

平面三角剖分图中非连通图的Anti-Ramsey数

罗冬连*, 顾俊琪

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2023年5月28日; 录用日期: 2023年6月23日; 发布日期: 2023年6月30日

摘要

给定图 G 的一个边染色, 如果图 G 的任意两条边颜色都不相同, 那么就说图 G 是彩虹的。图 H 在图 G 中的 anti-Ramsey 数是使得边染色图 G 中不存在任何彩虹子图 H 的最大颜色数。图的 anti-Ramsey 数目前得到广泛的研究, 尤其是匹配在多种图类中的 anti-Ramsey 数得到广泛而深入的研究。Gilboa 和 Roditty 研究了由小的连通分支构成的图在完全图中的 anti-Ramsey 数, 而非连通图在平面图中的 anti-Ramsey 数除匹配外结果较少。本论文将继续以这个方向研究边染色图中 $C_3 \cup tP_2$ 这个非连通图在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数, 得到了对任意 $n \geq 2t + 3, t \geq 2, 2n + 3t - 9 \leq AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \leq 2n + 4t - 5$ 。

关键词

彩虹匹配, Anti-Ramsey 数, 平面三角剖分

The Anti-Ramsey Number of Unconnected Graphs in Plane Triangulation Graphs

Donglian Luo*, Junqi Gu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: May 28th, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

* 通讯作者。

Abstract

Given an edge-coloring of a graph G , G is said to be *rainbow* if any two edges of G receive different colors. Given two graphs G and H , the anti-Ramsey number of H in G is defined to be the maximum number of colors in an edge-colored graph G which contains no rainbow copies of H . The anti-Ramsey numbers for graphs, especially matchings, have been studied in several graph classes. Gilboa and Roditty focused on the anti-Ramsey number of graphs with small components, but the results of the anti-Ramsey number of graphs with small components in plane graph are few. In this paper, we continue the work in this direct and determine the anti-Ramsey number of $C_3 \cup tP_2$ in plane triangulations, then we can get $2n + 3t - 9 \leq AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \leq 2n + 4t - 5$ for $n \geq 2t + 3, t \geq 2$.

Keywords

Rainbow Matching, Anti-Ramsey Number, Plane Triangulations

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

给定一个边染色图 G , 如果图 G 的每一条边上的颜色都不相同, 那么称图 G 为彩虹图. 对于给定的图 G 和 H , 边染色图 G 中存在彩虹子图 H 的最小颜色数, 叫做 H 在图 G 中的彩虹数, 记作 $rb(G, H)$. 同样地, 对于给定的图 G 和 H , 使得边染色图 G 中不存在任何彩虹子图 H 的最大颜色数, 叫做 H 在图 G 中的 anti-Ramsey 数, 记作 $AR(G, H)$. $ex(G, H)$ 表示使得图 G 中不包含任何子图 H 的最大边数.

Anti-Ramsey 数是由 Erdős 等人 [1] 于上世纪 70 年代首次提出的, 并且证明了图在完全图中的 anti-Ramsey 数与图的 Turán 数密切相关. 早期的研究者大都考虑母图是完全图的情况, 得到了多种图在完全图中的 anti-Ramsey 数的一些结论, 比如: 圈 [1-3], 路 [4], 团 [5], 匹配 [2, 6-8] 等. 本文主要考虑非连通图的 anti-Ramsey 数问题. 一个最重要的这类图是匹配. Schiermeyer [5] 和 Chen, Li 和 Tu [6] 证明了匹配在完全图中的 anti-Ramsey 数. Haas and Young [7] 证明了完美匹配在完

全图中的anti-Ramsey数. 此后 Jahanbekam 和 West [9] 考虑完全图中 t 个边不交的完美匹配的 anti-Ramsey 数. 二十一世纪以来, 对于 anti-Ramsey 数的研究开始由完全图转向一些特殊的图类, 比如: 二部图 [10–14], 平面图 [15–22], 超图 [23–26] 等. 近年来, 对非连通图的研究主要集中于匹配在平面图以及超图的研究, 关于平面三角剖分图中匹配的 anti-Ramsey 数的研究结果如下. 令 \mathcal{T}_n 表示由所有 n -顶点的平面三角剖分图构成的图簇. 首先 Jendrol' 等 [17] 给出了特定的匹配在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数的精确值, 并给出了匹配在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数的上下界. 由于以上定理匹配在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数的上界和下界差距较大, 之后 Qin 等 [21], Jendrol' 等 [16] 和 Chen 等 [15] 在 [17] 的基础上逐渐缩小了匹配在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数的上界. 最终 Qin 等 [22] 确定了匹配在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数的精确值.

除匹配外, Gilboa 和 Roditty [27] 以及 Bialostocki, Gilboa 和 Roditty [28] 得到了许多其他非连通图在完全图中的 anti-Ramsey 数的结论. 其中 Bialostocki, Gilboa 和 Roditty [28] 得到了完全图中所有最多四条边的图的 anti-Ramsey 数. Gilboa 和 Roditty [27] 得到的包含匹配的非连通图在完全图中的 anti-Ramsey 数的结论, 包括 $P_3 \cup tP_2$, $P_4 \cup tP_2$ 和 $C_3 \cup tP_2$. 而包含匹配的非连通在平面三角剖分图的 anti-Ramsey 数还没有相关结果, 因此本文在以上研究的基础上, 研究 $C_3 \cup tP_2$ 这个小的连通分支构成的图在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数.

为了方便, 下边给出本文相关的定义和符号. 在图 G 中, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, $V(G)$ 中的元素为图 G 的顶点, $E(G)$ 的元素为图 G 的边. 此外, $|V(G)|$ 和 $e(G)$ 分别表示图 G 中顶点数和边数. 对任意 $u, v \in V(G)$, $e \in E(G)$ 使得 $e = uv$, 则称顶点 u 与 v 是邻接的, 也称 u 与 v 互为邻居, 并且称顶点 u (或 v) 与边 e 是关联的. 对于任意点 $v \in V(G)$, 与点 v 相关联的边的数目叫做点 v 在图 G 的度, 记作 $d(v)$. 对于一个顶点 $x \in V(G)$, 我们用 $N_G(x)$ 表示 G 中与 x 相邻接的顶点所组成的顶点集. 对于图 G 和 H , 若满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 和 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 是图 G 的一个子图, 记作 $H \subseteq G$. 若 $V(H) = V(G)$, 则称 H 为 G 的生成子图. 若在 G 中所有连接集合 $V(H)$ 中两个点的边都出现在集合 $E(H)$, 则称 H 为图 G 的导出子图, 记为 $G[V(H)]$. 对于 $V(G)$ 的两个不相交的集合 S 和 T , 用 $e_G(S, T)$ 表示 G 中在 S 和 T 之间所有边的数目.

2. 平面三角剖分图中 $C_3 \cup P_2$ 的 Anti-Ramsey 数

首先, 对 C_3 有如下结果.

定理1. [5] 对任意整数 $n \geq 4$, $AR(\mathcal{T}_n, C_3) = \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1$.

定理2. 对任意整数 $n \geq 6$, $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup P_2) = \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1$.

证明: 为了证明下界, 我们找一个图 $T_n \in \mathcal{T}_n$ 的边染色使得图 T_n 不包含彩虹 $C_3 \cup P_2$. 根据定理 1, 图 T_n 存在一个不包含彩虹 C_3 的 $(\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1)$ -边染色 c . 因此图 T_n 的边染色 c 也不包含彩虹 $C_3 \cup P_2$. 从而有 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup P_2) \geq \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1$.

接下来证明不等式 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup P_2) \leq \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1$. 我们只需要证明任意图 $T_n \in \mathcal{T}_n$ 的任意 $\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor$ -边染色包含一个彩虹 $C_3 \cup P_2$. 反过来, 假设存在一个图 T_n 的 $\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor$ -边染色不包含彩虹 $C_3 \cup P_2$. 根据定理 1, 容易得到此时图 T_n 包含一个彩虹子图 H 与 C_3 同构. 令 $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$D = V(T_n) \setminus V(H)$. 同时令图 G 是图 T_n 的一个边数为 $\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor$ 的彩虹生成子图且包含子图 H . 对每个顶点 $v \in V(G)$, 用 $d(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的度. 因此对任意顶点 $v, w \in D$ 有 $vw \notin G$. 接下来对顶点 $v \in D$ 根据 $d(v)$ 分情况讨论.

情形 1. 存在一个顶点 $v \in D$ 使得 $d(v) = 3$.

由于 $\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor \geq 8$, 因此存在一个顶点 $w \in D$ 使得 $d(w) \geq 1$. 假设 $wv_3 \in E(G)$. 我们可以得到 $T_n[v_1, v_2, v] \cup T_n[w, v_3]$ 是一个彩虹 $C_3 \cup P_2$, 矛盾.

情形 2. 每个顶点 $v \in D$ 都有 $d(v) \leq 2$.

设 D 中度数为 2 的顶点个数为 t . 对于 D 中任意两个度数为 2 的顶点 v 和 w . 不难发现, 若令 $\{v_1v, v_2v\} \subseteq E(G)$. 如果 $wv_3 \in E(G)$, 那么可以容易找到一个彩虹 $C_3 \cup P_2$. 因此有 $\{v_1w, v_2w\} \subseteq E(G)$. 从而可以假设 D 中任意度数为 2 的顶点都与 v_1, v_2 相邻. 假设在 D 中存在两个度数为 2 的顶点 v, w 使得 $vw \in E(T_n)$. 此时图 $G[v_1, v_2, v_3, v, w]$ 如见图 1 所示. 由于图 T_n 不包含彩虹 $C_3 \cup P_2$, 考虑子图 $T_n[v_1, v_2, v_3] \cup T_n[v, w]$, 子图 $T_n[v_2, v, w] \cup T_n[v_1, v_3]$, 以及子图 $T_n[v_1, v, w] \cup T_n[v_2, v_3]$, 可以得到 $c(vw) \in \{1, 2, 3\} \cap \{1, 5, 7\} \cap \{3, 4, 6\} = \emptyset$, 矛盾.

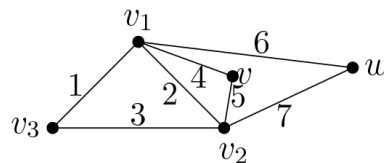


Figure 1. $G[v_1, v_2, v_3, v, w]$, $vw \in E(T_n)$

图 1. $vw \in E(T_n)$ 图 $G[v_1, v_2, v_3, v, w]$

因此在 D 中对任意两个度数为 2 的顶点 v, w 都有 $vw \notin E(T_n)$. 令所有在 D 中满足 $d(v) < 2$ 的点组成的顶点集为 V_1 . 此时图 $G - V_1$ 如见图 2 所示. 不难发现, 在图 $G - V_1$ 中有 t 个四面. 此时由于 $vw \notin E(T_n)$, 因此在图 $G - V_1$ 中的每个四面内至少有 1 个度数小于 2 的点. 假设存在顶点 $x \in V_1$ 在 $v_1v_2vwv_1$ 围成的四面内且满足 $d(x) = 1$. 不妨假设 $v_1x \in E(G)$. 不难发现, 在图 $T_n - v_1v_2$ 中所有边的颜色均为 $c(v_1v_2)$. 因此子图 $T_n[v_1, x, w] \cup T_n[v_2, v_3]$ 是一个彩虹 $C_3 \cup P_2$, 矛盾. 从而可知对任意在四面内的顶点 $x \in V_1$ 都有 $d(x) = 0$.

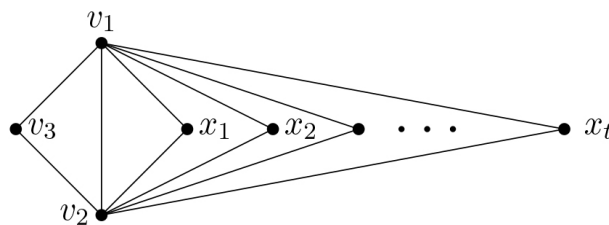


Figure 2. $G - V_1$

图 2. $G - V_1$

因此我们可以得到 $e(G) \leq 3 + 2t + (n - 3 - 2t) = n$. 当 $n = 2k$ 时, 有 $e(G) = \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor = 3k - 2$. 因此 $3k - 2 \leq n = 2k$. 从而有 $k \leq 2$, 矛盾. 当 $n = 2k + 1$ 时, 有 $e(G) = \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor = 3k$. 因此

$3k \leq n = 2k + 1$. 从而可以得到 $k \leq 1$, 矛盾. 因此图 T_n 的任意 $\lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor$ -边染色包含一个彩虹 $C_3 \cup P_2$, 即 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup P_2) \leq \lfloor \frac{3n-4}{2} \rfloor - 1$.

综上所述, 定理 2 证明完毕. ■

3. 平面三角剖分图中 $C_3 \cup tP_2$ 的 Anti-Ramsey 数

定理3. 对任意 $n \geq 2t + 3, t \geq 2$, $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \geq 2n + 3t - 9$.

证明: 令 P 是顶点顺序为 v_1, v_2, \dots, v_{t-2} 的一条路. H 是通过给 P 增加两个相连的顶点 x, y 并且把 x 和 y 两个点与 P 上的每个点相连的平面三角剖分图, H 的最外边的平面以 x, y, v_1 作为边界. 因此有 $|H| = t$. 令 T_H 是通过给 H 的每个面 F 增加一个新的顶点然后将其与在 F 中的所有顶点相连所得到的平面三角剖分图. 因此 T_H 是顶点数为 $t + (2t - 4) = 3t - 4$ 的三角剖分图. 令 w 是增加在 H 外表面的一个新的顶点. 令 T 是通过给 T_H 的包含 x, y, w 的面增加 $n - (3t - 4)$ 个顶点, 其中增加的顶点为 $w_1, w_2, \dots, w_{n-3t+4}$, 使得 $\{ww_1, w_{n-3t+4}x, w_{n-3t+4}y\} \subseteq E(T)$ 且对所有的 $i \in \{1, \dots, n - 3t + 3\}$ 将 w_i 与 T 中的 x, y, w_{i+1} 相连所得到的 n 个顶点的平面三角剖分图. 当 $t = 4$ 且 $n = 12$ 时图 T 的构造如见图 3 所示.

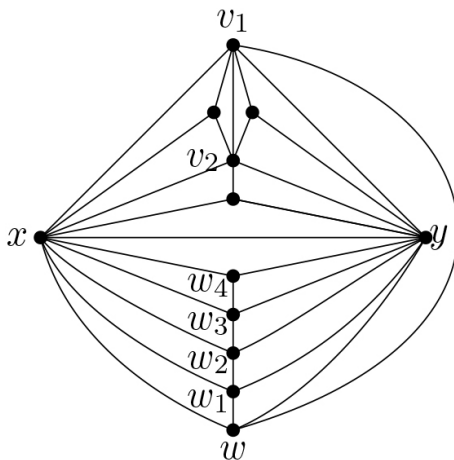


Figure 3. The construction of $T, t = 4$ and $n = 12$

图 3. 当 $t = 4$ 且 $n = 12$ 时图 T 的构造

显然, $T \in \mathcal{T}_n$. 令 c 是 T 的一个边染色, 首先给边 $ww_1, ww_2, \dots, w_{n-3t+3}w_{n-3t+4}$ 染色为 1, 然后给所有 T 的剩下的边用与 1 不同且互不相同的颜色染色. 此时可以容易发现 T 不包含彩虹 $C_3 \cup tP_2$ 且 c 的颜色数是 $(3n - 6) - (n - 3t + 4) + 1 = 2n + 3t - 9$. 因此证明了 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \geq 2n + 3t - 9$.

综上所述, 定理 3 证明完毕. ■

定理4. 对任意整数 $n \geq 2t + 3, t \geq 2$, $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \leq 2n + 4t - 5$.

证明: 我们通过对 t 进行归纳来证明. 当 $t = 2$ 时, 对任意 $n \geq 7$, 证明不等式 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup 2P_2) \leq 2n + 3$. 我们只需证明任意图 $T_n \in \mathcal{T}_n$ 的任意 $(2n + 4)$ -边染色都包含一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 反过来, 我们假设存在一个图 T_n 的 $(2n + 4)$ -边染色不包含彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 根据定理 2, 可以容易得到图 T_n

包含一个由 H_1 和 H_2 不相交的并组成的彩虹子图 H , 其中 $H_1 = C_3$ 且 $H_2 = P_2$. 令图 G 是图 T_n 的一个边数为 $2n + 4$ 的彩虹生成子图且包含子图 H . 令 $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V(H_2) = \{v_4, v_5\}$ 且 $D = V(T_n) \setminus V(H)$. 对任意顶点 $v \in V(G)$, 用 $d(v)$ 表示在图 G 中点 v 的度. 显然, 图 G 不包含与图 $C_3 \cup 2P_2$ 同构的子图. 因此对任意顶点 $v, w \in D$ 有 $vw \notin E(G)$. 从而对任意 $v \in D$ 有 $0 \leq d(v) \leq 5$. 接下来对顶点 $v \in D$ 根据 $d(v)$ 进行分情况讨论.

情形 1. 存在一个顶点 $v \in D$ 使得 $d(v) = 5$.

此时 $\{vv_1, vv_2, vv_3, vv_4, vv_5\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{1, \dots, 5\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么可以容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 因此可以得到对任意顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) = 0$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 5 = 14$. 可以得到 $n \leq 5$, 矛盾.

情形 2. 存在一个顶点 $v \in D$ 使得 $d(v) = 4$.

假设 $\{vv_1, vv_2, vv_3, vv_5\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{1, \dots, 4\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 因此可以得到对任意 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) \leq 1$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + (n - 6) + 4 = n + 7$. 可以得到 $n \leq 3$, 矛盾.

假设 $\{vv_1, vv_2, vv_4, vv_5\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{3, 4, 5\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 使得 $wv_1 \in E(G)$, 那么我们可以发现 $G[v, v_4, v_5] \cup G[w, v_1] \cup G[v_2, v_3]$ 是一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$, 矛盾. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 使得 $wv_2 \in E(G)$, 那么可以发现 $G[v, v_4, v_5] \cup G[w, v_2] \cup G[v_1, v_3]$ 是一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$, 矛盾. 因此可以得到对任意顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) = 0$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 4 = 13$. 可以得到 $n < 4$, 矛盾.

情形 3. 存在一个顶点 $v \in D$ 使得 $d(v) = 3$.

假设 $\{vv_1, vv_2, vv_3\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$, 矛盾. 因此可以得到对任意顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) \leq 2$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 2(n - 6) + 3 = 2n$, 矛盾.

假设 $\{vv_2, vv_4, vv_5\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{1, \dots, 5\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 因此可以得到对任意顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) = 0$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 3 = 12$. 可以得到 $n \leq 4$, 矛盾.

假设 $\{vv_1, vv_2, vv_5\} \subseteq E(G)$. 如果存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 和 $i \in \{3, 4\}$ 使得 $wv_i \in E(G)$, 那么容易找到一个彩虹 $C_3 \cup 2P_2$. 假设存在顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 使得 $\{wv_1, wv_2, wv_5\} \subseteq E(G)$. 考虑子图 $T_n[v_1, v_2, v_3] \cup T_n[v, v_4] \cup T_n[w, v_5]$, 子图 $T_n[v, v_4, v_5] \cup T_n[v_2, v_3] \cup T_n[w, v_1]$, 以及子图 $T_n[v, v_4, v_5] \cup T_n[v_1, v_3] \cup T_n[w, v_2]$, 可以得到 $c(vv_4) \in \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, wv_5\} \cap \{v_4v_5, vv_5, v_2v_3, wv_1\} \cap \{v_4v_5, vv_5, v_1v_3, wv_2\} = \emptyset$, 矛盾. 因此对任意顶点 $w \in D \setminus \{v\}$ 都有 $d(w) \leq 2$. 从而 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 2(n - 6) + 3 = 2n$, 矛盾.

情形 4. 每个顶点 $v \in D$ 都有 $d(v) \leq 2$.

此时 $2n + 4 = e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(V(H), D) \leq e(T_5) + 2(n - 5) = 2n - 1$, 矛盾. 因此对任意 $n \geq 7$, $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup 2P_2) \leq 2n + 3$. 当 $t = 2$ 时定理 4 证明完毕.

令 $t \geq 3$. 接下来证明对任意 $n \geq 2t + 3$ 有 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \leq 2n + 4t - 5$. 我们只需要证明任意图 $T_n \in \mathcal{T}_n$ 的任意 $(2n + 4t - 4)$ -边染色都包含一个彩虹 $C_3 \cup tP_2$. 反过来, 我们假设存在一个图 T_n 的 $(2n + 4t - 4)$ -边染色使得图 T_n 不包含彩虹 $C_3 \cup tP_2$. 根据归纳假设, 可以容易得到图 T_n 包含一个由 H_1 和 H_2 不相交的并组成的彩虹子图 H , 其中 $H_1 = C_3$ 且 $H_2 = (t - 1)P_2$. 令图 G 是图 T_n 的一个边数为 $2n + 4t - 4$ 的彩虹生成子图且包含子图 H . 显然, 图 G 不包含与 $C_3 \cup tP_2$ 同构的子图. 令 $E(H_2) = \{u_i w_i \in E(G) : i \in \{1, \dots, t - 1\}\}$, $V(H_2) = \{u_1, \dots, u_{t-1}, w_1, \dots, w_{t-1}\}$, $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, 以及 $R = V(G) \setminus V(H)$. 对每个 $i \in \{1, \dots, t - 1\}$, 我们可以假设 $|N_G(u_i) \cap R| \leq |N_G(w_i) \cap R|$. 因为图 G 不包含 $C_3 \cup tP_2$, 所以图 $G[R]$ 没有边. 同时对每个 $i \in \{1, \dots, t - 1\}$, 有 $|N_G(u_i) \cap R| = 0$ 或者 $|N_G(u_i) \cap R| = 1$ 且 $N_G(u_i) \cap R = N_G(w_i) \cap R$. 我们可以假设对所有的 $0 \leq i \leq l$ 的边 $u_1 w_1, \dots, u_l w_l$ 满足 $|N_G(u_i) \cap R| = 1$, 对所有的 $j \in \{l + 1, \dots, t - 1\}$ 有 $|N_G(u_j) \cap R| = 0$, 其中 $0 \leq l \leq t - 1$. 因此 $e_G(\{u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_l\}, R) = 2l$. 令 $L = \{v_1, v_2, v_3, w_{l+1}, \dots, w_{t-1}\}$. 当 $l = t - 1$ 时, $e_G(L, R) = 2(n - 2t + 2) - 4 \leq 2n - 2t - 2l - 2$. 当 $l \leq t - 2$ 时, 由于 $G[L \cup R] - E(G[L])$ 是一个顶点数为 $n - t - l + 1$ 的平面二部图, 所以有 $e_G(L, R) \leq 2(n - t - l + 1) - 4 = 2n - 2t - 2l - 2$. 由于图 G 是平面图, 我们有 $e(G[V(H)]) \leq 3(2t + 1) - 6 = 6t - 3$. 因此 $e(G) = e(G[V(H)]) + e_G(\{u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_l\}, R) + e_G(L, R) \leq (6t - 3) + 2l + (2n - 2t - 2l - 2) = 2n + 4t - 5$, 矛盾. 从而证明了 $AR(\mathcal{T}_n, C_3 \cup tP_2) \leq 2n + 4t - 5$.

综上所述, 定理 4 证明完毕. ■

4. 总结

从 Gilboa 和 Roditty [27] 得到的包含匹配的非连通图在完全图中的 anti-Ramsey 数的结论中获得启发, 并选择平面三角剖分图作为母图, 研究了包含匹配的非连通图 $C_3 \cup tP_2$ 在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数, 本论文主要通过构造极值染色得到平面三角剖分图中 $C_3 \cup tP_2$ 的 anti-Ramsey 数的下界, 接着运用反证法, 通过研究图的结构最终得到矛盾, 从而证明上界. 这一研究也为今后继续研究其他包含匹配的非连通图在平面三角剖分图中的 anti-Ramsey 数提供了思路. 由于平面图结构比较复杂, 在对结构进行分析时会有一定的难度, 今后主要的研究方向是需要不断缩小本论文不相同的上界和下界, 以及对其他包含匹配的非连通图在平面三角剖分图的 anti-Ramsey 数进行研究.

参考文献

- [1] Erdős, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems. In: Hajnal, A., Rado, R. and Sós, V.T., Eds., Infinite and Finite Sets II, North-Holland, Amsterdam, 633-643.

- [2] Alon, N. (1983) On a Conjecture of Erdős, Simonovits and Sós Concerning anti-Ramsey Theorems. *Journal of Graph Theory*, **7**, 91-94. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190070112>
- [3] Montellano-Ballesteros, J.J. and Neumann-Lara, V. (2005) An Anti-Ramsey Theorem on Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **21**, 343-354. <https://doi.org/10.1007/s00373-005-0619-y>
- [4] Simonovits, M. and Sós, V.T. (1984) On Restricting Colorings of K_n . *Combinatorica*, **4**, 101-110. <https://doi.org/10.1007/BF02579162>
- [5] Schiermeyer, I. (2004) Rainbow Numbers for Matchings and Complete Graphs. *Discrete Mathematics*, **286**, 157-162. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.11.057>
- [6] Chen, H., Li, X.L. and Tu, J.H. (2009) Complete Solution for the Rainbow Numbers of Matchings. *Discrete Mathematics*, **309**, 3370-3380. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.10.002>
- [7] Haas, R. and Young, M. (2012) The Anti-Ramsey Number of Perfect Matching. *Discrete Mathematics*, **312**, 933-937. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.10.017>
- [8] Jiang, T. and West, D.B. (2003) On the Erdős-Simonovits-Sós Conjecture on the Anti-Ramsey Number of a Cycle. *Combinatorics, Probability and Computing*, **12**, 585-598. <https://doi.org/10.1017/S096354830300590X>
- [9] Jahanbekam, S. and West, D.B. (2016) Anti-Ramsey Problems for t Edge-Disjoint Rainbow Spanning Subgraphs: Cycles, Matchings, or Trees. *Journal of Graph Theory*, **82**, 75-89. <https://doi.org/10.1002/jgt.21888>
- [10] Jia, Y.X., Lu, M. and Zhang, Y. (2019) Anti-Ramsey Problems in Complete Bipartite Graphs for t Edge-Disjoint Rainbow Spanning Subgraphs: Cycles and Matchings. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 1011-1021. <https://doi.org/10.1007/s00373-019-02053-y>
- [11] Jin, Z.M. (2017) Anti-Ramsey Numbers for Matchings in 3-Regular Bipartite Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **292**, 114-119. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.037>
- [12] Jin, Z.M., Ye, K.C., Sun, Y.F. and Chen, H. (2018) Rainbow Matchings in Edge-Colored Complete Split Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **70**, 297-316. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.01.010>
- [13] Li, X.L., Tu, J.H. and Jin, Z.M. (2009) Bipartite Rainbow Numbers of Matchings. *Discrete Mathematics*, **309**, 2575-2578. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.05.011>
- [14] Li, X.L. and Xu, Z.X. (2009) The Rainbow Number of Matchings in Regular Bipartite Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1525-1528. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.03.019>
- [15] Chen, G., Lan, Y.X. and Song, Z.X. (2019) Planar Anti-Ramsey Numbers of Matchings. *Discrete Mathematics*, **342**, 2106-2111. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.04.005>
- [16] Jendrol', S. (2019) On Rainbow Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **342**, Article 111624. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111624>
- [17] Jendrol', S., Schiermeyer, I. and Tu, J.H. (2014) Rainbow Numbers for Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **331**, 158-164. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.05.012>

-
- [18] Jin, Z.M., Ma, H.W. and Yu, R. (2022) Rainbow Matchings in an Edge-Colored Planar Bipartite Graph. *Applied Mathematics and Computation*, **432**, Article 127356. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127356>
- [19] Jin, Z.M. and Ye, K. (2018) Rainbow Number of Matchings in Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, **341**, 2846-2858. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.06.044>
- [20] Pei, Y.F., Lan, Y.X. and He, H. (2022) Improved Bounds for Anti-Ramsey Numbers of Matchings in Outer-Planar Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **418**, Article 126843. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126843>
- [21] Qin, Z.M., Lan, Y.X. and Shi, Y.T. (2019) Improved Bounds for Rainbow Numbers of Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **342**, 221-225. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.09.031>
- [22] Qin, Z.M., Lan, Y.X., Shi, Y.T. and Yue, J. (2021) Exact Rainbow Numbers for Matchings in Plane Triangulations. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112301. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112301>
- [23] Frankl, P. and Kupavskii, A. (2019) Two Problems on Matchings in Set Families—In the Footsteps of Erdős and Kleitman. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **138**, 286-313. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.02.004>
- [24] Jin, Z.M. (2021) Anti-Ramsey Number of Matchings in a Hypergraph. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112594. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112594>
- [25] Özkahya, L. and Young, M. (2013) Anti-Ramsey Number of Matchings in Hypergraphs. *Discrete Mathematics*, **313**, 2359-2364. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.06.015>
- [26] Xue, Y.S., Shan, E.F. and Kang, L.Y. (2022) Anti-Ramsey Number of Matchings in r -Partite r -Uniform Hypergraphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article 112782. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112782>
- [27] Gilboa, S. and Roditty, Y. (2016) Anti-Ramsey Numbers of Graphs with Small Connected Components. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 649-662. <https://doi.org/10.1007/s00373-015-1581-y>
- [28] Bialostocki, A., Gilboa, S. and Roditty, Y. (2015) Anti-Ramsey Numbers of Small Graphs. *Ars Combinatoria*, **123**, 41-53.