Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(1), 352-360**
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.121038

Hans汉斯

调和Fock空间上Toeplitz算子、Hankel算子和对偶Toeplitz算子间的乘积的有界性

阚晶晶

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年12月28日；录用日期：2023年1月24日；发布日期：2023年1月31日

摘 要

本文主要刻画调和Fock空间上两个Toeplitz算子的乘积 $T_f T_{\bar{g}}$，Hankel算子与Toeplitz算子的乘积 $H_{\bar{f}} T_{\bar{g}}$ 和对偶Toeplitz算子与Hankel算子的乘积 $S_g H_{\bar{f}}$ 的有界性。

关键词

调和Fock空间，Toeplitz算子，Hankel算子，对偶Toeplitz算子，乘积，有界性

Boundedness of the Products of Toeplitz Operators, Hankel Operators and Dual Toeplitz Operators on the Harmonic Fock Space

Jingjing Kan

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 24th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

In this paper, we mainly characterize the boundedness of the product $T_f T_{\bar{g}}$ of two Toeplitz operators, the product $H_{\bar{f}} T_{\bar{g}}$ of Hankel operator and Toeplitz operator, and the product $S_g H_{\bar{f}}$ of

文章引用: 阚晶晶. 调和 Fock 空间上 Toeplitz 算子、Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子间的乘积的有界性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(1): 352-360. DOI: 10.12677/aam.2023.121038

dual Toeplitz operator and Hankel operator on harmonic Fock space.

Keywords

Harmonic Fock Space, Toeplitz Operators, Hankel Operators, Dual Toeplitz Operators, Product, Boundedness

1. 引言

Sarason 问题在函数空间上的算子理论研究中具有十分重要的意义。随着对 Sarason 问题研究逐渐深入，许多学者将 Sarason 问题推广得到 Sarason 衍生问题：Toeplitz 算子、Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子之间的乘积的有界性问题。此外，Toeplitz 算子，Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子在除数学外等许多领域上也扮演着十分重要的角色。本文的主要研究内容是调和 Fock 空间上 Toeplitz 算子，Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子间乘积的有界性。

令 $H(\mathbb{C})$ 代表复平面 $\mathbb{C}$ 上全体整函数构成的空间，则

$$F_\alpha^2 = L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \cap H(\mathbb{C}),$$

称为 Fock 空间。调和 Fock 空间 F_h^2 是由 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 中所有调和函数构成的闭子空间，并且有 $F_h^2 = F_\alpha^2 \oplus \overline{F_0^2}$，其中 $\overline{F_0^2} = \left\{ f \in F_\alpha^2 : f(0) = 0 \right\}$，即对任意 $f \in F_h^2$，存在 $f_1 \in F_\alpha^2$，$f_2 \in F_0^2$，使得 $f = f_1 + \overline{f_2}$。F_h^2 的再生核为 $R_z(w) = K_z(w) + \overline{K_z(w)} - 1$，正规化再生核为 $r_z(w) = \dfrac{K_z(w) + \overline{K_z(w)} - 1}{\sqrt{2e^{\alpha|z|^2} - 1}}$，正规正交基为 $\{e_n\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\overline{e_n}\}_{n=1}^{+\infty}$，其中 $e_n(z) = \sqrt{\dfrac{\alpha^n}{n!}} z^n$。从 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 到 F_h^2 的正交投影记为 Q，Q 也是积分算子，进一步可以表示为带核的积分算子

$$Qf(z) = \langle f, R_z \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(w) \overline{R_z(w)} \mathrm{d}\lambda_\alpha(w),\ \forall f \in L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha). \tag{1.1}$$

设 D 由 F_h^2 中核函数的全体有限线性组合构成的线性子空间，明显 D 在 F_h^2 中稠密[1]。假设 f 是 $\mathbb{C}$ 上满足

$$\int_{\mathbb{C}} |f(w)| |R_z(w)|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) < +\infty \ \ (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2}$$

的 Lebesgue 可测函数。根据(1.1)和 Cauchy-Schwarz 不等式，可以稠定义两个算子

$$T_f : F_h^2 \to F_h^2;\ H_f : F_h^2 \to L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha),$$

$$T_f(g) = Q(fg),\ H_f(g) = (I - Q)(fg),$$

其中 I 是 $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 上恒等算子，$g \in D$，分别称 T_f 和 H_f 为以函数 f 为符号的 Toeplitz 算子和 Hankel 算子。进而以函数 f 为符号的对偶 Toeplitz 算子 $S_f : (F_h^2)^\perp \to (F_h^2)^\perp$ 被定义为

$$S_f(h) = (I - Q)(fh),\ h \in (F_h^2)^\perp.$$

Sarason [2]提出这样一个问题：刻画 Hardy 空间中一对外函数 f 和 g，使得 $T_f T_{\bar{g}}$ 在 Hardy 空间上有界，即 Sarason 乘积问题。由于内函数很容易被处理，所以在 Hardy 空间上，只需要考虑外函数。同样地，在 Bergman 空间上也提出类似问题：刻画 Bergman 空间中函数 f 和 g，使得 $T_f T_{\bar{g}}$ 在 Bergman 空间上有界。目前，Sarason 乘积问题已经受到了许多学者的关注，人们对 Sarason 乘积问题及其衍生问题的研究也取得了一定的成果。在 Hardy 空间中有许多结果，见[3] [4] [5] [6]。在 Bergman 空间中，Sarason 乘积问题及其衍生问题同样也是众多学者研究的重点问题，见[7] [8] [9]。Fock 空间上的 Sarason 乘积问题及其衍生问题得到了系统且完整的刻画，见[10] [11] [12] [13]。

参考文献[10]中刻画了 Fock 空间上两个 Toeplitz 算子乘积 $T_f T_{\bar{g}}$ 有界当且仅当下列条件至少有一个成立：

a) f 和 g 至少有一个等于零；

b) $f(z)=\mathrm{e}^{\alpha z\bar{a}}$，$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha z\bar{a}}$。

参考文献[12]中刻画了 Fock 空间上 Hankel 算子与 Toeplitz 算子的混合乘积 $H_{\bar{f}} T_{\bar{g}}$ 有界等价于下列条件至少有一个成立：

a) f 是常值函数；

b) $g=0$；

c) f 是线性多项式函数，g 是非零常数；

d) 存在常数 a,b,c,A 使得 $f(z)=\mathrm{e}^{az+b}+A$，$g(z)=\mathrm{e}^{-az+c}$。

本文在以上基础上研究调和 Fock 空间上两个 Toeplitz 算子的乘积 $T_f T_{\bar{g}}$，Hankel 算子与 Toeplitz 算子的乘积 $H_{\bar{f}} T_{\bar{g}}$ 和对偶 Toeplitz 算子与 Hankel 算子乘积 $S_g H_{\bar{f}}$ 的有界性。

2. 两个 Toeplitz 算子的乘积 $T_f T_{\bar{g}}$ 的有界性

这一部分研究了调和 Fock 空间 F_h^2 上两个 Toeplitz 算子的乘积 $T_f T_{\bar{g}}$ 的有界性的充分条件。以下是一些准备工作。

引理 2.1 [14]设 $f\in F_\alpha^p$，并且 $0<p\le\infty$。则

$$\left|f(z)\right|\le\|f\|_{p,\alpha}\mathrm{e}^{\alpha|a|^2/2}$$

对于所有 $z\in\mathbb{C}$。

下面为本节的主要结果。

定理 2.2 假设 $f,g\in F_\alpha^2$，如果下列条件之一成立：

a) f 和 g 至少有一个等于零；

b) $f(z)=\mathrm{e}^{\alpha z\bar{a}}$，$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha z\bar{a}}$。

则 $T_f T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。

证明：如果条件(a)成立，那么 $T_f T_{\bar{g}}=0$。显然，$T_f T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。

如果条件(b)成立，那么对任意 $h\in F_h^2$，有 $h=h_1+\overline{h_2}$，其中 $h_1,h_2\in F_\alpha^2$ 并且 $h_2(0)=0$，有

$$\begin{aligned}T_{\bar{g}}h(z)&=\int_{\mathbb{C}}\overline{g(w)}h(w)\overline{R_z(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha\bar{w}a}\left[h_1(w)+\overline{h_2(w)}\right]\left[\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}w}+\mathrm{e}^{\alpha z\bar{w}}-1\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w).\end{aligned}$$

由再生核性质和平均值定理，可以得到上述等式为

$$T_{\bar{g}}h(z)=h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}+h_1(z-a)-h_1(-a)+\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}.$$

记 $\left(T_{\bar{g}}h\right)_1(z)=h_1(z-a)-h_1(-a)$ 和 $\overline{\left(T_{\bar{g}}h\right)_2(z)}=h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}+\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}$。利用上述方法，同样可以得到

$$\begin{aligned}T_f h(z)&=\int_{\mathbb{C}}f(w)h(w)\overline{R_z(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}w}\left[h_1(w)+\overline{h_2(w)}\right]\left(\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}w}+\mathrm{e}^{\alpha z\bar{w}}-1\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=h_1(z)\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}+\overline{h_2(z+a)}+\overline{h_2(a)}\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}-\overline{h_2(a)}.\end{aligned}$$

综合上述两个等式，由此得到

$$\begin{aligned}T_fT_{\bar{g}}h(z)&=\left(T_{\bar{g}}h\right)_1(z)\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}+\overline{\left(T_{\bar{g}}h\right)_2(z+a)}+\overline{\left(T_{\bar{g}}h\right)_2(a)}\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}-\overline{\left(T_{\bar{g}}h\right)_2(a)}\\&=\left[h_1(z-a)-h_1(-a)+h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right]\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}+\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}\\&\quad+h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left(\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}-1\right)+\overline{h_2(a)}\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}-1\right).\end{aligned}$$

为了方便，记

$$\lambda_1(z)=\left[h_1(z-a)-h_1(-a)+h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right]\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}+\overline{h_2(a)}\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}-1\right)-h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2},$$

$$\overline{\lambda_2(z)}=\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}+h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}.$$

这样就有

$$T_fT_{\bar{g}}h(z)=\lambda_1(z)+\overline{\lambda_2(z)}.$$

进而

$$\left\|T_fT_{\bar{g}}h\right\|=\left\|\lambda_1\right\|+\left\|\overline{\lambda_2}\right\|.$$

首先，估计 $\left\|\overline{\lambda_2}\right\|$，由三角不等式可以得到

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\lambda_2}\right\|&=\left\|\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}+h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}\right\|\\&\le\left\|\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}\right\|+\left|h_1(-a)\right|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left\|\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}\right\|.\end{aligned}$$

根据点赋值泛函的有界性得到

$$\left|h_1(-a)\right|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left\|\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}\right\|\le\left\|h_1\right\|\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}=\left\|h_1\right\|\le\|h\|.\tag{2.1}$$

又由变量替换得到

$$\begin{aligned}\left\|\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}\right\|&=\left(\int_{\mathbb{C}}\left|\overline{h_2(z+a)}\mathrm{e}^{-\alpha a(\bar{z}+\bar{a})}\right|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2}\\&=\left(\int_{\mathbb{C}}\left|\overline{h_2(z)}\right|^2\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\left\|h_2\right\|\\&\le\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\|.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)估计，可以得到

$$\left\|\overline{\lambda_2}\right\| \le \|h\| + \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\| = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 1\right)\|h\|. \tag{2.3}$$

其次，估计$\|\lambda_1\|$，由三角不等式和数学归纳法得到

$$\begin{aligned}\|\lambda_1\| &= \Big\|\left[h_1(z-a) - h_1(-a) + h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right]\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z} \\ &\quad + \overline{h_2(a)}\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z} - 1\right) - h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\Big\| \\ &\le \left\|h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}\right\| + |h_1(-a)|\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} + |h_1(-a)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \\ &\quad + \left|\overline{h_2(a)}\right|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + \left|\overline{h_2(a)}\right|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2} + |h_1(-a)|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}.\end{aligned}$$

根据变量替换有

$$\begin{aligned}\left\|h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}\right\| &= \left(\int_{\mathbb{C}}\left|h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}\right|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\left(\int_{\mathbb{C}}|h_1(z)|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h_1\| \\ &\le \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\|.\end{aligned} \tag{2.4}$$

由点赋值泛函的有界性得到

$$\begin{aligned}&|h_1(-a)|\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} \le \mathrm{e}^{\alpha|a|^2}\|h_1\| \le \mathrm{e}^{\alpha|a|^2}\|h\|, \\ &|h_1(-a)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \le \|h\|, \\ &\left|\overline{h_2(a)}\right|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \le \|h\|, \\ &\left|\overline{h_2(a)}\right|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2} \le \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\|, \\ &|h_1(-a)|\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2} \le \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\|.\end{aligned} \tag{2.5}$$

结合(2.4)和(2.5)可以得到

$$\|\lambda_1\| \le \left(\mathrm{e}^{\alpha|a|^2} + \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 3\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 2\right)\|h\|. \tag{2.6}$$

最后，根据(2.3)和(2.6)得到

$$\left\|T_f T_{\bar{g}} h\right\| \le \left(\mathrm{e}^{\alpha|a|^2} + \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 3\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 3\right)\|h\| = C\|h\|.$$

其中，$C = \mathrm{e}^{\alpha|a|^2} + \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 3\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + 3$。

所以，$T_f T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。

3. Hankel 算子与 Toeplitz 算子的乘积 $H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}$ 的有界性

这部分介绍了调和 Fock 空间 F_h^2 上 Hankel 算子与 Toeplitz 算子的乘积 $H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}$ 的有界性的充分条件。

引理 3.1 [14]若 φ 为整函数，则 $H_{\bar{\varphi}}$ 为有界算子当且仅当 φ 为线性解析多项式函数。

定理 3.2 假设 $f, g \in F_\alpha^2$。如果下列条件之一成立：

a) f 是常值函数；

b) $g=0$；

c) f 是线性多项式函数，g 是非零常数；

d) $f(z)=\mathrm{e}^{\alpha z\bar{a}}$，$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha z\bar{a}}$。

则 $H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。

证明：如果 f 是常值函数，显然 $H_{\bar{f}}=0$，进而 $H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}=0$。

如果 $g=0$。显然 $H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}=0$。

如果 f 是线性多项式函数，那么对任意 $h\in F_h^2$，有 $h=h_1+\overline{h_2}$，其中 $h_1,h_2\in F_\alpha^2$ 并且 $h_2(0)=0$，有

$$H_{\bar{f}}h=H_{\bar{f}}\left(h_1+\overline{h_2}\right)=H_{\bar{f}}h_1+H_{\bar{f}}\overline{h_2}=H_{\bar{f}}h_1. \tag{3.1}$$

根据引理 3.1 和(3.1)得到 $H_{\bar{f}}$ 在 F_h^2 上有界；又由 g 是非零常数，那么有 $T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。因此，$H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}$ 在 F_h^2 上有界。

如果 $f(z)=\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}$，$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha\bar{a}z}$，那么对任意 $h\in F_h^2$，有 $h=h_1+\overline{h_2}$，其中 $h_1,h_2\in F_\alpha^2$ 并且 $h_2(0)=0$，有

$$\begin{aligned}T_{\bar{g}}h(z)&=\int_{\mathbb{C}}\overline{g(w)}h(w)\overline{R_z(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha\bar{w}a}\left[h_1(w)+\overline{h_2(w)}\right]\left[\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}w}+\mathrm{e}^{\alpha z\bar{w}}-1\right]\mathrm{d}\lambda_\alpha(w).\end{aligned}$$

由再生核性质和平均值定理，可以得到上述等式为

$$T_{\bar{g}}h(z)=h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}+h_1(z-a)-h_1(-a)+\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}. \tag{3.2}$$

进一步得到

$$\begin{aligned}H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}h(z)&=(I-Q)\left(\bar{f}T_{\bar{g}}h\right)(z)\\&=\overline{f(z)}\left[h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}+h_1(z-a)-h_1(-a)+\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{z}}\right]-Q\left(\bar{f}T_{\bar{g}}h\right)(z).\end{aligned} \tag{3.3}$$

再次根据再生核性质核和平均值定理以及(3.2)得到

$$\begin{aligned}Q\left(\bar{f}T_{\bar{g}}h\right)(z)&=\int_{\mathbb{C}}\overline{f(w)}T_{\bar{g}}h(w)\overline{R_z(w)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=\int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\alpha a\bar{w}}\left[h_1(-a)\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{w}}+h_1(w-a)-h_1(-a)+\overline{h_2(w)}\mathrm{e}^{-\alpha a\bar{w}}\right]\left(\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}w}+\mathrm{e}^{\alpha z\bar{w}}-1\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\&=h_1(-a)+h_1(0)\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}+h_1(z)-h_1(0)-h_1(-a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}+\overline{h_2(z)}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3)得到

$$H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}h(z)=h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}}+\overline{h_2(z)}-h_1(0)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}}-h_1(z)+h_1(0)-h_2(z).$$

为了叙述简单，令

$$\begin{aligned}t_1(z)&=-h_1(z)-h_2(z)+h_1(0)+\overline{h_2(z)}-h_1(0)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}},\\t_2(z)&=h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}}.\end{aligned}$$

则有

$$H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}h(z)=t_1(z)+t_2(z).$$

进而

$$\left\|H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}\right\|=\left\|t_1+t_2\right\|\le\left\|t_1\right\|+\left\|t_2\right\|. \tag{3.5}$$

首先，估计 $\left\|t_2\right\|$，由变量替换可以得到

$$\begin{aligned}\|t_2\| &= \left(\int_{\mathbb{C}}\left|h_1(z-a)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}}\right|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\left(\int_{\mathbb{C}}\left|h_1(z)\right|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{1/2}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h_1\| \le \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h\|.\end{aligned} \tag{3.6}$$

其次，估计$\|t_1\|$，由再生核性质和点赋值泛函的有界性得到

$$\begin{aligned}\|t_1\| &= \left\|-h_1(z)-h_2(z)+h_1(0)+\overline{h_2(z)}-h_1(0)\mathrm{e}^{\alpha a\bar{z}}\right\|\\ &\le 2\|h_1\|+2\|h_2\|+\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\|h_1\|\\ &\le \left(4+\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\right)\|h\|.\end{aligned} \tag{3.7}$$

最后，将(3.6)和(3.7)代入(3.5)得到

$$\left\|H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}\right\| \le \left(4+2\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}\right)\|h\| = M\|h\|.$$

其中$M=4+2\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|a|^2}$。

因此，$H_{\bar{f}}T_{\bar{g}}$在F_h^2上有界。

4. 对偶 Toeplitz 算子与 Hankel 算子的乘积$S_gH_{\bar{f}}$的有界性

这部分刻画以$f(z)=\mathrm{e}^{\alpha z\bar{a}}$和$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha z\bar{a}}$为符号函数的对偶 Toeplitz 算子与 Hankel 算子乘积的有界性。

定理 4.1 假设$a\in\mathbb{C}$，$f(z)=\mathrm{e}^{\alpha z\bar{a}}$和$g(z)=\mathrm{e}^{-\alpha z\bar{a}}$，那么$S_gH_{\bar{f}}$在$F_h^2$上有界。

证明：对任意$h\in F_h^2$，有$h=h_1+\overline{h_2}$，其中$h_1,h_2\in F_\alpha^2$并且$h_2(0)=0$，有

$$H_{\bar{f}}h(z)=(I-Q)\left(\bar{f}h\right)(z)=\overline{f(z)}h(z)-Q\left(\bar{f}h\right)(z).$$

根据再生核性质和平均值定理有

$$\begin{aligned}Q\left(\bar{f}h\right)(z) &= \int_{\mathbb{C}}\overline{f(u)}h(u)\overline{R_z(u)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\\ &= \int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{\alpha\bar{a}z}\left[h_1(u)+\overline{h_2(u)}\right]\left(\mathrm{e}^{\alpha z\bar{u}}+\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}u}-1\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\\ &= h_1(z+a)+h_1(a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}-h_1(a)+\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}.\end{aligned}$$

进而

$$H_{\bar{f}}h(z)=\overline{f(z)}h(z)-h_1(z+a)-h_1(a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}+h_1(a)-\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a},$$

再进一步计算

$$S_gH_{\bar{f}}h(z)=g(z)\left[\overline{f(z)}h(z)-h_1(z+a)-h_1(a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}+h_1(a)-\overline{h_2(z)}\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}a}\right]-Q\left(gH_{\bar{f}}h\right)(z),$$

再次利用再生核性质和平均值定理得到

$$\begin{aligned}Q\left(gH_{\bar{f}}h\right)(z) &= \int_{\mathbb{C}}g(u)H_{\bar{f}}h(u)\overline{R_z(u)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\\ &= \int_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-\alpha\bar{a}u}\left[\mathrm{e}^{\alpha a\bar{u}}\left(h_1(u)+\overline{h_2(u)}\right)-h_1(u+a)-h_1(a)\mathrm{e}^{\alpha\bar{u}a}+h_1(a)-\overline{h_2(u)}\mathrm{e}^{\alpha a\bar{u}}\right]\\ &\quad\times\left(\mathrm{e}^{\alpha z\bar{u}}+\mathrm{e}^{\alpha\bar{z}u}-1\right)\mathrm{d}\lambda_\alpha(u)\\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right)\mathrm{e}^{-\alpha\bar{a}z}\left[h_1(a)-h_1(z+a)\right].\end{aligned}$$

那么

$$S_g H_{\bar{f}} h(z) = \mathrm{e}^{-\alpha\bar{a}(z+a)}\left[h_1(a) - h_1(z+a)\right].$$

利用变量替换和再生核性质有

$$\begin{aligned}\left\|S_g H_{\bar{f}} h\right\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} \left|\mathrm{e}^{-\alpha\bar{a}(z+a)}\left[h_1(a) - h_1(z+a)\right]\right|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left[\left|h_1(a)\right|^2 - h_1(a)\overline{h_1(0)} - \overline{h_1(a)}h_1(0) + \left\|h_1\right\|^2\right].\end{aligned}$$

根据点赋值泛函的有界性，三角不等式以及数学归纳法得到

$$\begin{aligned}\left\|S_g H_{\bar{f}} h\right\|^2 &\le \mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\left[\left|h_1(a)\right|^2 + \left|h_1(a)\overline{h_1(0)}\right| + \left|\overline{h_1(a)}h_1(0)\right| + \left\|h_1\right\|^2\right] \\ &\le \left(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + \mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right)\left\|h_1\right\|^2 \\ &\le \left(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + \mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}\right)\left\|h\right\|^2 \\ &= M\left\|h\right\|^2.\end{aligned}$$

其中 $M = 1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} + \mathrm{e}^{-\alpha|a|^2}$ 。

因此， $S_g H_{\bar{f}}$ 在 F_h^2 上有界。

本文仅研究了调和 Fock 空间上 Toeplitz 算子，Hankel 算子和对偶 Toeplitz 算子间乘积的有界性的充分条件。调和 Fock 空间结构比较复杂，研究充分必要条件是需要十分具有创新性的技术。在其它空间中，例如 Fock 空间，Bergman 空间和 Hardy 空间上刻画 Sarason 乘积问题的衍生问题的充分必要条件也十分困难。

参考文献

[1] 洪颖. 调和 Fock 空间上的 Toeplitz 算子[D]: [硕士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2019.

[2] Sarason, D. (1994) Products of Toeplitzoperators. In: *Linear and Complex Analysis Problem*, Book 3, Part I, Lecture Notes in Math., Vol. 1573, Spring-Verlag, Berlin, 318-319.

[3] Sarason, D. (1989) Exposed Points in $H^1 I$. In: Dym, H., Goldberg, S., Kaashoek, M.A. and Lancaster, P., Eds., *The Gohberg Anniversary Collection*. *Operator Theory*: *Advances and Applications*, Vol. 41, Birkhäuser Basel, 485-496. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9278-0_26

[4] Sarason, D. (1990) Exposed Points in $H^1 II$. In: Dym, H., Goldberg, S., Kaashoek, M.A. and Lancaster, P., Eds., *The Gohberg Anniversary Collection*. *Operator Theory*: *Advances and Applications*, Vol. 40/41, Birkhäuser, Basel, 333-347. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9144-8_43

[5] Nazarov, F. (1997) A Counterexample to Sarason's Conjecture. Preprint, MSU.

[6] Zheng, D.C. (1996) The Distribution Function in Equality and Products of Toeplitz Operators and Hankel Operators. *Journal of Functional Analysis*, **138**, 477-501. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0073

[7] Stroethoff, K. and Zheng, D. (1999) Products of Hankel and Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of Functional Analysis*, **169**, 289-313. https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3489

[8] Stroethoff, K. and Zheng, D. (2003) Bounded Toeplitz Products on the Bergaman Space of the Polysisk. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **278**, 125-135. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00578-4

[9] Stroethoff, K. and Zheng, D. (2007) Bounded Toeplitz Products on the Bergaman Spaces of the Unit Ball. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **325**, 114-129. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.009

[10] Cho, H., Park, J. and Zhu, K. (2014) Products of Toeplitz Operators on the Fockspace. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 2483-2489. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-12110-1

[11] Cho, H., Park, J. and Zhu, K. (2019) Products of Hankel Operators on the Fockspace. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 2644-2663. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.01.003

[12] Ma, P., Yan, F., Zheng, D., *et al*. (2020) Mixed Products of Toeplitz and Hankel Operator on the Fockspace. *Journal of*

Operator Theory, No. 1, 84.

[13] Bommier-Hato, H., Youssfi, E. and Zhu, K. (2017) Sarason's Toeplitz Product Problem for a Class of Fockspaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **141**, 408-442. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2017.03.002

[14] Zhu, K. (2012) Analysis on Fockspace. Springer Science & Business Media, Berlin.