

求解流固振动Laplace模型的基于Rayleigh商移位反迭代的多网格方案

杜小虎, 闭海

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳
Email: dxh15870173580@163.com, bihaimath@gznu.edu.cn

收稿日期: 2021年5月24日; 录用日期: 2021年6月13日; 发布日期: 2021年6月25日

摘要

本文讨论流固振动Laplace模型, 首先建立该问题的基于Rayleigh商移位反迭代的多网格离散方案, 利用该方案将在细网格上求解特征值问题归结为在粗网格上解特征值问题和在细网格上解一系列线性代数系统。其次分析多网格离散方案的误差。最后给出数值算例验证离散方案的有效性。

关键词

流固振动模型, 有限元, 多网格方案, Rayleigh商迭代, 误差估计

Multiscale Discretization Scheme Based on the Rayleigh Quotient Inverse Iteration Method for the Laplace Model for Fluid-Solid Vibrations

Xiaohu Du, Hai Bi

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: dxh15870173580@163.com, bihaimath@gznu.edu.cn

Received: May 24th, 2021; accepted: Jun. 13th, 2021; published: Jun. 25th, 2021

Abstract

In this paper, for the Laplace model for fluid-solid vibrations we establish the multiscale discreti-

zation scheme based on the Rayleigh quotient inverse iteration method. With this scheme, the solution of an eigenvalue problem on fine meshes is reduced to the solution of the eigenvalue problem on coarse meshes and the solutions of linear algebraic systems. Then we analyze and give the error estimates of the proposed scheme. Finally we present numerical experiments to validate the efficiency of the scheme.

Keywords

Fluid-Structure, Finite Element, Multi-Scale Discretization, Rayleigh Quotient Inverse Iteration, Error Estimate

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1992 年许进超首次引入二网格离散技巧并用于求解非对称和非椭圆线性问题(参见文献[1] [2]), 2001 年许进超和周爱辉又将这一技巧应用到了特征值问题(参见文献[3])。由于二网格离散技巧能够显著提高近似解精度和计算效率, 节省计算机存贮, 因此二网格离散及在其基础上发展起来的多网格离散被广泛用于求解特征值问题, 如重调和特征值问题(参见[4]), 半线性特征值问题(参见[5]), 量子特征值问题(参见[6]), Stokes 特征值问题(参见[7] [8]), Maxwell 特征值问题(参见[9]), $2m$ 阶椭圆特征值问题(参见[10])等。在文献[1] [2]建立的二网格离散基础上还发展了基于移位反迭代的二网格、多网格离散以及多水平校正方案。基于移位反迭代的二网格离散、多网格离散可看作解矩阵特征值问题的移位反迭代法与有限元方法的结合(参见[11] [12] [13])。之后, 文献[14]对 Laplace 特征值问题研究了协调有限元基于移位反迭代的多网格方法; [15] [16]将该方法用于 Maxwell 特征值问题的棱元逼近; [17]将这一工作应用到 Stokes 特征值问题; [18]对 Steklov 特征值问题建立了协调有限元多网格方案; [19]进一步发展该工作, 对一般的自共轭特征值问题建立了基于多网格离散的移位反迭代, 并用于积分算子特征值问题; [20]对重调和特征值问题建立了基于移位反迭代的二网格、多网格方案; [21]对 Laplace 特征值问题提出了多水平校正方案。

流固振动 Laplace 模型问题源于一束浸没在不可压缩流体中的平行管的振动模型的计算, 在核工程中有着重要作用(参见文献[22] [23] [24])。近年来, 该问题的数值方法引起了学者们的研究兴趣, 如 Armentano 等[25]研究了该问题的 hp 协调有限元法及自适应算法, 给出了先验误差估计和后验误差估计; 张宇等[26]研究了非协调有限元特征值的可保证下界。在上述工作基础上, 本文研究流固振动 Laplace 模型的基于 Rayleigh 商移位反迭代的多网格离散方案。利用该方案可以将细网格上特征值问题的求解归结为在粗网格上解特征值问题和在细网格上解一系列线性代数组。理论分析表明, 当粗网格直径 H 和细网格直径 h 满足 $H = O(\sqrt[3]{h})$ 时, 多网格方案求得的近似特征值能达到渐进最优收敛阶。

本文剩余部分安排如下。在第 2 节, 我们给出本文所需的预备知识。在第 3 节, 我们建立基于 Rayleigh 商移位反迭代的多网格方案, 并对方案进行数值分析。在第 4 节给出一些数值实验验证方案的有效性。

文中我们用字母 C 表示与网格尺寸无关的正常数, 它在不同的地方表示的值可能不同。为方便起见, 用 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$ 。

2. 预备知识

在合理假设下, 流固振动 Laplace 模型可由下述系统描述, 其中每个管被模拟为谐波振荡器且硬度为 ν , 质量为 m , 流体视为完全不可压缩的且密度为 ρ : 求 $\omega > 0$ (振动频率), $u \neq 0$ (流体压力)使得

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\rho\omega^2}{\nu - m\omega^2} \left(\int_{\Gamma_i} u \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{n} & \text{在 } \Gamma_i \text{ 上, } i=1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是由流体占据的有界多边形区域, Γ_0 表示 Ω 的外边界, $\Gamma_i (i=1, \dots, K)$ 表示每个管与流体间的交界面, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ 是 Ω 边界上的单位外法向量(参见图 1)。

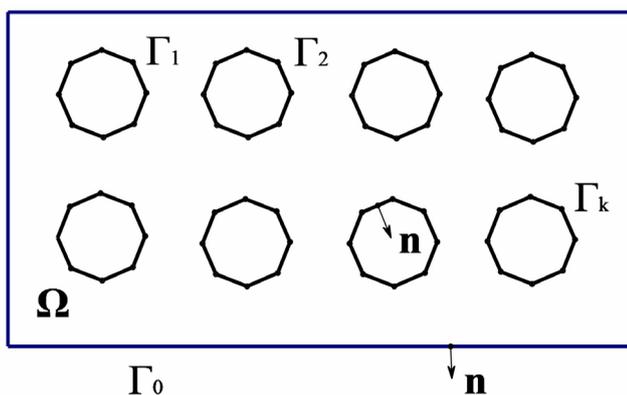


Figure 1. Sketch of the two-dimensional domain
图 1. 二维区域模型草图

令 $H^t(\Omega)$ 和 $H^t(\partial\Omega)$ 分别表示 Ω 和 $\partial\Omega$ 上 t 阶 Sobolev 空间, 其上范数分别记为 $|\cdot|_{t,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{t,\partial\Omega}$, $H^0(\partial\Omega) = L_2(\partial\Omega)$ 。令 $\lambda := \rho\omega^2 / (\nu - m\omega^2)$, $V := H^1(\Omega) / \mathbb{R}$ 。(2.1)的弱形式为: 求 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$ 满足

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \\ b(u, u) = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$, $b(u, v) := \sum_{i=1}^K \left(\int_{\Gamma_i} u \mathbf{n} \right) \cdot \left(\int_{\Gamma_i} v \mathbf{n} \right)$ 。

显然 $a(\cdot, \cdot)$ 是 V 上连续、对称、椭圆的双线性形式, $b(\cdot, \cdot)$ 是非负的。在 V 上 H^1 半范数 $|\cdot|_{1,\Omega} = \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ 等价于 H^1 范数 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\sqrt{b(\cdot, \cdot)}$ 可以作为 V 上的半范数。

由文献[25] [27]可知, (2.2)的解是由 $2K$ 个特征对 (λ_j, u_j) 给出的序列, 特征值 λ_j 均为正, 假定特征值按递增排序: $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{2K}$ 。每个特征值都对应一个特征函数 $u_j \in V$, 使得 $\{u_1, \dots, u_{2K}\}$ 是一个线性无关的集合。

令 π_h 是 Ω 的一族正规三角形剖分, h_T 为三角形 $T \in \pi_h$ 的直径, 网格直径 $h = \max_{T \in \pi_h} h_T$ 。令 $\varepsilon_h(\Gamma_i) = \{e\}$ 表示 π_h 中位于边界 Γ_i 上的所有边构成的集合, $\varepsilon_h(\Gamma) = \varepsilon_h(\Gamma_1) \cup \varepsilon_h(\Gamma_2) \cup \dots \cup \varepsilon_h(\Gamma_K)$ 。令 $S_h \subset H^1(\Omega)$ 是定义在 π_h 上的分片 p 次 ($p \geq 1$) 多项式空间, $V_h = S_h / \mathbb{R}$ 。注意到对任一 $v \in V + V_h$, 由柯西 - 施瓦茨不等式、迹定理和商空间等价模定理, 有

$$\begin{aligned}
b(v, v) &= \sum_{i=1}^K \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} \int_e v n \right) \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} \int_e v n \right) = \sum_{i=1}^K \left\{ \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} \int_e v n_1 \right)^2 + \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} \int_e v n_2 \right)^2 \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^K \left\{ \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} |n_1| \sqrt{|e|} \left(\int_e v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma_i)} |n_2| \sqrt{|e|} \left(\int_e v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\} \\
&\leq \max_{i=1, \dots, K} |\Gamma_i| \sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma)} \int_e v^2 = \max_{i=1, \dots, K} |\Gamma_i| \sum_{e \in \varepsilon_h(\Gamma)} \|v\|_{L^2(e)}^2 \\
&\leq C \|v\|_{1, \Omega}^2 \leq C |v|_{1, \Omega}^2,
\end{aligned}$$

因此 $\sqrt{b(\cdot, \cdot)} \lesssim |\cdot|_{1, \Omega}$ 。

相应于(2.2)的离散特征值问题为: 求 $\lambda_h \in \mathbb{R}$ 和 $u_h \in V_h$ 满足

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, u_h) = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

(2.3)归结为一个广义矩阵特征值问题。由文献[27]可知, 离散问题(2.3)具有 $2K$ 个正的特征值: $0 < \lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{2K,h}$, 每个特征值都对应一个特征函数 $u_j \in V$, 使得 $\{u_{1,h}, \dots, u_{2K,h}\}$ 是一个线性无关的集合。

相应于(2.2)和(2.3)的源问题和近似源问题分别如下:

求 $w \in V$, 使得

$$a(w, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V. \quad (2.4)$$

求 $w_h \in V_h$, 使得

$$a(w_h, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (2.5)$$

由 Neuman 问题的标准先验估计(参见文献[28])可知, 问题(2.4)的解 $w \in H^{1+r}(\Omega)$, 其中 $r < \frac{\pi}{\theta}$, θ 为 Ω 的最大凹角, 且有

$$\|w\|_{H^{1+r}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C |f|_{1, \Omega}. \quad (2.6)$$

故对所有的 $r < \frac{\pi}{\theta}$, (2.2)的特征函数也满足 $u \in H^{1+r}(\Omega)$ 。注意到对于至少有一个交界面 Γ_i 的多角形区域 Ω , 必有 $\theta > \pi$, 因此 $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{\theta} < 1$ 。

由 Lax-Milgram 定理可知, (2.4)和(2.5)分别有唯一解, 由此可定义下述有界线性算子 $T, T_h: V \rightarrow V$:

$$\begin{cases} f \in V \mapsto Tf \in V, \\ a(Tf, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V \\ \\ f \in V \mapsto T_h f \in V_h \subset V, \\ a(T_h f, v_h) = b(f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

对任意的 $w \in V$, 如下定义到 V_h 的 V 椭圆投影算子 P_h :

$$P_h w \in V_h : a(P_h w - w, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

于是, 对 $\forall f \in V$ 有

$$a(T_h f - P_h(Tf), v_h) = a(T_h f - Tf + Tf - P_h(Tf), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

故对 $\forall f \in V$, 有 $T_h f = P_h T f$, 从而 $T_h = P_h T$ 。

由插值误差估计和(2.6)可推出

$$\begin{aligned} |T_h - T|_{1,\Omega} &= \sup_{g \in V} \frac{|(T_h - T)g|_{1,\Omega}}{|g|_{1,\Omega}} = \sup_{g \in V} \frac{|P_h T g - T g|_{1,\Omega}}{|g|_{1,\Omega}} \\ &\lesssim \sup_{g \in V} \frac{h^r |T g|_{1+r,\Omega}}{|g|_{1,\Omega}} \lesssim \sup_{g \in V} \frac{h^r |g|_{1,\Omega}}{|g|_{1,\Omega}} = h^r \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

从而得到下述引理。

引理 2.1 $|T - T_h|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$ 。

参考文献[25]我们有以下协调有限元逼近的误差估计。

引理 2.2 对于任意 $r < \frac{\pi}{\theta}$, 存在正常数 κ , 使得若 $h < \kappa$, 则有

$$|u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega} \lesssim h^r, \tag{2.7}$$

$$b(u_j - u_{j,h}, u_j - u_{j,h})^{\frac{1}{2}} \lesssim h^r |u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega}, \tag{2.8}$$

$$|\lambda_j - \lambda_{j,h}| \lesssim |u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega}^2. \tag{2.9}$$

由文献[29] [30]可知, (2.2)和(2.3)分别有如下等价的算子形式:

$$Tu = \mu u,$$

$$T_h u_h = \mu_h u_h,$$

其中 $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\mu_h = \frac{1}{\lambda_h}$ 。在本文中 μ 和 μ_h , λ 和 λ_h 都被称作特征值。

设 μ_k 的代数重数为 q , $\mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_{k+q-1}$ 。令 $M(\mu_k)$ 是 T 的所有对应于 μ_k 的特征函数张成的空间, $M_h(\mu_k)$ 是 T_h 的所有收敛到 μ_k 的特征值的特征空间的直和。令 $\hat{M}(\mu_k) = \{v : v \in M(\mu_k), |v|_{1,\Omega} = 1\}$, $\hat{M}_h(\mu_k) = \{v : v \in M_h(\mu_k), |v|_{1,\Omega} = 1\}$ 。我们也记 $M(\lambda_k) = M(\mu_k)$, $M_h(\lambda_k) = M_h(\mu_k)$, $\hat{M}(\lambda_k) = \hat{M}(\mu_k)$, $\hat{M}_h(\lambda_k) = \hat{M}_h(\mu_k)$ 。

记

$$\delta_h(\lambda_k) = \sup_{w \in \hat{M}(\lambda_k)} \inf_{v \in \hat{M}_h(\lambda_k)} |w - v|_{1,\Omega}.$$

由(2.7)可知 $\delta_h(\lambda_k) \lesssim h^r$ 。

引理 2.3 令 λ_k 和 $\lambda_{k,h}$ 分别是(2.2)和(2.3)的第 k 个特征值, 则

$$|\lambda_{k,h} - \lambda_k| \lesssim \delta_h^2(\lambda_k), \tag{2.10}$$

对任意相应于 $\lambda_{k,h}$ 的特征函数 $u_{k,h}$ 且 $|u_{k,h}|_{1,\Omega} = 1$, 存在 $u_k \in \hat{M}(\lambda_k)$ 使得

$$|u_{k,h} - u_k|_{1,\Omega} \lesssim \delta_h(\lambda_k), \tag{2.11}$$

对任意 $u_k \in \hat{M}(\lambda_k)$, 存在 $u_h \in M_h(\lambda_k)$ 使得

$$\|u_h - u_k\|_{1,\Omega} \lesssim \delta_h(\lambda_k). \quad (2.12)$$

引理 2.4 令 (λ, u) 是(2.2)的特征对, 则对任意的 $w \in V$, $b(w, w) \neq 0$, Rayleigh 商 $\frac{a(w, w)}{b(w, w)}$ 满足

$$\frac{a(w, w)}{b(w, w)} - \lambda = \frac{|w - u|_{1,\Omega}}{b(w, w)} - \lambda \frac{b(w - u, w - u)}{b(w, w)}. \quad (2.13)$$

证明: 详见文献[30]中引理 9.1。

下面的引理(参见文献[13]中定理 3.2)是分析多网格离散方案的基本工具。

引理 2.5 令 (μ_0, u_0) 是 T_h 的一个近似特征对, $u_0 \in V_h$ 且 $|u_0|_{1,\Omega} = 1$ 。假设 $\max_{k \leq j \leq k+q+1} \left| \frac{\mu_{j,h} - \mu_{k,h}}{\mu_0 - \mu_{k,h}} \right| \leq 1/2$, $dist(u_0, M_h(\mu_k)) \leq 1/2$, $|\mu_0 - \mu_{j,h}| \geq \mathcal{G}/2$ ($j \neq k, k+1, \dots, k+q-1$), $u \in V_h$ 与 $u_k^h \in V_h$ 满足

$$(\mu_0 - T_h)u = u_0, u_k^h = \frac{u}{|u|_{1,\Omega}},$$

则

$$dist(u_k^h, \hat{M}_h(\mu_k)) \leq \frac{16}{\mathcal{G}} |\mu_0 - \mu_{k,h}| dist(u_0, M_h(\mu_k)), \quad (2.14)$$

其中 $\mathcal{G} = \min_{\mu_j \neq \mu_k} |\mu_j - \mu_k|$ 是特征值 μ_k 的分隔常数。

3. 多网格方案

本节中, 我们结合有限元方法和 Rayleigh 商移位反迭代法建立流固振动 Laplace 模型问题的多网格离散方案。令 $\{\pi_{h_i}\}_{i=1}^l$ 是一族正规网格, $h_{i-1} \gg h_i$, 且令 V_{h_i} 是定义在 π_{h_i} 上的协调有限元空间, 令 $\pi_H = \pi_{h_1}$, $V_H = V_{h_1}$, $\pi_h = \pi_{h_l}$, $V_h = V_{h_l}$ 。

方案 1 多网格方案

步骤 1 在初始粗网格 π_H 上解(2.3): 求 $\lambda_{k,H} \in \mathbb{R}$, $u_{k,H} \in V_H$ 使得 $|u_{k,H}|_{1,\Omega} = 1$, 且

$$a(u_{k,H}, v) = \lambda_{k,H} b(u_{k,H}, v), \quad \forall v \in V_H.$$

步骤 2 执行赋值命令: $u_k^{h_i} \leftarrow u_{k,H}$, $\lambda_k^{h_i} \leftarrow \lambda_{k,H}$, $i \leftarrow 2$ 。

步骤 3 在 π_{h_i} 上解线性方程组: 求 $\tilde{u} \in V_{h_i}$ 使得

$$a(\tilde{u}, v) - \lambda_k^{h_{i-1}} b(\tilde{u}, v) = b(u_k^{h_{i-1}}, v), \quad \forall v \in V_{h_i},$$

且取 $u_k^{h_i} = \tilde{u}/|\tilde{u}|_{1,\Omega}$ 。

步骤 4 计算 Rayleigh 商

$$\lambda_k^{h_i} = \frac{a(u_k^{h_i}, u_k^{h_i})}{b(u_k^{h_i}, u_k^{h_i})}.$$

步骤 5 如果 $i = l$, 则输出 $(\lambda_k^{h_l}, u_k^{h_l})$, 即输出 (λ_k^h, u_k^h) , 停止。否则, $i \leftarrow i+1$, 返回步骤 3。

下面分析由方案 1 求得的近似解的误差。

定理 3.1. 令 $(\lambda_k^{h_l}, u_k^{h_l})$ 是方案 1 所求得近似特征对。假设 $(\lambda_k^{h_{l-1}}, u_k^{h_{l-1}})$ 逼近(2.2)的一个特征对 (λ_k, \bar{u}) , $\bar{u} \in \hat{M}(\lambda_k)$, 且 $\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k$ 相较于 $\lambda_{k,h_l} - \lambda_k$ 是一个低阶的无穷小量, 则存在 $u_k \in M(\lambda_k)$ 使得

$$|u_k^{h_l} - u_k|_{1,\Omega} \lesssim \frac{48}{9} \lambda_k |\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k| \text{dist}(u_k^{h_{l-1}}, \hat{M}(\lambda_k)) + 3q\delta_{h_l}(\lambda_k), \tag{3.1}$$

$$|\lambda_k^{h_l} - \lambda_k| \lesssim 2\lambda_k(1 + \lambda_k) |u_k^{h_l} - u_k|_{1,\Omega}^2, \quad l \geq 2. \tag{3.2}$$

证明: 我们利用引理 2.5 来完成证明。首先验证引理 2.5 的条件是满足的。

选取 $\mu_0 = 1/\lambda_k^{h_{l-1}}$, $u_0 = \frac{\lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}}}{|\lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}}|_{1,\Omega}}$ 。由引理 2.1 可知 $|T_{h_l} - T|_{1,\Omega} \rightarrow 0 (h_l \rightarrow 0)$, 则有

$$|T_{h_l} f|_{1,\Omega} \lesssim |f|_{1,\Omega}, \quad \forall f \in V.$$

因此, 由定理假设可推出

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}} - \bar{u} \right|_{1,\Omega} \\ &= \left| \lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}} - \lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} \bar{u} + \lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} \bar{u} - \lambda_k T_{h_l} \bar{u} + \lambda_k T_{h_l} \bar{u} - \lambda_k T \bar{u} \right|_{1,\Omega} \\ &\lesssim \lambda_k^{h_{l-1}} |u_k^{h_{l-1}} - \bar{u}|_{1,\Omega} + |\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k| |\bar{u}|_{1,\Omega} + \lambda_k |(T_{h_l} - T)\bar{u}|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

注意到对任一赋范空间中的任意非零函数 u, v , 成立下述不等式

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq 2 \frac{\|u-v\|}{\|u\|}, \quad \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq 2 \frac{\|u-v\|}{\|v\|}. \tag{3.3}$$

因此有

$$\begin{aligned} \text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) &\leq |u_0 - \bar{u}|_{1,\Omega} \leq 2 \left| \lambda_k^{h_{l-1}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}} - \bar{u} \right|_{1,\Omega} \\ &\lesssim 2 \left\{ \lambda_k^{h_{l-1}} |u_k^{h_{l-1}} - \bar{u}|_{1,\Omega} + |\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k| |\bar{u}|_{1,\Omega} + \lambda_k |(T_{h_l} - T)\bar{u}|_{1,\Omega} \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

由三角不等式和(2.12)可得

$$\text{dist}(u_0, M_{h_l}(\lambda_k)) \lesssim \text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) + \delta_{h_l}(\lambda_k). \tag{3.5}$$

由(2.10)可知 $\lambda_{k,h_l} \rightarrow \lambda_k (h_l \rightarrow 0)$, 于是由定理假设有

$$|\mu_0 - \mu_{k,h_l}| = \left| \frac{\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k + \lambda_k - \lambda_{k,h_l}}{\lambda_{k,h_l} \lambda_k^{h_l}} \right| = O(|\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k|). \tag{3.6}$$

由(2.5)可知方案 1 中的步骤 3 等价于

$$a(\tilde{u}, v) - \lambda_k^{h_{l-1}} a(T_{h_l} \tilde{u}, v) = a(T_{h_l} u_k^{h_{l-1}}, v), \quad \forall v \in V_{h_l}, \quad u_k^{h_l} = \frac{\tilde{u}}{|\tilde{u}|_{1,\Omega}},$$

即

$$\left(\frac{1}{\lambda_k^{h_{l-1}}} - T_{h_l} \right) \tilde{u} = \frac{1}{\lambda_k^{h_{l-1}}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}}, \quad u_k^{h_l} = \frac{\tilde{u}}{|\tilde{u}|_{1,\Omega}}. \tag{3.7}$$

注意到 $\frac{1}{\lambda_k^{h_{l-1}}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}} = \left| \frac{1}{\lambda_k^{h_{l-1}}} T_{h_l} u_k^{h_{l-1}} \right|_{1,\Omega}$ u_0 与 u_0 仅仅相差一个常数倍, 从而方案 1 步骤 3 等价于

$$\left(\frac{1}{\lambda_k^{h_{l-1}}} - T_{h_l} \right) \tilde{u} = u_0, \quad u_k^{h_l} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_{1,\Omega}}. \quad (3.8)$$

事实上, 由(3.7), (3.8)求得的 $u_k^{h_l}$ 显然是相等的. 当 h_{l-1} 足够小时, 注意到 $h_l \ll h_{l-1}$, 由(3.4)和(3.5)得

$$\text{dist}(u_0, M_{h_l}(\lambda_k)) \leq \frac{1}{2}.$$

因为 $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+q-1}$, 故有

$$\left| \mu_{j,h_l} - \mu_{k,h_l} \right| = \left| \frac{\lambda_{k,h_l} - \lambda_{j,h_l}}{\lambda_{k,h_l} \lambda_{j,h_l}} \right| = \left| \frac{\lambda_{k,h_l} - \lambda_k + \lambda_j - \lambda_{j,h_l}}{\lambda_{k,h_l} \lambda_{j,h_l}} \right|, \quad (3.9)$$

且由(2.10)可得

$$\lambda_{j,h_l} - \lambda_k \lesssim \delta_{h_l}^2(\lambda_k) \quad (j = k, k+1, \dots, k+q-1).$$

结合(3.9)和(3.6), 且注意到(3.9)的右端项相较于 $\lambda_k^{h_l} - \lambda_k$ 是高阶无穷小量, 于是

$$\max_{k \leq j \leq k+q-1} \left| \frac{\mu_{j,h_l} - \mu_{k,h_l}}{\mu_0 - \mu_{j,h_l}} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

因为 ϑ 是分隔常数, h_{l-1} 足够小, 且 $h_l \ll h_{l-1}$, 故成立

$$\left| \mu_0 - \mu_{j,h_l} \right| \geq \frac{\vartheta}{2}, \quad j \neq k, k+1, \dots, k+q-1.$$

综上所述, 可知引理 2.5 的条件是成立的.

下面证明(3.1)和(3.2)成立.

将(3.5)和(3.6)代入(2.14), 得到

$$\text{dist}(u_k^{h_l}, \hat{M}_{h_l}(\mu_k)) \lesssim \frac{16}{\vartheta} |\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k| \left(\text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) + \delta_{h_l}(\lambda_k) \right). \quad (3.10)$$

令特征向量 $\{u_{j,h_l}\}_{j=k}^{k+q-1}$ 是 $M_{h_l}(\lambda_k)$ 的在内积 $a(\cdot, \cdot)$ 意义下的一组正交基, 并注意到

$$\text{dist}(u_k^{h_l}, M_{h_l}(\lambda_k)) = \left| u_k^{h_l} - \sum_{j=k}^{k+q-1} a(u_k^{h_l}, u_{j,h_l}) u_{j,h_l} \right|_{1,\Omega}.$$

令

$$u^* = \sum_{j=k}^{k+q-1} a(u_k^{h_l}, u_{j,h_l}) u_{j,h_l},$$

则由(3.10)可推得

$$\left| u_k^{h_l} - u^* \right|_{1,\Omega} \lesssim \frac{16}{\vartheta} |\lambda_k^{h_{l-1}} - \lambda_k| \left(\text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) + \delta_{h_l}(\lambda_k) \right). \quad (3.11)$$

由引理 2.3 知, 存在 $\{u_j^0\}_{j=k}^{k+q-1} \subset \hat{M}(\lambda_k)$ 使得 $u_{j,h_l} - u_j^0$ 满足(2.11). 令

$$u_k = \sum_{j=k}^{k+q-1} a(u_k^{h_j}, u_{j,h_j}) u_j^0,$$

则 $u_k \in M(\lambda_k)$ 。由(2.11)可推得

$$\begin{aligned} \|u^* - u_k\|_{1,\Omega} &= \left\| \sum_{j=k}^{k+q-1} a(u_k^{h_j}, u_{j,h_j})(u_{j,h_j} - u_j^0) \right\|_{1,\Omega} \lesssim \left(\sum_{j=k}^{k+q-1} \|u_{j,h_j} - u_j^0\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \sum_{j=k}^{k+q-1} \delta_{h_j}(\lambda_j) \lesssim q\delta_{h_j}(\lambda_k). \end{aligned}$$

结合(3.11)与上述不等式可得

$$\begin{aligned} \|u_k^{h_j} - u_k\|_{1,\Omega} &\leq \|u_k^{h_j} - u^*\|_{1,\Omega} + \|u^* - u_k\|_{1,\Omega} \\ &\lesssim \frac{16}{9} |\lambda_k^{h_j-1} - \lambda_k| \left(\text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) + \delta_{h_j}(\lambda_k) \right) + q\delta_{h_j}(\lambda_k) \\ &\lesssim \frac{16}{9} |\lambda_k^{h_j-1} - \lambda_k| \text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) + 2q\delta_{h_j}(\lambda_k). \end{aligned} \tag{3.12}$$

显然存在 $u'_k \in \hat{M}(\lambda_k)$ 使得

$$\begin{aligned} \|u_k^{h_j-1} - u'_k\|_{1,\Omega} &= \text{dist}(u_k^{h_j-1}, \hat{M}(\lambda_k)), \\ \lambda_k T u'_k &= u'_k \in \hat{M}(\lambda_k), \text{ 以及 } \|(T_{h_j} - T)u'_k\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\lambda_k} \delta_{h_j}(\lambda_k). \end{aligned}$$

因为 $u_0 = \lambda_k^{h_j-1} T_{h_j} u_k^{h_j-1} / \|\lambda_k^{h_j-1} T_{h_j} u_k^{h_j-1}\|_{1,\Omega}$, 故由(2.13)和(3.3)推出

$$\begin{aligned} \text{dist}(u_0, \hat{M}(\lambda_k)) &\lesssim 2 \text{dist}(\lambda_k^{h_j-1} T_{h_j} u_k^{h_j-1}, \hat{M}(\lambda_k)) \leq 2 \|\lambda_k^{h_j-1} T_{h_j} u_k^{h_j-1} - \lambda_k T u'_k\|_{1,\Omega} \\ &\leq 2 \left(\|\lambda_k^{h_j-1} - \lambda_k\| T_{h_j} u_k^{h_j-1} \right)_{1,\Omega} + 2 \|\lambda_k T_{h_j} (u_k^{h_j-1} - u'_k)\|_{1,\Omega} + 2 \|\lambda_k (T_{h_j} - T)u'_k\|_{1,\Omega} \\ &\lesssim 2 \|\lambda_k^{h_j-1} - \lambda_k\| + 2\lambda_k \text{dist}(u_k^{h_j-1}, \hat{M}(\lambda_k)) + 2\delta_{h_j}(\lambda_k) \\ &\lesssim 3\lambda_k \text{dist}(u_k^{h_j-1}, \hat{M}(\lambda_k)) + 2\delta_{h_j}(\lambda_k). \end{aligned} \tag{3.13}$$

将(3.13)代入(3.12), 便得到(3.1)。

仍记 $\frac{u_k}{\|u_k\|_{1,\Omega}}$ 为 u_k , 则联系(3.1)与(3.3)可知 $u_k^{h_j}$ 在 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 意义下收敛到 u_k 。由于 $\sqrt{b(\cdot, \cdot)} \lesssim \|\cdot\|_{1,\Omega}$, 故

$$b(u_k^{h_j} - u_k, u_k^{h_j} - u_k) \rightarrow 0, \text{ 于是 } \frac{1}{b(u_k^{h_j}, u_k^{h_j})} \rightarrow \frac{1}{b(u_k, u_k)} = \lambda_k. \text{ 因此, 当 } h_j \text{ 足够小时, 成立 } \frac{1}{b(u_k^{h_j}, u_k^{h_j})} \leq 2\lambda_k.$$

在(2.13)中取 $w = u_k^{h_j}$, 得到

$$\begin{aligned} |\lambda_k^{h_j} - \lambda_k| &\leq \frac{\|u_k^{h_j} - u_k\|_{1,\Omega}^2}{b(u_k^{h_j}, u_k^{h_j})} + \lambda_k \frac{b(u_k^{h_j} - u_k, u_k^{h_j} - u_k)}{b(u_k^{h_j}, u_k^{h_j})} \\ &\leq 2\lambda_k \|u_k^{h_j} - u_k\|_{1,\Omega}^2 + 2\lambda_k^2 b(u_k^{h_j} - u_k, u_k^{h_j} - u_k) \\ &\lesssim 2\lambda_k (1 + \lambda_k) \|u_k^{h_j} - u_k\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

证毕。

在方案 1 中取 $l=2$, 并记 $H = h_1$, $h = h_2$, 我们立即得到下面的二网格方案。

方案 2 二网格方案

步骤 1 在 π_H 上解(2.3): 求 $\lambda_{k,H} \in \mathbb{R}$, $u_{k,H} \in V_H$ 使得 $|u_{k,H}|_{1,\Omega} = 1$, 且

$$a(u_{k,H}, v) = \lambda_{k,H} b(u_{k,H}, v), \quad \forall v \in V_H.$$

步骤 2 在 π_h 上解线性方程组: 求 $\tilde{u} \in V_h$ 使得

$$a(\tilde{u}, v) - \lambda_{k,H} b(\tilde{u}, v) = b(u_{k,H}, v), \quad \forall v \in V_h,$$

且取 $u_k^h = \tilde{u}/|\tilde{u}|_{1,\Omega}$ 。

步骤 3 计算 Rayleigh 商

$$\lambda_k^h = \frac{a(u_k^h, u_k^h)}{b(u_k^h, u_k^h)}.$$

由定理 3.1 可以得到二网格离散方案的误差估计如下:

$$|u_k^h - u_k|_{1,\Omega} \lesssim \frac{48}{9} \lambda_k |\lambda_{k,H} - \lambda_k| \text{dist}(u_{k,H}, \hat{M}(\lambda_k)) + 3q\delta_h(\lambda_k),$$

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \lesssim 2\lambda_k (1 + \lambda_k) |u_k^h - u_k|_{1,\Omega}^2.$$

注意到

$$|\lambda_{k,H} - \lambda_k| \lesssim \delta_H^2(\lambda_k) \lesssim H^{2r},$$

$$\text{dist}(u_{k,H}, \hat{M}(\lambda_k)) \lesssim \delta_H(\lambda_k) \lesssim H^r,$$

因此

$$|u_k^h - u_k|_{1,\Omega} \lesssim H^{3r} + h^r, \quad (3.14)$$

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \lesssim H^{6r} + h^{2r}. \quad (3.15)$$

(3.15)表明, 当 $H = O(\sqrt[3]{h})$ 时, 由方案 2 求得的近似特征值可以达到渐进最优收敛阶。

4. 数值实验

本节将呈现一些数值算例来展示本文建立的多网格离散方案的有效性。数值实验是在具有 1.8 GHz CPU 和 4 G RAM 的 DellInspiron 5547 PC 上, 在 MATLAB 2015a 环境中借助软件包 IFEM (参见文献[31]) 进行编程计算的。我们利用方案 2, 采取线性协调元完成数值算例, 在实验表格中采用下述符号:

H : 粗网格 π_H 的直径。

h : 细网格 π_h 的直径。

$\lambda_{j,H}$: 在网格 π_H 上利用 `eigs` 命令直接求解得到的(2.3)第 j 个特征值。

λ_j^h : 利用方案 2 求得的第 j 个特征值。

$time_h$ (秒): 直接在细网格 π_h 上求解特征值问题所用的 cpu 时间。

$time^h$ (秒): 用方案 2 计算, 从程序开始运行至当前结果出现的 cpu 时间。

—: 表示由于计算机内存限制无法计算。

算例 1. 在一个边长为 8 的四边形方形腔, 其中心有一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的菱形管的区域上考虑问题(2.1),

如图 2(左) 所示。计算结果列在表 1 中, 同时还列出了直接求解特征值问题所得的结果。

文献[25]中给出了问题(2.1)在此区域上最小特征值的参考值: $\lambda_1 \approx 0.07896$, 且其代数重数为 2。由表 1 可以看到, 与直接在细网格上求解相比较, 利用方案 2 可以用较少的时间求得精度较高的近似特征值。

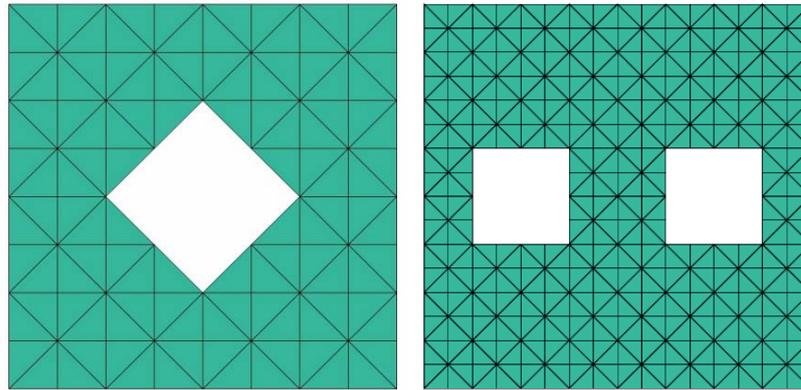


Figure 2. Square cavity with a rhomboidal tube (left) and Square cavity with two square tubes (right)

图 2. 内部有一个菱形管的方形腔(左), 内部有两个方形管的方形腔(右)

Table 1. The approximate eigenvalue on the square cavity with a rhomboidal tube

表 1. 内部有一个菱形管的方形腔上的近似特征值

j	H	h	$\lambda_{j,H}$	λ_j^h	$\lambda_{j,h}$	$time_h$	$time^h$
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0.08668015	0.08009836	0.08009836	0.21	0.06
1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	0.08188310	0.07940823	0.07940823	0.85	0.33
1	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	0.08009836	0.07903030	0.07903030	58.22	6.34
1	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	0.07940823	0.07898792	-	-	30.53

算例 2 在一个边长为 8 的四边形方形腔, 其内部有两个边长为 2 的方形管的区域上考虑问题(2.1), 如图 2(右)所示。计算结果列在表 2 中, 同时还列出了直接求解特征值问题所得的结果。由表 2 可以看到, 利用方案 2 可以用较少时间求得与直接在细网格上计算所得特征值精度相同的近似解, 而且直接计算无法进行时, 利用方案 2 仍然可以计算。

Table 2. The approximate eigenvalues on the square cavity with two square tubes

表 2. 内部有两个方形管的方形腔上的近似特征值

j	H	h	$\lambda_{j,H}$	λ_j^h	$\lambda_{j,h}$	$time_h$	$time^h$
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0.14298801	0.12832004	0.12776864	0.07	0.16
1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	0.13197681	0.12612606	0.12612138	0.84	0.54

Continued

1	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	0.12776864	0.12521869	-	-	11.58
1	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	0.12612138	0.12510908	-	-	66.79
2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0.17936173	0.16156094	0.15877833	0.07	0.16
2	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	0.16438533	0.15663434	0.15659095	0.84	0.54
2	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	0.15877833	0.15538310	-	-	11.58
2	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	0.15659095	0.15524410	-	-	66.79
3	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0.20838115	0.18538663	0.18547966	0.07	0.16
3	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	0.19168744	0.18306016	0.18307161	0.84	0.54
3	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	0.18547966	0.18174299	-	-	11.58
3	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	0.18307161	0.18159674	-	-	66.79
4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0.23836023	0.21230325	0.21251320	0.07	0.16
4	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	0.21949337	0.20980392	0.20981238	0.84	0.54
4	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	0.21251320	0.20832276	-	-	11.58
4	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	0.20981238	0.20816052	-	-	66.79

基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 11761022)。

参考文献

- [1] Xu, J. (1992) A New Class of Iterative Methods for Nonselfadjoint or Indefinite Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**, 303-319. <https://doi.org/10.1137/0729020>
- [2] Xu, J. (1996) Two-Grid Discretization Techniques for Linear and Nonlinear PDEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**, 1759-1777. <https://doi.org/10.1137/S0036142992232949>
- [3] Xu, J. and Zhou, A. (2001) Two-Grid Discretization Scheme for Eigenvalue Problems. *Mathematics of Computation*, **70**, 17-25. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01180-1>
- [4] Racheva, M.R. and Andreev, A.B. (2002) Super Convergence Postprocessing for Eigenvalues. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **2**, 171-185. <https://doi.org/10.2478/cmam-2002-0011>
- [5] Chien, C.S. and Jeng, B.W. (2006) A Two-Grid Discretization Scheme for Semilinear Elliptic Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **27**, 1287-1304. <https://doi.org/10.1137/030602447>
- [6] Dai, X. and Zhou, A. (2008) Three-Scale Finite Element Discretizations for Quantum Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **46**, 295-324. <https://doi.org/10.1137/06067780X>

- [7] Chen, H., Jia, S. and Xie, H. (2009) Postprocessing and Higher Order Convergence for the Mixed Finite Element Approximations of the Stokes Eigenvalue Problems. *Applications of Mathematics*, **54**, 237-250. <https://doi.org/10.1007/s10492-009-0015-7>
- [8] Xie, H. and Yin, X. (2015) Acceleration of Stabilized Finite Element Discretizations for the Stokes Eigenvalue Problem. *Advances in Computational Mathematics*, **41**, 799-812. <https://doi.org/10.1007/s10444-014-9386-8>
- [9] Chen, J., Xu, Y. and Zou, J. (2010) An Adaptive Inverse Iteration for Maxwell Eigenvalue Problem Based on Edge Elements. *Journal of Computational Physics*, **229**, 2649-2658. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.12.013>
- [10] Andreev, A., Lazarov, R. and Racheva, M. (2005) Postprocessing and Higher Order Convergence of the Mixed Finite Element Approximations of Biharmonic Eigenvalue Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **182**, 333-349. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.12.015>
- [11] Hu, X. and Cheng, X. (2011) Acceleration of a Two-Grid Method for Eigenvalue Problems. *Mathematics of Computation*, **80**, 1287-1301. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2011-02458-0>
- [12] Hu, X. and Cheng, X. (2015) Corrigendum to: Acceleration of a Two-Grid Method for Eigenvalue Problems. *Mathematics of Computation*, **84**, 2701-2704. <https://doi.org/10.1090/mcom/2967>
- [13] Yang, Y. and Bi, H. (2011) Two-Grid Finite Element Discretization Scheme Based on Shifted-Inverse Power Method for Elliptic Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **49**, 1602-1624. <https://doi.org/10.1137/100810241>
- [14] Chen, H., He, Y., Li, Y. and Xie, H. (2015) A Multigrid Method for Eigenvalue Problems Based on Shifted-Inverse Power Technique. *European Journal of Mathematics*, **1**, 207-228. <https://doi.org/10.1007/s40879-014-0034-0>
- [15] Zhou, J., Hu, X., Shu, S., Zhong, L. and Chen, L. (2014) Two-Grid Methods for Maxwell Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **52**, 2027-2047. <https://doi.org/10.1137/130919921>
- [16] Liu, J., Jiang, W., Lin, F., Liu, N. and Liu, Q. (2017) A Two-Grid Vector Discretization Scheme for the Resonant Cavity Problem with Anisotropic Media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **65**, 2719-2725. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2017.2672545>
- [17] Han, J., Zhang, Z. and Yang, Y. (2015) A New Adaptive Mixed Finite Element Method Based on Residual Type a Posterior Error Estimates for the Stokes Eigenvalue Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **31**, 31-53. <https://doi.org/10.1002/num.21891>
- [18] Bi, H. and Yang, Y. (2012) Multiscale Discretization Scheme Based on the Rayleigh Quotient Iterative Method for the Steklov Eigenvalue Problem. *Mathematical Problems in Engineering*, **2012**, Article ID: 487207. <https://doi.org/10.1155/2012/487207>
- [19] Yang, Y., Bi, H., Han, J. and Yu, Y. (2015) The Shifted-Inverse Iteration Based on the Multigrid Discretizations for Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A2583-A2606. <https://doi.org/10.1137/140992011>
- [20] Zhang, Y., Bi, H. and Yang, Y. (2019) The Two-Grid Discretization of Ciarlet-Raviart Mixed Method for Biharmonic Eigenvalue Problems. *Applied Numerical Mathematics*, **138**, 94-113. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.12.007>
- [21] Lin, Q. and Xie, H. (2015) A Multi-Level Correction Scheme for Eigenvalue Problems. *Mathematics of Computation*, **84**, 71-88. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02825-1>
- [22] Conca, C., Osses, A. and Planchard, J. (1998) Asymptotic Analysis Relating Spectral Models in Fluid-Solid Vibrations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**, 1020-1048. <https://doi.org/10.1137/S0036142996304802>
- [23] Planchard, J. (1983) Eigen Frequencies of a Tube Bundle Placed in a Confined Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **30**, 75-93. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90055-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90055-X)
- [24] Planchard, J. and Ibnou-Zahir, M. (1983) Natural Frequencies of Tube Bundle in an Incompressible Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, 47-68. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(83\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(83)90052-X)
- [25] Armentano, M.G., Padra, C., Rodríguez, R. and Scheble, M. (2011) An hp Finite Element Adaptive Scheme to Solve the Laplace Model for Fluid-Solid Vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**, 178-188. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.08.003>
- [26] Zhang, Y. and Yang, Y. (2021) Guaranteed Lower Eigenvalue Bounds for Two Spectral Problems Arising in Fluid Mechanics. *Computers & Mathematics with Applications*, **90**, 66-72. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.005>
- [27] Conca, C., Planchard, J. and Vanninathan, M. (1995) Fluid and Periodic Structures. Masson, Paris.
- [28] Grisvard, P. (1985) Elliptic Problems in Nonsmooth Domain. Pitman, Boston.
- [29] Bramble, J.H. and Osborn, J.E. (1972) Approximation of Steklov Eigenvalues of Non-Selfadjoint Second Order Elliptic Operators. Academic, New York, 387-408. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-068650-6.50019-8>
- [30] Babuška, I. and Osborn, J. (1991) Eigenvalue Problems. In: Ciarlet, P.G. and Lions, J.L., Eds., *Finite Element Methods (Part 1)*, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 2, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 641-787.

[https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80042-0](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80042-0)

- [31] Chen, L. (2009) iFEM: An Integrated Finite Element Method Package in MATLAB. Technical Report, University of California at Irvine, Irvine.