1, 模型的精度就越高。

#### 4. 径向基函数插值中形状参数的选取方法

对于径向基函数, 形状参数  $c$  是一个自由参数。在实际应用过程中  $c$  的取值对计算结果有很大的影响, 如何选取形状参数使得插值误差最小, 一直是研究人员关注的课题。目前, 形状参数  $c$  的选取有两种观点: 一种观点认为参数  $c$  是常数, 与样本点无关; 另一种观点则认为  $c$  在每一个样本点处是可变的。以下将分别对这两类径向基函数归纳总结, 并通过数值实验比较这些方法的优缺点。

##### 4.1. 常参数径向基函数中形状参数的选取方法

Hardy [9]早在 1971 年, 就提出了 MQ 函数中形状参数的计算公式, 对其研究的地形问题有很好的拟合能力。常参数径向基函数中, 形状参数的选取方法可分为以下两种:

###### 1) 优化误差确定法

显然误差是与形状参数  $c$  有关的, 记为  $E(c)$ , 优化误差法的基本思想: 把形状参数的选取问题转化为优化误差的问题, 即通过最小化误差, 为给定的径向基函数选择最优形状参数。

Rippa [4]定义了代价函数  $cost(c)$  来表示插值函数和实际未知函数之间的均方根误差, 通过最小化代价函数, 得到较好的形状参数。并从插值矩阵的条件数及计算精度、样本点的数量和分布、径向基函数类型三个方面证明了该选取方法的有效性。魏月兴, 许林, 陈小前[7]提出在控制 Runge 现象[10]的同时, 最小化交叉验证误差获得形状参数的算法。该算法先确定  $c$  的初始值( $c_{init} = mean(d_j)$ , 这里,  $d_j$  是  $x_j$  和其他样本点之间的最小距离)和步长( $l = m/n$ )。魏月兴, 陈小前, 许林[11]利用 MQ 函数插值 Rosenbroke 函数, 以插值矩阵条件数小于  $10^{15}$  作为约束条件, 最小化  $RMSE(c)$ , 得到  $c$  的最优值。Roque 和 Ferreira [12]在 MQ 形状参数的选择中, 应用留一交叉验证(LOOCV) [13]优化技术模拟给定边值问题的误差函数, 并证明该方法适用于一维和二维情况。牛瑞萍[5]在利用逆 MQ 函数求解混合介质中 Cauchy 热传导反问题时, 提出了一种自动选择算法, 该算法通过最小化近似温度和给定温度值的残差选择合适的形状参数, 并利用 Tikhonov 正则化[14]方法保证问题获得精确稳定的解。

###### 2) 数值实验确定法

到目前为止, 在用径向基函数解决具体插值问题或方程问题时, 如何确定形状参数使得插值精度尽可能高, 还没有普适性结论。因此, 很多学者通过改变形状参数  $c$  的值, 进行重复性插值数值实验, 得

出误差值,在这些误差值中选择最小误差,其对应的形状参数即为最优。这种确定形状参数最优值的方法比较机械,且缺乏普适性,但数值实验得出的部分结论,却对后面的研究探索有指导性意义。

Fasshauer [15]用 MQ 函数对基于网格的非线性偏微分方程进行数值求解时,得出形状参数的选取公式  $c = 2/\sqrt{n}$ 。聂鑫[6]用 MQ 插值求解边值问题时,指出插值精度和稳定性与形状参数相关,一维时,条件数对数与形状参数呈线性关系。形状参数较小时插值误差较大,而过大时又会发生剧烈振荡;随着节点数的增加,形状参数选取范围逐渐减小;只有参数在特定范围时才能取得较好的计算精度。齐静[16]用 MQ 函数、Gauss 函数对一元函数  $f(x) = \sin(2x)$  和二元函数  $f(x) = \sin(3x)\sin(2y)$  作插值的数值实验,均得到:  $c$  的取值越小,对应的误差也越小,因此在实际应用中可适当减小  $c$  的值。陈风雷[17]用 MQ 函数对函数  $y = \sin x$ , 分别模拟了  $p$  阶导数插值与  $p$  重积分插值的数值实验( $p$  取 1, 2, 3, 4), 给出了形状参数在积分插值方法中最适宜的取值范围是(0, 1/n), 在导数插值方法中最适宜的取值范围是(1/n, 3), 显然对于导数形状参数的取值要比积分形式稍微大; 多重积分插值相对高阶导数插值更稳定、精度高, 对于形状参数的选择更灵活。

#### 4.2. 变参数径向基函数中形状参数的选取方法

Kansa [18]最早发现,在使用 MQ 插值时,如果使形状参数随空间变化,则插值精度有提高的可能,对于变参数径向基函数[19],形状参数的选取方法可分为以下两种:

##### 1) 公式确定法

根据形状参数就是该点对样本空间影响能力的意义,将该样本点与其他样本点之间的最小距离作为该样本点的形状参数,即

$$c_j = \min r_{jk}, j = 1, 2, \dots, n, j \neq k \quad (1)$$

其中,  $r_{jk}$  表示第  $j$  个样本点与第  $k$  个样本点的距离。由于样本点间的距离并不相等,每个样本点有不同的影响范围,为了很好地对原始函数进行拟合预测,当采样点个数  $n \rightarrow \infty$  的情况下,Kitayama [20]提出了如公式(2)所示的形状参数确定方法。

$$c_j = \frac{d_{j,\max}}{\sqrt{\alpha^n \sqrt{n-1}}} \quad (2)$$

式中,  $d_{j,\max}$  为第  $j$  个样本点到其他样本点间的最大距离,  $\alpha$  为原函数所含变量的个数。

##### 2) 样本点局部密度确定法

武泽平[8] [21]选择 Gauss 函数作为序列近似优化算法的插值模型,指出形状参数  $c_j$  的本质物理意义是样本点对整个样本空间的影响范围大小,据此提出一种基于样本点局部密度确定形状参数的方法。该方法的基本思路为:计算每个样本点的局部密度  $\rho_j$  和影响体积分数  $v_j$  (所有样本点的影响体积分数之和为 1)。通过确定样本点的影响体积总和  $V_t$ , 计算每个样本点的影响体积  $V_j$  ( $V_j$  应该与其密度成反比), 变量  $V_j$  的  $n$  次方根即为形状参数  $c_j$ 。

#### 4.3. 数值实验

对函数  $f = \frac{x \sin(2\pi x)}{1000e^x}$  在区间  $x \in [0, 1]$  上随机地取 8 个样本点:  $(0.1, 5.3185 \times 10^{-5})$ ;  $(0.2, 1.5573 \times 10^{-4})$ ;  $(0.49, 1.8849 \times 10^{-5})$ ;  $(0.56, -1.1775 \times 10^{-4})$ ;  $(0.7, -3.3060 \times 10^{-4})$ ;  $(0.78, -3.5122 \times 10^{-4})$ ;  $(0.8, -3.4187 \times 10^{-4})$ ;  $(0.95, -1.1353 \times 10^{-4})$ 。

用 Gauss 函数对其进行插值,分别利用上述方法,选取形状参数,并画出误差图像,比较这些方法

的拟合效果( $\alpha = 1, n = 8, m = 101$ )。

### 4.3.1. 常参数径向基函数中形状参数的选取方法

1) 优化误差确定法

解决如下优化问题:

$$\begin{cases} \min E_{\max}(c) = \min(\max_x |S(x, c) - f(x)|) \\ \text{Cond}(A) \leq 10^8, c \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $A$  为径向基函数插值矩阵, 利用 Matlab 软件编程, 得到利用 Gauss 函数对原函数  $f(x)$  作插值的最优形状参数为  $c_{opt} = 4.581$ , 且当  $c$  取该值时,  $\min(E_{\max}) = 2.2405 \times 10^{-5}$ 。图 1、图 2 显示最优形状参数  $c_{opt} = 4.581$  时的插值效果图及误差图。

2) 数值实验确定法

对形状参数  $c$  分别取不同的值, 用 Matlab 软件做插值实验, 在矩阵非奇异的条件下, 计算不同形状参数所对应的插值最大误差, 部分结果如表 1 所示。最大误差值的最小值  $\min(E_{\max})$  对应最优形状参数。

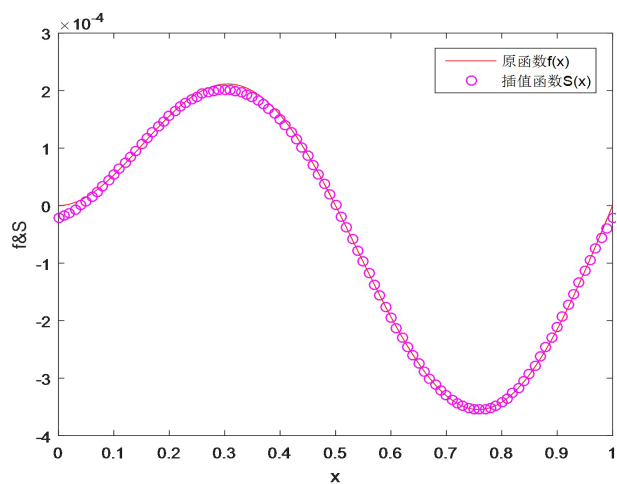
Table 1. Shape parameters and corresponding error values

表 1. 各形状参数及对应误差值

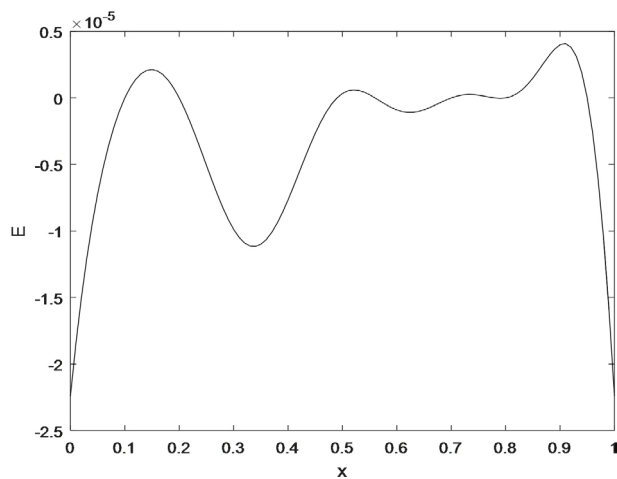
形状参数 $c$	最大误差 $E_{\max}$	形状参数 $c$	最大误差 $E_{\max}$	形状参数 $c$	最大误差 $E_{\max}$
0.512	$5.5225 \times 10^{-5}$	1.5	$7.6871 \times 10^{-6}$	1.78	$1.8073 \times 10^{-6}$
0.5125	$6.4989 \times 10^{-5}$	1.6	$4.7137 \times 10^{-6}$	1.79	$2.2016 \times 10^{-6}$
0.513	$3.4267 \times 10^{-5}$	1.61	$4.3870 \times 10^{-6}$	1.8	$2.5984 \times 10^{-6}$
0.5131	$3.8102 \times 10^{-5}$	1.63	$3.7190 \times 10^{-6}$	2	$1.0831 \times 10^{-5}$
0.514	$8.4087 \times 10^{-5}$	1.65	$3.0325 \times 10^{-6}$	3	$3.6206 \times 10^{-5}$
0.52	$7.6875 \times 10^{-5}$	1.67	$2.3286 \times 10^{-6}$	4	$2.8020 \times 10^{-5}$
0.53	$1.9845 \times 10^{-5}$	1.69	$1.6082 \times 10^{-6}$	4.5	$2.3004 \times 10^{-5}$
0.55	$3.1095 \times 10^{-5}$	1.7	$1.2422 \times 10^{-6}$	4.6	$2.2698 \times 10^{-5}$
0.6	$1.0714 \times 10^{-5}$	1.73	$1.2261 \times 10^{-7}$	4.6001	$2.2700 \times 10^{-5}$
0.7	$5.9968 \times 10^{-6}$	1.7301	$1.2299 \times 10^{-7}$	4.601	$2.2714 \times 10^{-5}$
0.8	$9.1350 \times 10^{-6}$	1.731	$1.3535 \times 10^{-7}$	4.61	$2.2853 \times 10^{-5}$
0.9	$1.1009 \times 10^{-5}$	1.74	$3.0958 \times 10^{-7}$	4.7	$2.4241 \times 10^{-5}$
1	$1.2242 \times 10^{-5}$	1.75	$6.4048 \times 10^{-7}$	5	$2.8790 \times 10^{-5}$
1.1	$1.2810 \times 10^{-5}$	1.76	$1.0266 \times 10^{-6}$	7	$9.1400 \times 10^{-5}$
1.3	$1.1721 \times 10^{-5}$	1.77	$1.4156 \times 10^{-6}$	8	$1.2719 \times 10^{-4}$

从表 1 可以看出, 利用 Gauss 函数对原函数  $f(x)$  作插值的最优形状参数为  $c_{opt} = 1.73$ , 且当  $c$  取该值时,  $\min(E_{\max}) = 1.2261 \times 10^{-7}$ 。图 3、图 4 显示最优形状参数  $c_{opt} = 1.73$  时的插值效果图及误差图。

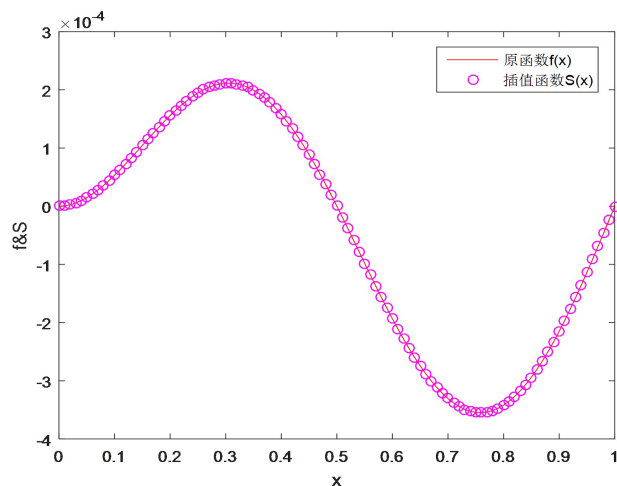
图 1、图 3 中插值曲线与原函数曲线基本吻合, 说明选取的形状参数都有很好的插值拟合效果, 但图 4 中误差达到  $10^{-7}$ , 而图 2 的误差达到  $10^{-5}$ 。说明方法(2)选取的形状参数使得插值误差更小。另外, 图 4 的误差整体波动较图 2 要小得多, 说明方法(1)选取的形状参数使得误差变化幅度大。经计算, 方法(1)的插值矩阵条件数  $\text{Cond}(A) = 3.0044 \times 10^4$ , 方法(2)的插值矩阵条件数  $\text{Cond}(A) = 5.3486 \times 10^9$ , 说明方法(1)选取的形状参数使得插值稳定性[19]高。图 5 显示了验证样本点的最大误差随形状参数的变化趋势, 显然, 整体上, 最大误差  $E_{\max}$  随形状参数  $c$  的增大先减小后增大。但当  $c \in [0.7, 4.6]$  时最大误差有两次较大的波动, 最优的形状参数正好对应两次波动的最低点。



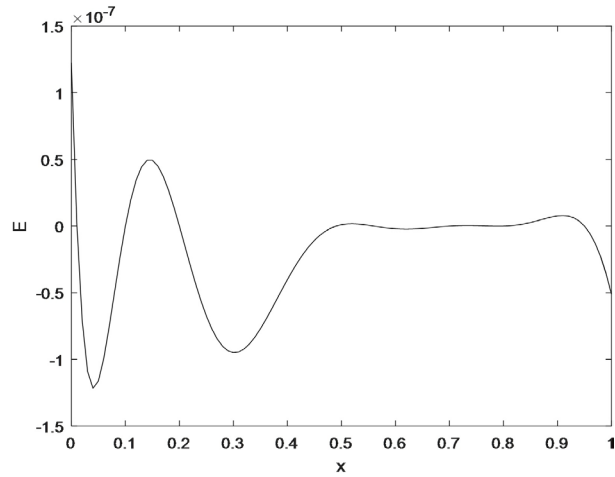
**Figure 1.** Original function  $f(x)$  and its interpolation function  $S(x)$   
**图 1.** 原函数  $f(x)$  及其插值函数  $S(x)$



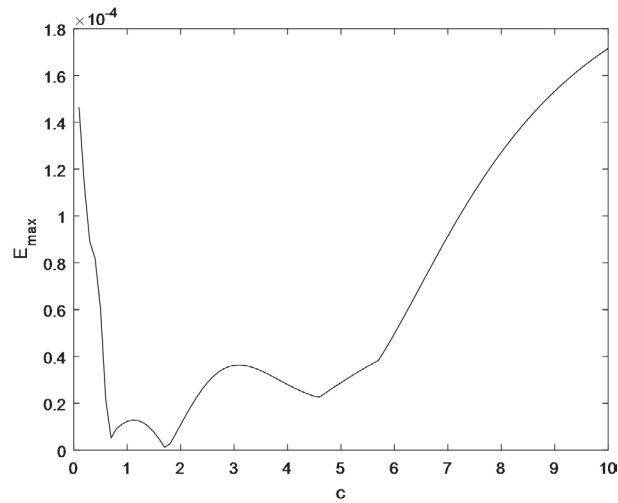
**Figure 2.** Interpolation error graph  $E(x)$   
**图 2.** 插值误差图  $E(x)$



**Figure 3.** Original function  $f(x)$  and its interpolation function  $S(x)$   
**图 3.** 原函数  $f(x)$  及其插值函数  $S(x)$



**Figure 4.** Interpolation error graph  $E(x)$   
**图 4.** 插值误差图  $E(x)$



**Figure 5.** Maximum error  $E_{\max}$  with shape parameter  $c$   
**图 5.** 最大误差  $E_{\max}$  随形状参数  $c$  的变化图像

#### 4.3.2. 变参数径向基函数中形状参数的选取方法

##### 1) 公式确定法

根据公式(1), 计算出在各个样本点处的形状参数如表 2 所示。

利用表 2 中形状参数的值, 确定径向基函数  $S(x)$ , 编写 Matlab 程序, 对原函数  $f(x)$  进行插值, 得到插值曲线及误差图像如图 6、图 7 所示。

**Table 2.** Shape parameters of each sample point

**表 2.** 各样本点的形状参数

样本点 $x_j$	0.1	0.2	0.49	0.56	0.7	0.78	0.8	0.95
形状参数 $c_j$	0.1	0.1	0.07	0.07	0.08	0.02	0.02	0.15

##### 2) 样本点局部密度确定法

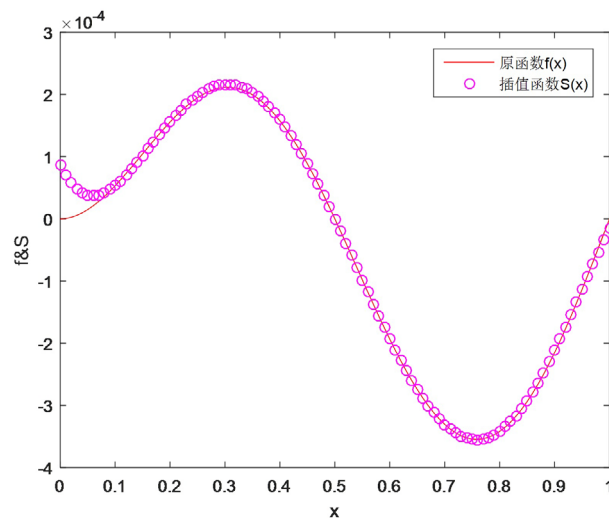
根据武泽平给出的方法步骤, 计算出在各个样本点处的形状参数如表 3 所示。

利用表 3 中形状参数的值, 确定径向基函数  $S(x)$ , 编写 Matlab 程序, 对原函数  $f(x)$  进行插值, 得到插值曲线及误差图像如图 8、图 9 所示。

**Table 3.** Related data to shape parameters of each sample point (take  $V_i = 2$ )

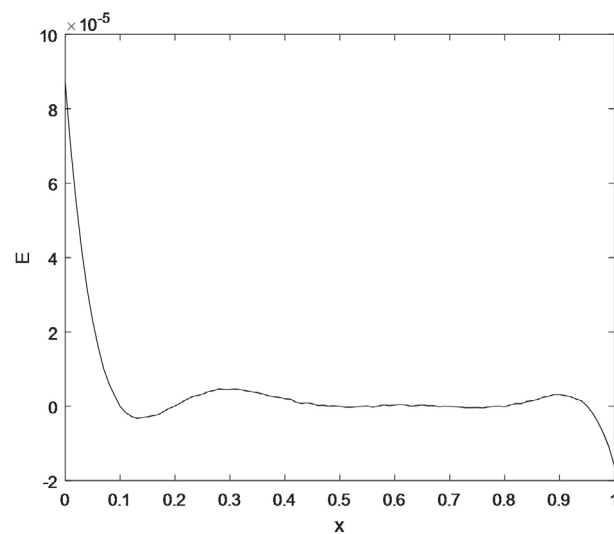
**表 3.** 各样本点形状参数相关数据(取  $V_i = 2$ )

采样点 $x_j$	0.1	0.2	0.49	0.56	0.7	0.78	0.8	0.95
密度值 $\rho_j$	1.0016	1.0016	1.0113	1.0114	1.0077	1.2834	1.2792	1.0001
密度倒数 $1/\rho_j$	0.9984	0.9984	0.9888	0.9887	0.9924	0.7792	0.7817	0.9999
影响体积分数 $v_j$	0.1326	0.1326	0.1314	0.1313	0.1318	0.1035	0.1038	0.1328
形状参数 $c_j$	0.2652	0.2652	0.2628	0.2626	0.2636	0.2070	0.2076	0.2656



**Figure 6.** Original function  $f(x)$  and its interpolation function  $S(x)$

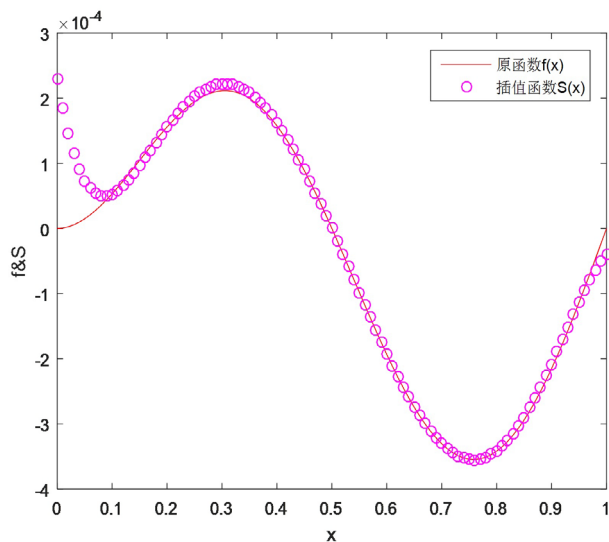
**图 6.** 原函数  $f(x)$  及其插值函数  $S(x)$



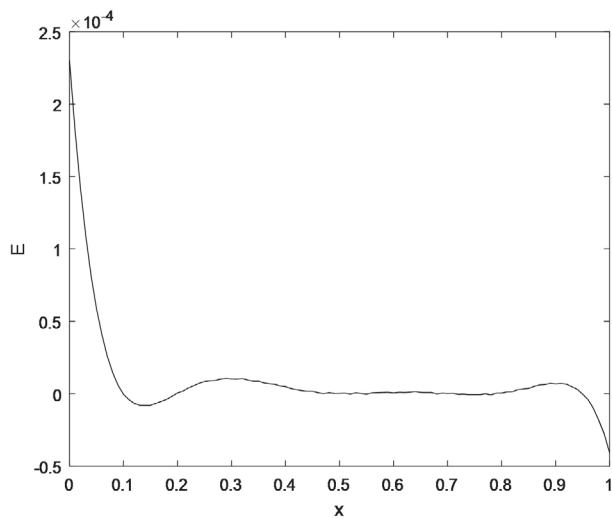
**Figure 7.** Interpolation error graph  $E(x)$

**图 7.** 插值误差图  $E(x)$





**Figure 8.** Original function  $f(x)$  and its interpolation function  $S(x)$   
**图 8.** 原函数  $f(x)$  及其插值函数  $S(x)$



**Figure 9.** Interpolation error graph  $E(x)$   
**图 9.** 插值误差图  $E(x)$

图 6、图 8 中，当  $x > 0.09$  时，插值曲线与原函数曲线基本吻合，说明两种方法选取的形状参数在除起始端点的很小区间  $x \in [0, 0.09]$  外，都有比较好的插值拟合效果，方法(1)的  $E_{\max} = 8.7201 \times 10^{-5}$  (图 7)，而方法(2)的  $E_{\max} = 2.3055 \times 10^{-4}$  (图 9)，即优先选择方法(1)确定变参数径向基函数的形状参数，可使得插值误差更小。另外，除插值区间的两侧端点  $x \in [0, 0.2]$  及  $[0.9, 1]$  外，图 7、图 9 的误差波动都很小。说明两种方法选取的形状参数使得误差变化幅度都很小。经计算，方法(1)的插值矩阵条件数  $Cond(A) = 1.8036 \times 10^{17}$ ；方法(2)的插值矩阵条件数  $Cond(A) = 1.7653 \times 10^{17}$ ；说明两种方法的插值稳定性相当。

#### 4.3.3. 方法的比较与改进

对上述数值实验的结果进行比较发现，对于要求稳定性的热传导等问题，应该优先选用常参数径向基函数的方法(1)。而对于要求精确性的飞机外形设计等问题，应该优先选用常参数径向基函数的方法(2)。变参

数径向基函数的两种方法都能保证插值误差波动较小,但插值精度都相对较低。从图 6、图 8 可以看出,导致这种结果的原因是,在区间端点附近,插值误差明显很大。据此,我们需要提高端点附近的插值精度。

拉格朗日法是常用的数据插值方法,其公式结构整齐紧凑,在不增加插值节点的情况下,有比较好的拟合效果。因此,我们用下述分段函数(4)作为插值函数,结合 Matlab 软件编程拟合  $f(x)$ 。得到插值曲线如图 10、图 11 所示。

$$\begin{cases} L_1(x) = \sum_{j=1}^{n_1} P_j(x) f_j & x \in [0, 0.2] \\ S(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(\|x - x_j\|) & x \in [0.2, 0.9] \\ L_2(x) = \sum_{j=1}^{n_2} P_j(x) f_j & x \in [0.9, 1] \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $P_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^r \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$  为拉格朗日基本多项式( $r$  为插值节点的个数,  $r_1 = 5, r_2 = 3$ )。

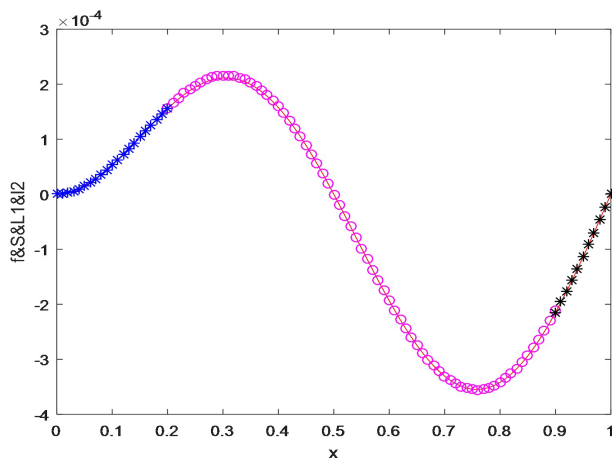


Figure 10. The improved method (1) interpolation effect map  
图 10. 改进后的方法(1)插值效果图

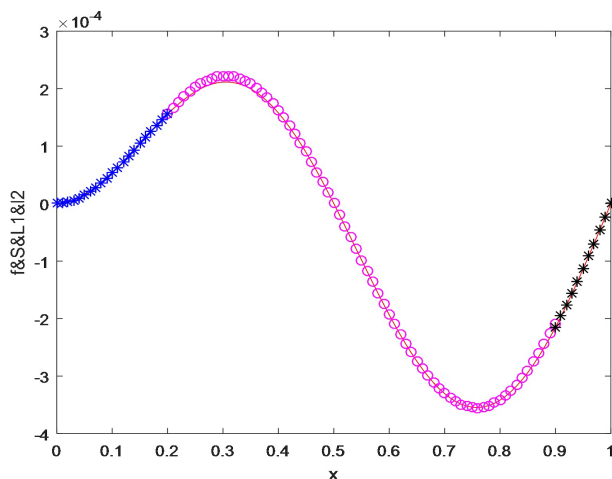


Figure 11. The improved method (2) interpolation effect map  
图 11. 改进后的方法(2)插值效果图

图 10、图 11 中, 插值曲线与原函数曲线基本吻合, 说明改进后的两种方法在整个区间  $x \in [0, 1]$  上都有很好的插值拟合效果。通过计算, 改进后的方法(1)的拟合优度  $R^2$  从 0.9299 变为 0.9915; 改进后的方法(2)的拟合优度  $R^2$  从 0.8165 变为 0.9803, 这比常参数径向基函数中方法(1)的拟合优度 0.9686 都高, 说明此改进方法可以有效提高插值精度。在实际工程问题中, 我们同样可以使用上述方式对散乱数据进行处理, 得到更好的插值拟合效果。

## 5. 结论

本文结合径向基函数插值误差理论, 对现有的形状参数的选取方法进行归纳总结, 并通过数值实验, 比较各方法的优缺点。针对变参数径向基函数区间端点附近插值精度不高的问题, 利用拉格朗日插值法进行改进, Matlab 软件的运行结果表明, 改进后的插值方法能够得到更高的精度。

## 基金项目

国家自然科学基金项目资助(11601151)。

## 参考文献

- [1] Frank, R. (1982) Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. *Mathematics of Computation*, **38**, 191-200. <https://doi.org/10.2307/2007474>
- [2] Stein, E.M. and Weiss, G. (1971) Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press, Princeton, 133-137.
- [3] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 91-116.
- [4] Rippa, S. (1999) An Algorithm for Selecting a Good Value for the Parameter  $c$  in Radial Basis Function Interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, **11**, 193-210. <https://doi.org/10.1023/A:1018975909870>
- [5] 牛瑞萍. 求解热传导正问题及反问题的数值方法研究[D]: [博士学位论文]. 太原: 太原理工大学, 2017: 57-80.
- [6] 聂鑫. 边值问题求解的径向基函数方法及其关键问题研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2014: 6-20.
- [7] Wei, Y.-X., X.L. and Chen, X.-Q. (2009) Collage of Aerospace and Materials Engineering National University of Defense Technology, Changsha, China. The Radial Basis Function Shape Parameter Chosen and Its Application in Engineering. *Proceedings of 2009 IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems (ICIS2009)*, Vol. 1, Beijing, 20-22 November 2009, 108-112.
- [8] 武泽平. 序列近似优化方法及其应用研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 2013: 14-31.
- [9] Hardy, R.L. (1971) Multiquadratic Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 1905-1915. <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01905>
- [10] 朱琪. 高次插值的龙格现象的测试[J]. 湖南科技学院学报, 2005, 26(11): 206-208.
- [11] 魏月兴, 陈小前, 许林. 基于优化形状参数法构造机翼结构响应面[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2010, 11(3): 16-20.
- [12] Roque, C.M.C. and Ferreira, A.J.M. (2010) Numerical Experiments on Optimal Shape Parameters for Radial Basis Functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **3**, 675-689. <https://doi.org/10.1002/num.20453>
- [13] 白鹏利, 王钧, 尹焕才, 殷建, 田晶晶, 陈名利, 高静. 基于偏最小二乘留一交叉验证法的近红外光谱建模样品选择方法的研究[J]. 食品安全质量检测学报, 2017, 8(1): 182-186.
- [14] 臧顺全. 热传导方程正问题和反问题的数值解研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安理工大学, 2019: 9-12.
- [15] Fasshauer, G.E. (2002) Newton Iteration with Multiquadratics for the Solution of Nonlinear PDEs. *Computers & Mathematics with Applications*, **43**, 423-438. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00296-6](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00296-6)
- [16] 齐静. 径向基函数插值若干问题研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2016: 10-15.
- [17] 陈风雷. 无网格 RBF 插值方法在偏微分方程计算中的应用[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江理工大学, 2016: 4-10.
- [18] Kansas, E.J. and Carlson, R.E. (1992) Improved Accuracy of Multiquadric Interpolation Using Variable Shape Parameters. *Computers and Mathematics with Applications*, **24**, 98-121. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(92\)90174-G](https://doi.org/10.1016/0898-1221(92)90174-G)

- [19] 周枫林. 热传导问题中的边界面法研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2013: 32-42.
- [20] Kitayama, S., Arakawa, M. and Yamazaki, K. (2011) Sequential Approximate Optimization Using Radial Basis Function Network for Engineering Optimization. *Optimization and Engineering*, **12**, 535-557.  
<https://doi.org/10.1007/s11081-010-9118-y>
- [21] 中国人民解放军国防科学技术大学. 一种高斯径向基函数形状参数的确定方法[P]. 中国专利, CN104408024A. 2015-03-11.